Chapitre 11

Introduction aux espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités sur les espace vectoriels

1.1 Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

Définition 1 Espace vectoriel sur $\mathbb{K}$
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble non vide. On dira que $\mathbb{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (= $\mathbb{K}$-ev), ou que $\mathbb{E}$ a une structure de $\mathbb{K}$-ev lorsque :

(i) $\mathbb{E}$ est muni d'une addition + qui est une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) & \longmapsto & \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{array}$$

vérifiant :
- Commutativité. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{E}^2, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}$
- Associativité. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in \mathbb{E}^3, \quad (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$
- Élément neutre. Il existe un unique élément de E, noté $\overrightarrow{0_E}$, tel que :
  $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \quad \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{x}$.
- Opposé. $\forall x \in \mathbb{E}$, il existe un unique élément de $\mathbb{E}$, noté $-\overrightarrow{x}$ et appelé opposé de $\overrightarrow{x}$, vérifiant : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}, \quad \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x}) = (-\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

(ii) $\mathbb{E}$ est muni d'une multiplication par un scalaire . qui est une application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ (\lambda, \overrightarrow{x}) & \longmapsto & \lambda.\overrightarrow{x} \end{array}$$

vérifiant :
- $\forall (\lambda, \mu, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{E}, \quad (\lambda + \mu).\overrightarrow{x} = \lambda.\overrightarrow{x} + \mu.\overrightarrow{x}$
- $\forall (\lambda, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2, \quad \lambda.(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda.\overrightarrow{x} + \lambda.\overrightarrow{y}$
- $\forall (\lambda, \mu, \overrightarrow{x}) \in \mathbb{K}^2 \times \mathbb{E}, \quad \lambda.(\mu.\overrightarrow{x}) = (\lambda \times \mu).\overrightarrow{x} = \mu.(\lambda.\overrightarrow{x})$
- $1.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$

Dans la suite, l'opération $\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{y})$ sera notée $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$.

Les éléments de $\mathbb{E}$ sont appelés **vecteurs**, et ceux de $\mathbb{K}$ **scalaires**.

On peut remarquer qu'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ donne aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, en considérant la restriction à $\mathbb{R}$ de la multiplication par un scalaire.

Proposition 2 Règles de calcul
Si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ et $\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}\right)\in\mathbb{E}^2$, on a :

1. $\lambda\left(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\right)=\lambda.\overrightarrow{x}-\lambda.\overrightarrow{y}$;
2. $\lambda.\overrightarrow{0_E}=\overrightarrow{0_E}$;
3. $(\lambda-\mu).\overrightarrow{x}=\lambda.\overrightarrow{x}-\mu.\overrightarrow{x}$;
4. $0.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0_E}$;
5. $(-\lambda).\left(-\overrightarrow{x}\right)=\lambda.\overrightarrow{x}$;
6. Intégrité externe. $\lambda.\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0_E}\iff\lambda=0$ ou $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0_E}$;
   $\lambda.\overrightarrow{x}=\mu.\overrightarrow{x}\iff\overrightarrow{x}=\overrightarrow{0_E}$ ou $\lambda=\mu$;
   $\lambda.\overrightarrow{x}=\lambda.\overrightarrow{y}\iff\lambda=0$ ou $\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}$.

Exemple **:** $\{0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev et un $\mathbb{C}$-ev. Par contre $\varnothing$ n'en est pas un.

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{K}^n}$ Un vecteur $\overrightarrow{x}\in\mathbb{K}^n$ est un n-uplet $(x_1,x_2,\dots,x_n)$.
Si $\overrightarrow{x}=(x_1,\dots,x_n)$ et $\overrightarrow{y}=(y_1,\dots,y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on définit leur somme :

$$\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

Si $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\overrightarrow{x}\in\mathbb{K}^n$ on définit :

$$\lambda.\overrightarrow{x}=\lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda\times x_1,\dots,\lambda\times x_n)$$

Alors $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul est $\overrightarrow{0}_{\mathbb{K}^n}=(0,\dots,0)$.
En particulier pour $n=1$: $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-ev pour ses opérations naturelles. $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev, et $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev donc un $\mathbb{R}$-ev.
⚠ ATTENTION : $\mathbb{R}$ n'est pas un $\mathbb{C}$-ev !

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{F}^A}$ Soient A un ensemble quelconque et $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev. On rappelle que $\mathbb{F}^A$ désigne l'ensemble des fonctions $f:A\longrightarrow\mathbb{F}$ définies sur A à valeurs dans $\mathbb{F}$.
Pour f et g éléments de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $f+g:A\longrightarrow\mathbb{F}$ par :

$$\forall x\in A,\quad (f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

et pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et f élément de $\mathbb{F}^A$, on définit la fonction $\lambda.f:A\longrightarrow\mathbb{F}$ par :

$$\forall x\in A,\quad (\lambda.f)(x)=\lambda.f(x)$$

Alors $\left(\mathbb{F}^A,+,.\right)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}_{\mathbb{F}^A}$ est la fonction constante égale à $\overrightarrow{0_F}$.
En particulier :
- pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et $A=\mathbb{N}$, $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-ev ; (suites réelles)
- pour $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et I intervalle de $\mathbb{R}$, $\left(\mathbb{R}^I,+,.\right)$ est un $\mathbb{R}$-ev. (fonctions définies sur un intervalle I)

Exemple **:** $\boxed{\mathbb{K}[X]}$ On rappelle que $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors $(\mathbb{K}[X],+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}_{\mathbb{K}[X]}$ est la fonction constante égale à 0 sur $\mathbb{K}$.

Exemple **:** $\boxed{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On rappelle que $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de taille $n\times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Alors $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ est la matrice nulle de taille $n\times p$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3 Sous-espace vectoriel
Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ une partie de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ (noté sev de $\mathbb{E}$) lorsque :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable pour « + » : $\forall \left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{F}^2$, $\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$;
(iii) $\mathbb{F}$ stable pour « . » : $\forall \left(\lambda, \overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}$, $\lambda.\overrightarrow{x} \in \mathbb{F}$

Exemple **:** Un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ a toujours deux sev triviaux : $\left\{\overrightarrow{0_E}\right\}$ et $\mathbb{E}$.

Proposition 4 Propriété du vecteur nul
Si $\mathbb{F}$ est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.

Pour montrer que $\mathbb{F} \neq \emptyset$, on vérifie donc la plupart du temps que $\overrightarrow{0_E} \in \mathbb{F}$.
Exemple **:** $\emptyset$ n'est jamais un sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

Théorème 5 Caractérisation des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$
Soit $\mathbb{F}$ une partie d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Alors $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si :
(i) $\mathbb{F} \neq \emptyset$;
(ii) $\mathbb{F}$ stable par combinaison linéaire : $\forall \left(\lambda, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{F}^2$, $\lambda.\overrightarrow{x}_1 + \overrightarrow{x}_2 \in \mathbb{F}$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{F}_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x^2 + y^2 = 1\right\}$, $\mathbb{F}_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x + y = 1\right\}$ et $\mathbb{Z}^2$ ne sont pas des sev de $\mathbb{R}^2$. Par contre $\mathbb{F}_3 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, x + y = 0\right\}$ en est un.

Exemple **:** $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Exemple **:** $T_n^+(\mathbb{K})$, $T_n^-(\mathbb{K})$, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

⚠ $Gl_n(\mathbb{K})$ n'est pas un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: il ne contient pas le vecteur nul et n'est pas non plus stable par multiplication !

Théorème 6 Un sev est un $\mathbb{K}$-ev
Si $\mathbb{E}$ est un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{F}$ un sev de $\mathbb{E}$, alors les restrictions à $\mathbb{F}$ des opérations « + » et « . » de $\mathbb{E}$, munissent $\mathbb{F}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-ev.

En pratique, pour montrer qu'un ensemble $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (8 conditions), on cherche un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ contenant $\mathbb{F}$ (ie $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$), et on montre que $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ (seulement 2 conditions).

Exemple **:** $K_n[X]$ est un K-ev puisque c'est un sev de $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 7 Intersection de sev
Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} \cap \mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : en général $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ n'est pas un sev de $\mathbb{E}$.

Exemple **:** On pose $\mathbb{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=x\}$ et $\mathbb{G}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y=-x\}$. $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev de $\mathbb{R}^2$, mais $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ n'en est pas un.

Exemple **:** Si $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont des sev d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{F}\cup\mathbb{G}$ est aussi un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{G}$ ou $\mathbb{G}\subseteq\mathbb{F}$.

Exemple **:** $D_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ désigne un $\mathbb{K}$-ev.

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 8 Combinaison linéaire Soit $\mathscr{F}=\left(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$ (c'est-à-dire un p-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$).
On dit que $\overrightarrow{x}\in\mathbb{E}$ est combinaison linéaire (= CL) des vecteurs de $\mathscr{F}$ lorsqu'il existe des scalaires $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\in\mathbb{K}^p$ tels que :

$$\overrightarrow{x}=\sum_{k=1}^{p}\lambda_k.\overrightarrow{u_k}$$

Exemple **:** Dans $\mathbb{R}^2$ avec une famille finie.
$(2,3)$ est CL de $(1,0)$ et $(1,1)$: $(2,3)=3.(1,1)+(-1).(1,0)$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}^n.}$
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on pose $\overrightarrow{e_i}=(0,\dots,0,\underset{\substack{\downarrow\\ \text{i-ième position}}}{1},0,\dots,0)$.
Alors tout $\overrightarrow{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ est CL de la famille $\left(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n}\right)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}&=(x_1,\dots,x_n)\\&=(x_1,0,\dots,0)+(0,x_2,0,\dots,0)+\dots+(0,\dots,0,x_n)\\&=x_1.(1,0,\dots,0)+x_2.(0,1,0,\dots,0)+\dots+x_n.(0,\dots,0,1)\\&=x_1.\overrightarrow{e_1}+x_2.\overrightarrow{e_2}+\dots+x_n.\overrightarrow{e_n}\\&=\sum_{k=1}^{n}x_k.\overrightarrow{e_k}\end{aligned}$$

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathbb{K}_n[X].}$
Si $P=a_0+a_1X+a_2X^2+\dots+a_nX^n$ est un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, alors P est CL des polynômes 1, X, ..., X^n. Ceci prouve que tout élément de $\mathbb{K}_n[X]$ est CL de la famille $(1,X,X^2,\dots,X^n)$.

Exemple **:** $\boxed{\text{Un exemple général à connaître dans } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K}).}$
Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, on rappelle qu'on note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, exceptés celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j, qui

est égal à 1.
Les matrices E_{ij}, pour $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, sont appelées **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, alors A est CL des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 9 CL et sev
Si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors toute CL de ces vecteurs est encore un vecteur de $\mathbb{F}$.
En particulier, si $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors $\forall(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on a $\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k} \in \mathbb{F}$.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition 10 Notation $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. On note $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ qui sont combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i} \Big/ \forall i \in [\![1, p]\!],\ \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

et donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:

$$\overrightarrow{x} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \Longleftrightarrow \exists(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \Big/ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.\overrightarrow{u_i}$$

Noter que si $\mathscr{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on a $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{E}$.

On adopte aussi la convention : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}^n = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i−ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Exemple **:** On a vu au paragraphe 2.1. que $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left((E_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}\right)$.

Théorème 11 Propriétés de $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est un sev de $\mathbb{E}$ qui contient $\mathscr{F}$: $\mathscr{F} \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$;
2. C'est le plus petit sev de $\mathbb{E}$ contenant $\mathscr{F}$:
   si $\mathbb{F}$ est un sev de $\mathbb{E}$ tel que $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{F}$, alors $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{F}$.

Important : ce résultat peut servir à montrer très rapidement qu'une partie $\mathbb{F}$ de $\mathbb{E}$ est un sev.

Exemple **:** $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\} = \text{Vect}\left[(1,0,1);(0,1,2)\right]$.

Corollaire 12 Inclusions de Vect
Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$:
$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$ donne $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \text{Vect}(\mathscr{G})$.

Corollaire 13 Règles de calcul sur les Vect
Soit $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.

1. Si $\overrightarrow{u_{p+1}}$ est CL de la famille $\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$, alors on peut « l'enlever du Vect » : $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$
2. On peut additionner à un vecteur toute CL des autres :
   si $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p} + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i . \overrightarrow{u_i}\right)$
3. On peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul :
   si $\alpha \neq 0$, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \alpha.\overrightarrow{u_p}\right)$
4. $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ ne dépend pas de l'ordre des vecteurs :
   si $\sigma : [\![1, p]\!] \longrightarrow [\![1, p]\!]$ est bijective, alors $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_{\sigma(1)}}, \dots, \overrightarrow{u_{\sigma(p)}}\right)$
5. On peut « enlever le vecteur nul d'un Vect » :
   $\text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{0_E}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$

2.3 Familles génératrices

Définition 14 Famille génératrice d'un sev
Soit $\mathscr{F}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\mathbb{E}$, ou que $\mathbb{E}$ est engendré par $\mathscr{F}$, lorsque $\mathbb{E} = \text{Vect}(\mathscr{F})$.

Comme on a $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{E}$, on peut dire que $\text{Vect}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbb{E}$. Donc $\mathscr{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{E} \subseteq \text{Vect}(\mathscr{F})$, ie tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est CL des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Rédaction : Soit $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour montrer qu'elle est génératrice de $\mathbb{E}$, on se fixe un vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, et on cherche des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \overrightarrow{u_k}$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'il existe au moins une solution.

Exemple **:** $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\}$ est engendré par $\Big((1,0,1);(0,1,2)\Big)$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}^n}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-ième position}}{\underset{\downarrow}{1}}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathbb{K}_n[X]}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exemple : $\boxed{\text{Famille génératrice de } \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On a vu au paragraphe 2.2. que la famille $(E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 15 Ajout de vecteurs dans une famille génératrice
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$;
(ii) $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{E}$.
Alors $\mathcal{G}$ est aussi une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

Exemple : $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\}$ est aussi engendré par $\Big((1, 0, 1); (0, 1, 2); (1, 1, 3)\Big)$.

Ainsi, toute sur-famille d'une famille génératrice de $\mathbb{E}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles génératrices de taille minimale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 16 Enlever des vecteurs dans une famille génératrice
Si $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}, \overrightarrow{u_p}\right)$ est génératrice de $\mathbb{E}$, et si $\overrightarrow{u_p}$ est CL de la famille $\widetilde{\mathcal{F}} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_{p-1}}\right)$, alors $\widetilde{\mathcal{F}}$ est encore génératrice de $\mathbb{E}$.

Ce résultat est énoncé dans le cas d'une famille finie, mais il est encore valable dans le cas d'une famille infinie.

On peut donc retenir que dans une famille génératrice de $\mathbb{E}$, si un vecteur est CL des autres, alors on peut l'ôter de la famille tout en gardant une famille génératrice de $\mathbb{E}$.

Exemple : Si $\mathbb{E} = \text{Vect}\left[(1, 0); (1, -1); (0, 1)\right]$ alors $\mathbb{E} = \text{Vect}\left[(1, 0); (0, 1)\right]$.

2.4 Familles libres

Définition 17 Famille libre
Soit $\mathcal{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$ (c'est-à-dire un p-uplet de vecteurs de $\mathbb{E}$).

On dit que $\mathscr{F}$ est une famille libre, ou que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}$ sont linéairement indépendants, lorsque, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$:

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0_E} \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Dans le cas contraire, on dit que $\mathscr{F}$ est liée, ou que les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont linéairement dépendants.

On adoptera la convention que $\emptyset$ est une famille libre de tout $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

On peut remarquer que le caractère libre d'une famille de vecteurs $\mathscr{F}$, ne dépend du choix du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$. Par conséquent si $\mathscr{F} \subseteq \mathbb{F}$ où $\mathbb{F}$ sev de $\mathbb{E}$, alors $\mathscr{F}$ est libre dans $\mathbb{F}$ si et seulement si elle est libre dans $\mathbb{E}$.

⚠ Ceci est faux pour la notion de famille génératrice qui est intrinsèquement liée au sous-espace vectoriel dans lequel on travaille.

Rédaction : Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille finie de p vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour montrer qu'elle est libre, on se fixe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k.\overrightarrow{u_k}\overrightarrow{0_E}$$

En considérant cette égalité comme une équation d'inconnue $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, on doit montrer qu'elle a pour unique solution $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.

***Exemple* :** Dans $\mathbb{R}^2$, $\Big((1,2);(1,3)\Big)$ est libre et $\Big((1,0);(1,1);(0,2)\Big)$ est liée.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}^n}$ La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ est libre, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i-ème position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathbb{K}_n[X]}$ La famille $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est libre.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Dans } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est libre.

Théorème 18 Famille libre à un vecteur
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\left(\overrightarrow{u}\right) \text{ est libre} \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$$

Définition 19 Vecteurs colinéaires
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$, ou de manière équivalente lorsque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E}$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{v}$.

Théorème 20 Famille libre à deux vecteurs
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ est libre} \iff \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ non colinéaires}$$

⚠ ATTENTION : Ce critère est faux dès qu'on a plus de deux vecteurs. Par exemple pour trois vecteurs, le critère devient non coplanaires.

***Exemple* :** Il devient évident que $\big((1,2);(1,3)\big)$ est libre !

Théorème 21 Caractérisation des familles liées
Soit $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est liée} \iff \text{un des vecteurs de } \mathscr{F} \text{ est CL des autres}$$

***Exemple* :** Il devient évident que $\big((1,0);(1,1);(0,2)\big)$ est liée !

Corollaire 22 Cas simples de familles liées
Toute famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ contenant le vecteur nul, ou deux vecteurs identiques, est liée.

Théorème 23 Enlever des vecteurs dans une famille libre
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux familles finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. On suppose que :
(i) $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{G}$;
(ii) $\mathscr{G}$ est libre.
Alors $\mathscr{F}$ est libre.

***Exemple* :** $\big((1,0,0,0);(0,1,0,0);(0,0,0,1)\big)$ est libre.

On peut donc retenir que toute sous-famille d'une famille libre est libre, et donc par contraposée, toute sur-famille d'une famille liée est liée.

En pratique ce résultat n'a que très peu d'intérêt. En effet, on préférera avoir des familles libres de taille maximale (nous verrons pourquoi dans un autre chapitre). Pour cela on utilisera le théorème suivant.

Théorème 24 Ajout d'un vecteur dans une famille libre
Si $\mathscr{F} = \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$ est libre, alors :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est libre } \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{p+1}} \notin \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

et donc par contraposée :

$$\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}\right) \text{ est liée } \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{p+1}} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right) \Longleftrightarrow \overrightarrow{u_{p+1}} \text{ est CL de } \left(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\right)$$

On peut donc retenir que si on a une famille libre de $\mathbb{E}$, alors on peut lui ajouter un vecteur qui n'est pas CL des vecteurs de la famille, tout en gardant une famille libre.

***Exemple* :** Former une famille libre à trois vecteurs à partir de $\Big((1,2,0);(2,1,0)\Big)$.

2.5 Bases

Définition 25 Base d'un K-ev
Soit $\mathscr{B}$ famille finie de vecteurs de $\mathbb{E}$.
On dit que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$ lorsque $\mathscr{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{E}$.

Proposition 26 Base de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$
Soit $\mathscr{F}$ famille finies de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ base de } \operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \Longleftrightarrow \mathscr{F} \text{ est libre}$$

***Exemple* :** $\mathscr{B} = \Big((1,0,1);(0,1,2)\Big)$ est une base de $\mathbb{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ x + 2y = z\right\}$.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}^n}$ On pose $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}\right)$, avec $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{i-ième position}}}{1}, 0, \dots, 0)$, pour $i \in [\![1, n]\!]$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ On pose $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.

***Exemple* :** $\boxed{\text{Base canonique de } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ On pose $\mathscr{B} = (E_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. On a vu au paragraphe 2.3. que $\mathscr{B}$ est génératrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, et au paragraphe 2.4. qu'elle est libre. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Théorème 27 Caractérisation des bases
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors on a équivalence de :
(i) $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{E}$;
(ii) pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, $\exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \varepsilon_k$.

Définition 28 Coordonnées dans une base
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$ une base de $\mathbb{E}$. Le théorème précédent donne que tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ est caractérisé par l'unique p-liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k . \varepsilon_k$.
Les scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$. On le note :

$$\overrightarrow{x} = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)^{\mathscr{B}}$$

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}^n}$ Elles sont égales aux composantes du vecteur. Par exemple, si $\overrightarrow{x} = (2, 1, 3)$, alors ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont $(2, 1, 3)$.

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{K}_n[X]}$ Elles sont égales aux coefficients de la fonction polynômes. Par exemple, $P = X^2 + 2X + 1$ a pour coordonnées $(1, 2, 1)$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exemple : $\boxed{\text{Coordonnées dans la base canonique de } \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})}$ Elles sont égales aux coefficients de la matrice. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $(1, -1, 1, 2, 0, 1)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$.

Exemple : Dans $\mathbb{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + 2y = z\right\}$. Une base de $\mathbb{F}$ est $\mathscr{B} = \Big((1, 0, 1); (0, 1, 2)\Big)$. Par exemple : $\overrightarrow{x} = (1, 1, 3) = (1, 1)^{\mathscr{B}}$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $\left(1, X - 1, (X - 1)^2\right)$, quelles sont les coordonnées de $P = X^2 + 2X + 1$.

Exemple : Dans $\mathbb{E}$ muni d'une base $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots, \overrightarrow{\varepsilon_n})$, quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{\varepsilon_k}$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$?

3 Exercices

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, justifier si la partie considérée est un sous-espace vectoriel.

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 = 0\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x - y = 0\}$
4. $D = \{(a+b, a-b, a);\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
5. $E = \{(1+x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$
6. $F = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Exercice 2 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions numériques. Déterminer si les parties suivantes sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

1. $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ continue}\}$
2. $B = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ paire}\}$
3. $C = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ impaire}\}$
4. $D = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ s'annule}\}$

Exercice 3 On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. $A = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$
2. $B = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ monotone}\}$
3. $C = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$
4. $D = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ arithmétique}\}$
5. $E = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} u_n\right\}$

Exercice 4 On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Les parties suivantes sont-elles de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$?

1. $A = \{P \in \mathbb{K}[X] / 0 \text{ est racine de } P\}$
2. $B = \{P \in \mathbb{K}[X] / 0 \text{ est racine double de } P\}$
3. $C = \{P \in \mathbb{K}[X] / 0 \text{ est racine au moins d'ordre 2 de } P\}$
4. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé : $D = \{P \in \mathbb{K}[X] / \deg(P) = n\}$

Exercice 5

1. Montrer que la partie $A = \left\{\begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & -a-b \end{pmatrix} \Big/ (a, b) \in \mathbb{K}^2\right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. La partie $B_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \big/ A^p = 0_n\}$ est-elle un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
   On pourra considérer $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$ $\mathbb{K}$-ev. Montrer que $\mathbb{F} \cup \mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$ si et seulement si $\mathbb{F} \subset \mathbb{G}$ ou $\mathbb{G} \subset \mathbb{F}$.

Familles libres, génératrices

Exercice 7 Les familles suivantes sont-elles libres (si non, on donnera une combinaison linéaire nulle, dont les coefficients sont non tous nuls) ? génératrices de $\mathbb{R}^3$ (si non, on donnera un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne s'exprime pas en fonctions des vecteurs de la famille) ? Sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_1 &= \Big((2,4,3),(1,5,7)\Big)\\
\mathscr{F}_2 &= \Big((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)\Big)\\
\mathscr{F}_3 &= \Big((1,1,0),(2,1,0),(0,1,1)\Big)
\end{aligned}$$

Exercice 8 Les sev de $\mathbb{K}^n$ peuvent être définie de 3 façons différentes :
• Par des équations cartésiennes : $A = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x - y + z = 0 \text{ et } y - 2t = 0\right\}$.
• Par un paramétrage : $B = \left\{(2a-3b+c, a+2b-c, -b+c, a);\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
• Par la donnée d'une base (ou d'une famille génératrice) : $C = Vect\Big((1,2,-1,0),(0,1,3,-1)\Big)$.
Ecrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 9 Les famille suivantes sont-elles des familles libres de l'espace vectoriel indiqué ?

1. $\left((X-1)^2,(X-2)^2,(X-3)^2\right)$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $\left(X^2+1, 2X, 2X^2+X\right)$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $\left(x \mapsto \cos(x), x \mapsto x\cos(x), x \mapsto \sin(x), x \mapsto x\sin(x)\right)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\left((1)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos^2 n)_{n\in\mathbb{N}}, (\cos(2n))_{n\in\mathbb{N}}\right)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
5. $\left((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
6. $\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

Exercice 10 Donner une famille génératrice des espaces vectoriels suivants :

1. $\mathbb{E} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\right\}$
2. $\mathbb{F} = \left\{P \in \mathbb{K}[X] / \ 0 \text{ est racine de } P\right\}$
3. $\mathbb{G} = \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$

Exercice 11 On dit qu'une famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ (où $n \in \mathbb{N}$) est <u>échelonnée</u> lorsque, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\deg(P_k) = k$.
Montrer que toute famille échelonnée de polynômes $(P_0, \ldots, P_n)$ forme une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $\left(\overrightarrow{e}_1, \ldots, \overrightarrow{e}_n\right)$ une famille libre de vecteurs de $\mathbb{E}$.
Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\overrightarrow{\varepsilon}_k = \overrightarrow{e}_k + \overrightarrow{e}_{k+1}$.
Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{\varepsilon}_1, \ldots, \overrightarrow{\varepsilon}_{n-1}\right)$ est libre.