Chapitre 12

Séries numériques

Le but de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible, la somme infinie $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, et de l'utiliser dans des calculs.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 Série numérique
Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de nombre réels définie à partir d'un rang n_0. On lui associe une suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée série de terme général u_n, et est notée $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Pour $n \geq n_0$ donné, le réel S_n est appelé somme partielle de rang n associée à la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, et le réel u_n est appelé terme général de cette série.

⚠ ATTENTION ! Il ne faut pas confondre la série (qui est une suite de réels) et ses sommes partielles (qui sont des nombres réels).

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.

Proposition 2 Les sommes partielles donnent le terme général
Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est une série numérique, alors :

$$\forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Définition 3 Nature d'une série
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge lorsque la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est convergente, ie lorsque $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ existe et est finie.
Dans le cas contraire (la limite est infinie ou elle n'existe pas), on dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.
Deux séries sont dites de même nature lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
Déterminer la nature d'une série c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.

Rédaction : Pour montrer que deux séries sont de même nature il faut donc montrer que :
$\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff$ $\sum_{n\geq n_1} v_n$ converge.
Pour cela on montre que :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_1} v_n$ converge » et « $\sum_{n\geq n_1} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge ».
Ou par contraposée :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_1} v_n$ converge » et « $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_1} v_n$ diverge ».
Ou encore :
« $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_1} v_n$ diverge » et « $\sum_{n\geq n_1} v_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge ».

Proposition 4 Les premiers termes ne changent pas la nature de la série
Si $n_1 \geq n_0$, alors les deux séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Définition 5 Somme et reste d'une série convergente
On suppose que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n.

1. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelée somme de la série et est notée $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_n$.
2. Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = S - S_n$ est appelé reste d'ordre n de la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

Proposition 6 Propriétés du reste d'une série convergente
On suppose que $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge et pour $n \geq n_0$, on note R_n son reste d'ordre n.

1. Pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Au passage, on peut noter que la relation de Chasles est vraie pour les sommes de séries.
2. $\lim_{n \to +\infty} R_n = 0$.

⚠ ATTENTION aux notations :
- $\sum_{n \geq n_0} u_n$ désigne la série (donc une suite réelle) ;
- $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ désigne la somme partielle de rang n de la série (donc un nombre réel) ;

et pour une **série convergente** :
- $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ désigne la somme de la série (donc un nombre réel) ;
- $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de la série (donc un nombre réel).

Dans la somme de la série, la variable est **muette** :

$$S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{p=n_0}^{+\infty} u_p = \dots$$

par contre pour le reste d'ordre n il ne faut pas prendre n comme variable de la somme, cela n'a aucun sens : $\sum_{n=n+1}^{+\infty} u_n$ n'existe pas !

⚠ ATTENTION ! La somme d'une série convergente dépend des premiers termes. Si $n_1 > n_0$, la relation de Chasles donne :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n$$

***Exemple* :** La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

***Exemple* :** La série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge vers 2 (ce qui lève le fameux paradoxe de Xénon).

1.2 Propriétés des séries

Théorème 7 Dualité suite/série
Si $(v_n)_{n \geq n_0}$ est une suite réelle, on pose pour tout $n \geq n_0 + 1$: $u_n = v_n - v_{n-1}$. Alors :

$$(v_n)_{n \geq n_0} \text{ est convergente } \iff \sum_{n \geq n_0+1} u_n = \sum_{n \geq n_0+1} (v_n - v_{n-1}) \text{ est convergente}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (v_n - v_{n-1}) = \left(\lim_{n \to +\infty} v_n\right) - v_{n_0}$$

L'implication $\Longrightarrow$ est une généralisation aux séries des sommes télescopiques, et sert dans de nombreux calculs.

***Exemple* :** La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge vers 1.

La réciproque $\Leftarrow$ donne une nouvelle méthode pour montrer qu'une suite converge sans calculer sa limite (l'autre étant le théorème de la limite monotone). Nous verrons des applications en TD.

Théorème 8 Condition nécessaire de convergence

1. Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série numérique convergente. Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. Par contraposée : si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre la série harmonique.

Définition 9 Série grossièrement divergente
Une série $\sum_{n\geq n_0} u_n$, telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ ou n'existe pas, est appelée série grossièrement divergente.

***Exemple* :** Les séries $\sum_{n\geq 0} (-1)^n$ et $\sum_{n\geq 0} n!$ sont grossièrement divergentes.

Théorème 10 Linéarité de la convergence
Si les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ convergent, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les séries $\sum_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ et $\sum_{n\geq n_0} \lambda.u_n$ convergent aussi. De plus :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda.u_n = \lambda. \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Corollaire 11 Espace vectoriel des séries convergentes
On note $\mathscr{E}$ l'ensemble des séries numériques convergentes, définies à partir d'un même rang n_0. Alors $\mathscr{E}$ muni des opérations naturelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Corollaire 12 Addition de deux séries

1. On peut écrire :
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_n+v_n)=\sum_{n=n_0}^{+\infty}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n$$
dès qu'**au moinx deux séries convergent**.
2. Si l'une des séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ou $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge et l'autre diverge, alors $\sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$ diverge.
3. Si les deux séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ divergent, alors on ne peut rien dire de général sur $\sum_{n\geq n_0}(u_n+v_n)$ (on a une forme indéterminée).

Corollaire 13 Multiplication d'une série par une constante
Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$, les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} \lambda.u_n$ sont de même nature.

Si on multiplie $\sum_{n\geq n_0} u_n$ par $\lambda=0$, on obtient la série nulle, qui converge vers 0. Ce cas n'est donc pas particulièrement intéressant...

2 Séries à termes positifs

En multipliant une série à termes négatifs par -1, on obtient une série à termes positifs, et ces deux séries sont de même nature. Tout ce qui suit concerne donc aussi les séries à termes négatifs, et plus généralement **les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang** (car la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).

2.1 Règles de comparaison

Soit $(S_n)_{n\geq n_0}$ une suite croissante à partir d'un rang n_0. On rappelle que d'après le théorème de la limite monotone, on a seulement deux alternatives possibles :
• $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge vers un réel ℓ vérifiant : $\forall n\geq n_0,\ S_n\leq\ell$;
• $(S_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$.

Définition 14 Série à termes positifs
On dit que la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est à termes positifs lorsque : $\forall n\geq n_0\ ,u_n\geq 0$.

Théorème 15 Nature d'une série à termes positifs

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs. Pour $n \geq n_0$, on note $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang n. Alors :

1. $(S_n)_{n\geq n_0}$ est croissante.
2. $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge $\iff$ $(S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée. Dans ce cas si M est un majorant de $(S_n)_{n\geq n_0}$:
$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq M$$
3. Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge et $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Si $(S_n)_{n\geq n_0}$ non majorée, alors on peut poser $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$. Pour une série à termes positifs, la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ a donc toujours un sens dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Par exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

⚠ ATTENTION : par contre la notation $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ n' a aucun sens (la limite n'existe pas) !

Théorème 16 Théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs

Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $0 \leq u_n \leq v_n$ pour $n \geq n_0$.

Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, et dans ce cas $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

Rédaction : On rédige de la manière suivante : on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

⚠ ATTENTION, la rédaction suivante est fausse :

on a $\forall n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq v_n$, donc $0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.

En effet, on ne peut pas utiliser la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ dans un calcul tant que la convergence n'a pas été justifiée.

***Exemple* :** $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ converge, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse, ie si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors on ne peut rien dire sur

la nature de $\sum_{n\geq n_0} v_n$. On peut considérer le contre-exemple suivant : $\forall n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{1}{n(n-1)} \leq \dfrac{1}{n}$ mais $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge.
Dans le théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, on ne peut donc pas dire que les deux séries sont de même nature.

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant) ! Nous verrons un contre-exemple en TD (il n'est pas simple d'en construire un).

Corollaire 17 Théorème de comparaison par équivalents pour des séries à termes positifs
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r..
Alors $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ sont de même nature.

Le résultat est donc plus fort que pour la comparaison par inégalité, puisque les deux séries sont de même nature

⚠ ATTENTION : par contre, en cas de convergence, les sommes des deux séries ne sont pas égales !

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant). Nous verrons un contre-exemple en TD.

Exemple **:** $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ diverge et $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge.

Corollaire 18 Théorème de comparaison par « petit o » pour des séries à termes positifs
Soient $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles telles que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ a.p.c.r., et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
Alors : $\sum_{n\geq n_0} v_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} u_n$ converge.
Donc par contraposée : $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum_{n\geq n_0} v_n$ diverge.

⚠ ATTENTION : cette fois les deux séries ne sont pas de même nature.

⚠ ATTENTION ! Ce théorème n'est vrai que pour des séries à termes positifs (ou de signe constant).

Exemple **:** $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exemple **:** $\mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ converge.

Ces résultats sont très utiles pour étudier la nature d'une série. Par contre, on peut remarquer qu'ils ne donnent aucune information sur la valeur de sa somme en cas de convergence.

2.2 Convergence absolue

Définition 19 Convergence absolue
On dit que la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument lorsque la série $\sum\limits_{n\geq n_0} |u_n|$ converge.

Dans le cas d'une série à termes positifs (ou de signe constant), la convergence absolue coïncide avec la convergence. Pour les séries dont le terme général change de signe, l'intérêt de cette notion repose sur le théorème suivant.

Théorème 20 La convergence absolue implique la convergence
Si $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge absolument alors elle converge.

Démonstration : On remarque que, pour tout $n \geq n_0$: $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$. On conclut grâce au théorème de comparaison par inégalité pour les séries à termes positifs, et par linéarité de la convergence.

CQFD $\square$

Exemple **:** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge.

Exemple **:** Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \in]0,1[$, la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b^n \cos((a^n \pi x)$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On peut donc dans certains cas se ramener à l'étude de $\sum\limits_{n\geq n_0} |u_n|$. On travaille alors avec une série à termes positifs, et tous les résultats du paragraphe précédent s'appliquent.

Proposition 21 Propriétés des séries absolument convergentes
On se donne $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

1. Inégalité triangulaire. On a :
$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n|$$
2. Linéarité de l'absolue convergence. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} \lambda.u_n$ sont aussi absolument convergentes.

Définition 22 Série semi-convergente
Une série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est dite semi-convergente lorsqu'elle est convergente, mais non absolument convergente, ie que $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ converge et $\sum\limits_{n\geq n_0} |u_n|$ diverge.

Exemple **:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (c'est loi d'être évident ; sa somme vaut $-\ln(2)$).

Les séries semi-convergentes sont « pathologiques ». On a en particulier le résultat suivant, du à Riemann.

Théorème 23 Commutativité des termes dans un série convergente
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série convergente.

1. Si elle est absolument convergente, alors on peut commuter ses termes sans changer la valeur de sa somme. Autrement dit, pour tout bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

2. Si elle est semi-convergente, alors toute commutation des termes peut changer la valeur de la somme. On peut même montrer que pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$$

   C'est le théorème de réarrangement de Riemann.

Ce théorème est hors-programme ! Mais il faut retenir que pour une série **absolument convergente**, l'ordre des termes n'intervient pas dans le calcul de la somme. Ce résultat aura son importance dans le chapitre sur les variables aléatoires discrètes.

3 Séries de référence

3.1 Séries de Riemann

Théorème 24 Séries de référence de Riemann
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue, puisque la série est à termes positifs.

Démonstration : Pour $\alpha \leq 0$, la série est grossièrement divergente. Pour $\alpha > 0$, on utilise une comparaison à une intégrale.

CQFD □

Dans le cas $\alpha > 1$, on ne connaît pas la valeur de $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, sauf dans des cas particuliers. La fonction ζ est appelée fonction de Riemann, et elle est reliée à de nombreux problèmes. Il est bien de connaître la valeur suivante :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Corollaire 25 Règles du $n^\alpha u_n$ pour des séries à termes positifs
Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une série à termes positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge (absolument).
2. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ diverge.

En pratique, il est conseillé de redémontrer ce critère à chaque fois.

***Exemple*:** La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^3(n)}{n^2}$ est convergente (absolument).

3.2 Séries géométriques et leurs dérivées

Théorème 26 Séries géométriques
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\sum_{n\geq 0} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \frac{x^p}{1-x}$$

Ces formules sont à connaître parfaitement.

Théorème 27 Formule du binôme négatif
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n\geq r} \binom{n}{r} x^n \text{ converge} \iff |x| < 1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^n = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$$

Démonstration : On pose $S(N,r) = \sum_{n=r}^{N} \binom{n}{r} x^n$, pour $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq r$.

Pour tout $N \geq r+1$, on peut vérifier que :

$$(1-x)S(N,r+1) = -\binom{N}{r+1} x^{N+1} + xS(N-1,r)$$

Par récurrence sur r on peut donc montrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} S(N,r) = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

CQFD □

Cette formule est utilisée en pratique sous la forme suivante.

Corollaire 28 Dérivées de la série géométrique
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n\geq p} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} \text{ converge} \iff |x|<1$$

Dans ce cas la convergence est absolue et on a :

$$\sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)x^{n-p} = \frac{p!}{(1-x)^{p+1}}$$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que :

$$\text{« } \sum_{n=0}^{+\infty} \text{dérivée } p \text{ fois de } x^n = \text{ dérivée } p \text{ fois de } \frac{1}{1-x} \text{ »}$$

Les formules les plus souvent utilisées sont les suivantes, valables pour $|x|<1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

et en ajoutant $x \neq 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

***Exemple* :** Nature et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2x^n$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$.

3.3 Séries exponentielles

Théorème 29 Séries exponentielles
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{n!}$ converge absolument (et donc converge). De plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

En particulier : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!} = \mathrm{e}$ (la constante de Néper).

***Exemple* :** Nature et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n-1}{n!}$.

3.4 Méthodologie pour étudier la nature d'une série

On souhaite déterminer la nature de $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

• Si l'énoncé demande explicitement de montrer que la série converge et de calculer sa somme il faut transformer l'expression des sommes partielles $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ en faisant apparaître par télescopage, changement d'indice, Chasles ou linéarité des sommes partielles de séries de références. On calcule ensuite $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ et il faut trouver une limite finie (ce qui prouve la convergence de la série). La somme de la série est alors égale à cette limite.
• Si l'énoncé demande la nature de la série, on procède par ordre décroissant de priorité :
⋆ si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ la série diverge grossièrement ;
⋆ si u_n n'est pas de signe constant, étudier la nature de $\sum_{n\geq n_0} |u_n|$;
⋆ chercher un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$;
⋆ essayer la règle du $n^\alpha u_n$;
⋆ encadrer u_n ;
⋆ essayer de calculer $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{N} u_n$, en faisant éventuellement apparaître des séries de référence.

4 Produit de séries

Terminons par une petite explication sur la pire bêtise du chapitre.

⚠ ATTENTION ! La formule suivante est totalement fausse :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

On a par contre le résultat suivant qui n'est pas au programme.

Théorème 30 Produit de Cauchy
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} u_n \times v_{n-k}$$

Alors la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$

5 Exercices

Exercice 1 Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ 2. $u_n = \frac{n^2-5}{n(2n^+1)}$ 3. $u_n = \frac{n-2}{2^n-1}$ 4. $u_n = \frac{\sqrt[n]{2}-1}{2n+3}$
5. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$ 6. $u_n = \frac{n}{n+1}$ 7. $u_n = \frac{\cos(n!)}{n^3+\cos(n!)}$ 8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 2 Montrer la convergence de la série de terme général u_n puis calculer sa somme :

1. $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 2. $u_n = \frac{6}{5^{n+2}}$ 3. $u_n = \frac{2n(n+1)}{3^n}$ 4. $u_n = (-1)^n\frac{n^2+3}{5^n}$
5. $u_n = (-1)^n\frac{2^n}{(n+1)!}$ 6. $u_n = \frac{n^2+n+1}{n!}$ 7. $u_n = \ln\left(\frac{n^3}{(n+2)(n-1)^2}\right)$ 8. $u_n = \frac{\binom{n}{k}}{n!}$, $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

Exercice 3 Étudier la convergence absolue et la convergence de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 2. $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ 3. $u_n = (-1)^n\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ 4. $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n+1})$

Exercice 4 Étudier la nature de la série de terme général u_n en fonction des paramètres indiqués :

1. $u_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ 2. $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 5

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = S_n - \ln(n)$.
   (a) Montrer que $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
   (a) Montrer que $\ln\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En déduire qu'il existe une constante $C>0$ telle que : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 6 On considère la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ où $u_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^n}$.

1. Montrer que cette série converge.
2. On note S la somme de la série, et S_n sa somme partielle de rang n. Vérifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S-S_n| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
3. Écrire un programme Scilab qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

Exercice 7

1. Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
2. Établir la convergence de la suite $(P_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $P_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$.

Exercice 8 (Critère spécial des séries alternées) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs, convergente vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

1. (a) Monter que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
   (b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.
   (c) Montrer que si $\in \mathbb{N}$: $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$
2. Étudier la nature des séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.
   En déduire un contre-exemple ou $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} v_n$ sont de nature différente (considérer $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \ldots$).

Exercice 9 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \sin(x) - x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis montrer que (u_n) est strictement positive et convergente vers 0^+.
2. Dans les questions suivantes, on admettra que : $\sin(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{6}$.
   (a) À l'aide de l'étude la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{n+1} - u_n$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^3$ converge.
   (b) À l'aide de l'étude la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 11 (Exemple de série de fonctions ex1.15 Analyse ESCP 2012) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$ la somme partielle de rang n de la série de terme général $u_k(x)$. En considérant les sommes partielles de rangs pairs et celles de rangs impairs, montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ converge pour tout réel x.

   On notera $u(x)$ la somme de cette série.
2. Pour $n \geq 1$, on pose $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

   Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $|R_n(x)| \leq \ln(1 + \dfrac{1}{n+1})$.
3. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln(1 + \dfrac{1}{n})$ est convergente. On notera s sa somme.

4. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.
   On pourra considérer $s_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, et utiliser le fait que :
   $$|u(x)-s| \leq |u(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-s_n| + |s_n - s|$$
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $s_{2n} = \ln\big(\frac{(2n!)^2}{2^{4n}(n!)^4}(2n+1)\big)$ et en utilisant l'équivalence de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, déterminer $\lim_{x\to+\infty} u(x)$.

Exercice 12 (Critère de d'Alembert)

1. On se donne une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement positifs.
   On suppose que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ avec $\ell \in \overline{R}^+ = [0,+\infty]$.
   (a) Cas où $\boxed{\ell < 1.}$
   Montrer qu'à partir d'un certain rang : $a_{n+1} \leq \frac{1+\ell}{2} a_n$.
   En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.
   (b) Cas où $\boxed{\ell > 1.}$
   Avec la même méthode que précédemment, montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente.
   (c) Cas où $\boxed{\ell = 1.}$
   À l'aide des séries de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, construire un exemple où $\ell = 1$ et la série diverge, et un exemple ou $\ell = 1$ et la série converge.
2. **Applications.**
   (a) Retrouver le résultat du cours suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument.
   (b) Étudier la nature de la série : $\sum_{n\in\mathbb{N}} \binom{2n}{n}$.

Exercice 13 (Un calcul de somme) On admettra dans cet exercice que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente.
2. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $T_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.
   (a) Établir que si $N \geq 1$:
   $$S_{2N} = \frac{1}{4} T_N - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad \text{et} \quad T_{2N} = \frac{1}{4} T_N + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}$$
   (b) En déduire que pour $N \geq 1$: $S_{2N} = \frac{1}{2} T_N - T_{2N}$.
   (c) Conclure que : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.