Chapitre 13

Espaces probabilisés quelconques

1 Vocabulaire et axiomatique

1.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire, et note Ω **l'univers** associé. On rappelle que les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Dans le chapitre 6, nous avons vu différents exemples d'univers finis. Nous allons lever cette restriction de finitude. On peut d'ores et déjà donner les exemples suivant.

***Exemple* :** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ ou $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ est une suite réelle qui représente la liste des résultats obtenus aux lancers, le terme de rang n (ie ω_n) représentant le résultat du n-ième lancer. Par exemple n'obtenir que des « pile » se note $\omega = (1, 1, 1, \dots)$.

***Exemple* :** Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
On effectue une infinité de tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1, p]\!]^{\mathbb{N}}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les p boules de 1 à p ; un élément $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle qui représente la liste des numéros tirés, la terme de rang n (ie ω_n) représente le numéro obtenu lors du du n-ième tirage.

1.2 La tribu des évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire. On a vu au chapitre 6 qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{F}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. L'ensemble $\mathscr{F}$ est une **tribu**, au sens suivant.

Définition 1 Tribu d'évènements
Soit $\mathscr{F}$ une collection de parties de Ω, ie $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{F}$ est une tribu d'évènements lorsque :
(i) $\Omega \in \mathscr{F}$;
(ii) $\mathscr{F}$ est stable par passage au complémentaire :

$$\forall A \in \mathscr{F}, \quad \overline{A} \in \mathscr{F}$$

(ii) $\mathscr{F}$ est stable par union dénombrable :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

Précisons quelques notations :
• $\mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites d'évènements, donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}$ signifie simplement que $A_n \in \mathscr{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ est égal à $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Donnons maintenant les propriétés d'une tribu d'évènements.

Théorème 2 Propriétés d'une tribu d'évènements
Soit $\mathscr{F}$ une tribu d'évènements. Alors :
(iv) $\emptyset \in \mathscr{F}$;
(v) $\mathscr{F}$ est stable par union finie :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \ldots, A_N) \in \mathscr{F}^N, \quad \bigcup_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}$$

(vi) $\mathscr{F}$ est stable par intersection dénombrable :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{F}$$

(vii) $\mathscr{F}$ est stable par intersection finie :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \ldots, A_N) \in \mathscr{F}^N, \quad \bigcap_{k=1}^{N} A_k \in \mathscr{F}$$

***Exemple* :** Pour tout univers Ω, on a les exemples triviaux de tribus suivants : $\{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathscr{P}(\Omega)$.

En pratique si Ω est fini ou dénombrable (ie en bijection avec $\mathbb{N}$), on choisira $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Dans les autres cas (univers infinis non dénombrables, par exemple $\Omega = \mathbb{R}$), on ne précisera pas la tribu $\mathscr{F}$ par souci de simplicité (et parce que le programme d'ECS ne permet pas de la décrire rigoureusement).

Définition 3 Espace probabilisable
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{F})$ où Ω est l'univers et $\mathscr{F}$ est une tribu d'évènements.

Exemple **:** Sur $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ on peut choisir comme tribu :
• $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ si on s'intéresse au chiffre obtenu en lançant un dé ;
• $\mathscr{F} = \big\{\emptyset; \{2,4,6\}; \{1,3,5\}, \Omega\big\}$ si on s'intéresse seulement à la parité du chiffre obtenu en lançant un dé.
Le choix de la tribu dépend donc de l'expérience à modéliser.

Les propriétés suivantes ont été vues au chapitre 6, dans le cas de familles finies d'évènements $(A_1, A_2, \ldots, A_N)$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille dénombrable d'évènements (= suite d'évènements) :

$$\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \qquad \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}$$

$$B \cap \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n) \qquad B \cup \left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (B \cup A_n)$$

Définition 4 Famille dénombrable d'évènements deux à deux incompatibles
Les évènements de la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dits deux à deux incompatibles lorsque :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

1.3 Systèmes complets d'évènements dénombrables

On se donne un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$.

Définition 5 Système complet d'évènements dénombrable
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de Ω. On dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) dénombrable lorsque :
(i) les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Omega$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \neq \emptyset$

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. On note P_∞ = « on obtient une infinité de piles », et pour $n \in \mathbb{N}$, P_n = « on obtient exactement n piles ». Alors la famille $(P_\infty, P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots)$ est un s.c.e. dénombrable.

Proposition 6 Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.
Tout évènement se décompose sur un s.c.e. dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$$

et les $\left(B \cap A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles.

On rappelle qu'on avait le même résultat avec un s.c.e. fini.
Un s.c.e. permet aussi de définir une tribu.

Théorème 7 Tribu engendré par un s.c.e.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un s.c.e. (fini ou dénombrable), il existe une unique tribu sur Ω qui est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) qui contient tous les A_i, $i \in I$.

Ce théorème justifie la définition suivante.

Définition 8 Tribu engendré par un s.c.e.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est un s.c.e. (fini ou dénombrable), la plus petite tribu contenant les A_i, $i \in I$, est appelée tribu engendrée par les s.c.e. $(A_i)_{i\in I}$.

Si à la fin de l'expérience, on a seulement l'information qu'un des évènements du s.c.e. s'est réalisé, la tribu engendrée par ce s.c.e. représente l'ensemble des évènements pour lesquels on pourra dire s'ils sont réalisés ou non.

***Exemple* :** Si on lance un dé à 6 faces et considère le s.c.e. $\left(A, \overline{A}\right)$ où $A = \{2;4;5\}$ = « obtenir un chiffre pair », alors la tribu engendrée est $\mathscr{F} = \left\{\emptyset; \{2,4,6\}; \{1,3,5\}, \Omega\right\}$.

1.4 Probabilités sur un espace probabilisé quelconque

Définition 9 Probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F})$ un espace probabilisable.
On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{F} \longrightarrow [0,1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est σ-additive :

$$\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}^{\mathbb{N}}, \quad \text{les } (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Dans le point (ii), il est sous-entendu que : si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$ converge.

Le σ devant la propriété de σ-additivité signifie qu'on prend une famille dénombrable, et qu'on obtient la somme d'une série.

Donnons un exemple de calcul de la probabilité d'un évènement du type $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

***Exemple* :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
Montrer que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\frac{1}{2}$.

Définition 10 Espace probabilisé
Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{F}$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur $\mathscr{F}$.

Théorème 11 Propriétés d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
(iv) $\mathbb{P}$ est additive :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{F}^n, \text{les } (A_k)_{k \in [\![1,n]\!]} \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

On se donne deux évènements A et B :
(v) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(vi) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vii) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(viii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

L'inégalité de Boole et la **formule du crible de Poincaré** sont encore valides (cf chap 6).

Nous avons au chapitre 6 comment définir simplement une probabilité sur un univers **fini**. Donnons la généralisation de ce résultat au cas d'un univers **infini dénombrable** (nous ne traiterons pas dans ce chapitre le cas d'un univers infini non dénombrable).
On considère donc un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ où Ω est dénombrable, ie $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$. Dans ce cas, on choisit $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ (toute partie de Ω est un évènement).

Théorème 12 Probabilité sur un univers infini dénombrable

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$. Alors les réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
2. Réciproque. On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(\{\omega_n\})$.
   Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0,1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers infini dénombrable. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \omega_n \in A}} p_n$$

le nombre de termes de la somme pouvant éventuellement être infinie. Par exemple, si $A = \{\omega_0, \omega_2, \omega_4, \omega_6, \dots, \omega_{2n}, \dots\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{2n}$.

Exemple **:** On peut poser : $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$. Quelle est la probabilité de choisir un entier pair ?

Théorème 13 L'équiprobabilité n'existe pas dans le cas dénombrable
Lorsque Ω est dénombrable, on ne peut pas définir de probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

1.5 Propriétés de continuité monotone pour une probabilité

La propriété de σ-additivité donne le théorème suivant.

Théorème 14 Théorème de continuité monotone : cas d'une suite croissante/décroissante pour l'inclusion
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'évènements, ie : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1}$. Alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$
2. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'évènements, ie : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subseteq A_n$. Alors :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

***Exemple* :** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie.
Alors $\mathbb{P}$(« on obtient que des faces ») = 0, et donc $\mathbb{P}$(« on obtient au moins un pile ») = 1.

On peut se passer de l'hypothèse de monotonie.

Corollaire 15 Théorème de continuité monotone
Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements. Alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right)$$

Ce théorème permet, entre autres, de calculer $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ sans l'hypothèse d'incompatibilité.

1.6 Évènements négligeables et presque sûrs

Définition 16 Évènement négligeable
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est négligeable pour $\mathbb{P}$, ou que A est $\mathbb{P}$-négligeable, ou que A est quasi-impossible, lorsque $\mathbb{P}(A) = 0$.

⚠ ATTENTION : A $\mathbb{P}$-négligeable ne signifie pas que $A = \emptyset$! Par contre l'évènement impossible $\emptyset$ est $\mathbb{P}$-négligeable pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

***Exemple* :** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient que des faces » est négligeable pour la probabilité uniforme (ie si la pièce est équilibrée).

Définition 17 Évènement presque sûr
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et A un évènement. On dit que A est presque sûre pour $\mathbb{P}$, ou que A est vrai $\mathbb{P}$-presque sûrement, ou que A est quasi-certain, lorsque $\mathbb{P}(A) = 1$. On le note : A est vrai $\mathbb{P}$-p.s..

⚠ ATTENTION : A vrai $\mathbb{P}$-p.s. ne signifie pas que $A = \Omega$! Par contre l'évènement certain Ω est vrai $\mathbb{P}$-p.s. pour toutes les probabilités $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

***Exemple* :** Dans le jeu de pile ou face infini, l'évènement « on obtient au moins un pile » est vrai p.s..

⚠ ATTENTION : ces notions dépendent du choix de $\mathbb{P}$!

1.7 Probabilités conditionnelles

La définition est la même que dans le cas d'un univers fini.

Définition 18 Probabilité conditionnelle
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

Intuitivement, $\mathbb{P}_B(A)$ représente le calcul de la probabilité de A, du point de vue d'un observateur qui observe l'expérience aléatoire seulement à partir du moment où B s'est déjà réalisé.

***Exemple*:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne composée de n boules noires, 1 boule rouge et 1 boule verte (donc $n+2$ boules au total). On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise.
On a vu que la probabilité de l'évènement E = « au moment où on obtient la boule rouge pour la première fois, la boule verte n'a jamais été obtenue » est égale à $\frac{1}{2}$ (le calcul utilisait la propriété de σ-additivité de $\mathbb{P}$). Retrouver ce résultat par analyse à un pas.

$\mathbb{P}_B$ définit une nouvelle probabilité sur Ω, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 19 Propriétés de $\mathbb{P}_B$
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

La formule des probabilités composées est encore valides, sous la même forme (⚠pas de produit infini !).

Théorème 20 Formule des probabilités composées / Formule du conditionnement multiple
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)
\end{aligned}$$

avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

La formule des probabilités totales se généralise au cas d'un s.c.e. dénombrable.

Théorème 21 Formule des probabilités totales
On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un s.c.e. dénombrable.
Alors, pour tout $B\in\mathscr{F}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(B\cap A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$ converge et :

$$\forall B\in\mathscr{F},\quad \mathbb{P}(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Complément : On dit que qu'une famille d'évènements $(A_n)_{n=0}^{+\infty}$ est un **système quasi-complet d'évènements dénombrable** lorsque :
(i) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n\right)=1$
(ii) $\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2,\ i\neq j\Longrightarrow A_i\cap A_j=\emptyset$.
(iii) $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(A_n)\neq 0$. La différence avec un s.c.e. dénombrable est que :
⋆ l'évènement $\bigcup_{n=0}^{+\infty}A_n$ n'est pas certain mais seulement presque sûr ;
⋆ l'évènement A_n n'est pas impossible mais négligeable.
Pour ces valeurs $\mathbb{P}_{A_n}(B)$ n'existe pas ...mais on a tout de même la formule suivante :

$$\forall B\in\mathscr{F},\quad \mathbb{P}(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(B\cap A_n)$$

***Exemple* :** On suppose que le nombre d'actions mises en vente en une journée est $n\in\mathbb{N}$ avec probabilité $p_n=\mathrm{e}^{-2}\dfrac{2^n}{n!}$. On suppose aussi que chaque action trouve un acheteur avec probabilité $\dfrac{1}{3}$, indépendamment du devenir des autres actions. Pour $k\in\mathbb{N}$, déterminer la probabilité q_k de vendre k actions dans la journée.

La formule de Bayes se généralise elle aussi au cas d'un s.c.e. dénombrable, mais ce n'est pas au programme ! On se contentera de l'appliquer avec des s.c.e. finis.

1.8 Indépendance mutuelle d'une famille dénombrable d'évènements

Rappel : on dit que $A\perp\!\!\!\perp B$ lorsque $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$.

***Exemple* :** Quels sont les évènements A tels que $A\perp\!\!\!\perp A$?

On se donne une famille dénombrable d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 22 Indépendance deux à deux
On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall(n,p)\in\mathbb{N}^2,\quad n\neq p\Longrightarrow A_n\perp\!\!\!\perp A_p$$

Définition 23 Indépendance mutuelle
On dit que les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq \mathbb{N}, \quad J \text{ finie} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in J} A_n\right) = \prod_{n\in J} \mathbb{P}(A_n)$$

⚠ On ne peut pas dire que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$ (pas de produit infini).

Proposition 24 Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux
Si les $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont aussi deux à deux indépendants.

⚠Comme on l'a vu au chapitre 6, la réciproque est fausse.

En pratique, on utilise l'indépendance mutuelle.

Le **lemme des coalitions** reste valide (cf chapitre 6).

***Exemple* :** On lance une infinité de fois une pièce de monnaie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « obtenir P au n-ième lancer ». Alors les évènements $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

***Exemple* :** On effectue une infinité de tirages successifs d'une boule avec remise , dans une urne constituée de boules blanches et de boules noires. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement « obtenir une blanche au n-ième tirage ». Alors les évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

2 Variables aléatoires réelles

2.1 Variables aléatoires réelles

On se donne un espace probabilisable quelconque $(\Omega, \mathscr{F})$.

Définition 25 Variable aléatoire réelle
On appelle variable aléatoire réelle (VAR) sur $(\Omega, \mathscr{F})$ toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}\big(]-\infty, x]\big) = \big\{\omega \in \Omega \big/ X(\omega) \leq x\big\} \in \mathscr{F}$$

En première année d'ECS, on admettra toujours que X est une variable aléatoire réelle.

Notation : Si X est une VAR et A une partie de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on admettra que :

$$X^{-1}(A) = \big\{\omega \in \Omega \big/ X(\omega) \in A\big\}$$

est un élément de $\mathscr{F}$, ie que $X^{-1}(A)$ est un évènement. Cet évènement sera noté plus simplement $[X \in A]$. On a donc :

$$[X \in A] = \left\{\omega \in \Omega \middle/ X(\omega) \in A\right\}$$

On peut donc calculer $\mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.
Pour simplifier les notations on notera $\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\big([X \in A]\big)$.

Cas particuliers :
• Si $A = \{a\}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $[X \in \{a\}]$ est noté plus simplement $[X = a]$.
• Si $A =]-\infty, a]$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\big[X \in]-\infty, a]\big]$ est noté plus simplement $[X \leq a]$.
• Si $A = [a, b[$ où $(a, b) \in \big(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}\big)^2$, alors $\big[X \in [a, b[\big]$ est noté plus simplement $[a \leq X < b]$ etc...

Les évènements du type $[X \leq x]$ permettent d'en exprimer d'autres.

Exemple **:** $[a < X \leq b] = [X \leq b] \cap \overline{[X \leq a]} = [X \leq b] \setminus [X \leq a]$.

Exemple **:** $[X = x] = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[x - \frac{1}{n} < X \leq x\right]$.

2.2 Loi et fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

Définition 26 Fonction de répartition d'une VAR
On appelle fonction de répartition de X la fonction

$$F_X : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, 1] \\ t & \longmapsto & \mathbb{P}(X \leq t) \end{array}$$

Théorème 27 Propriétés d'une fonction de répartition

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\displaystyle\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.
3. F_X est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.
4. On a $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X > t) = 1 - F_X(t)$
   et $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Longrightarrow \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Démonstration :

1. Si $t_1 \leq t_2$, alors $[X \leq t_1] \subseteq [X \leq t_2]$.
2. Les limites existent car F_X croissante.
   Pour le calcul, on considère les suites d'évènements $\big([X \leq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big([X \leq -n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, $F_X(t_0^+) = \displaystyle\lim_{x \to t_0^+} F_X(x)$ existe car F_X croissante.

   Pour le calcul, on considère la suite d'évènement $\left(\left[X \leq t_0 + \dfrac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Remarquer que $[a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [x < a]$.

CQFD □

Donnons ensuite la définition de la loi de probabilité d'une VAR X.

Définition 28 Loi d'une VAR
On appelle loi d'une VAR X l'application $\mathbb{P}^X$ définie par :

$$\forall I \text{ intervalle de } \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}^X(I) = \mathbb{P}(X \in I)$$

Le résultat suivant (admis) justifie l'utilisation de la fonction de répartition.

Théorème 29 La fonction de répartition caractérise la loi
$\mathbb{P}^X$ est entièrement déterminée par la donnée de F_x.
En particulier, deux VAR qui ont la même fonction de répartition ont la même loi.

Intuitivement, l'idée est ce qu'une propriété vraie pour tous les intervalles du type $]-\infty, x]$ $(x \in \mathbb{R})$, et qui est stable par les opérations d'union et de complémentaire, devient vraie pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$.

On peut définir une VAR directement à partir de sa fonction de répartition, grâce au résultat suivant.

Théorème 30 Existence d'une VAR de fonction de répartition donnée
On se donne une fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\lim\limits_{t \to -\infty} F(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t) = 1$.
3. F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une VAR X sur $(\Omega, \mathscr{F})$ tels que F est la fonction de répartition de X.

3 Exercices

Exercice 1 On considère une infinité d'urnes. On en choisit une au hasard de telle sorte que la probabilité de choisir l'une numéro n soit égale à $\frac{1}{2^n}$ (avec $n \geq 1$). L'urne numéro n est composée de 2^n boules dont une seule blanche. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 2 Un enfant lance un galet pour faire des ricochets sur l'eau. On suppose que la probabilité que le galet ricoche pour la $n^{\text{ème}}$ fois, sachant qu'il a ricoché les $n-1$ coups d'avant, est égale à $\frac{1}{n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la probabilité p_n que le galet coule après n ricochets ?
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 3 Sur un réseau informatique des ordinateurs se transmettent une information de manières indépendantes. On suppose qu'à chaque transmission l'information est transmise correctement avec la même probabilité $p \in [0,1]$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que l'information soit transmise correctement n fois consécutives.
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter ce résultat.

Exercice 4 On considère une suite lancers indépendants d'une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" est p et la probabilité d'obtenir "face" est $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$). "pile" (resp. "face") sera noté en abrégé P (resp. F).

1. Soit $n \geqslant 1$. On considère l'événement A_n : "La séquence PF apparaît pour la première fois aux lancers $(n-1)$ et n." Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Quelle est la probabilité de l'événement A : "La séquence PF apparaît au moins une fois".
3. Soit B l'événement : "La séquence PP apparaît sans qu'il n'y ait eu de séquence PF auparavant". Calculer $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 5 On admettra que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge, et que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

On dispose d'une urne contenant initialement une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée.
On effectue des lancers successifs et indépendants de la pièce :
• si on obtient « pile » alors on tire une boule au hasard dans l'urne et on arrête les lancers ;
• si on obtient « face » alors on ajoute une boule noire dans l'urne et on continue les lancers.

1. Expliquer pourquoi cette expérience se termine presque sûrement au bout d'un nombre fini de lancers.
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Exercice 6 (Lemme de Borel-Cantelli) Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$. On note B l'événement $\bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)$.

On rappelle que cet événement est en fait :

$$B = \{\omega \in \Omega / \ \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}$$

1. On suppose que la série $\sum_k \mathbb{P}(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.
2. On suppose que les événements (A_n) sont indépendants et que la série $\sum_n \mathbb{P}(A_n)$ est divergente.
   (a) Montrer que l'événement $\overline{B}$ est égal à $\bigcup_{n\geq 1}\Big(\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k}\Big)$, où $\overline{M}$ désigne l'événement contraire de l'événement M.
   (b) Exprimer $\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=n}^{m} \overline{A_k}\Big)$ en fonction des p_k.
   (c) Montrer que la série $\sum_k \ln(1-p_k)$ est divergente.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(B) = 1$.
3. Un singe tape aléatoirement sur les touches d'une machine à écrire. Montrer qu'avec probabilité 1, il écrira une infinité de fois l'intégralité de n'importe quel livre.
4. Soit α un réel strictement positif et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout n, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n^\alpha}$.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.
   (b) On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n / \ X_n = 1\}$ contient une infinité d'éléments.
   (c) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec une probabilité égale à 1, l'ensemble $\{n \mid X_n = 1\}$ est fini.