Chapitre 14

Variables aléatoires discrètes

1 Variables aléatoires discrètes

1.1 Définitions

Définition 1 Variable aléatoire discrète infinie
On appelle variable aléatoire discrète finie (VARD finie) toute VAR X telle que l'ensemble $X(\Omega)$ est fini.
On appelle variable aléatoire discrète infinie (VARD infinie) toute VAR X telle que l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (ie en bijection avec $\mathbb{N}$).

Sans préciser si elle est finie ou infinie, on parlera de variable aléatoire discrète (VARD en abrégé).

Notations :
Pour une VARD finie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$, où $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.
Pour une VARD infinie l'ensemble $X(\Omega)$ est noté $X(\Omega) = \{x_n / \, n \in \mathbb{N}\}$, où la suite de réels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce : $\Omega = \{0; 1\}^{\mathbb{N}}$.
On note X = Rang d'apparition du premier pile. Alors X est une VARD infini et $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ (on dit que $X = +\infty$ lorsqu'on obtient toujours des Faces depuis le premier lancer).

Théorème 2 Quasi-système complet d'évènements dénombrable associé à une VARD
Si X est une VARD finie alors la famille $\big([X = x_k]\big)_{1\leq k\leq N}$ est un quasi-s.c.e..
Si X est une VARD infinie alors la famille $\big([X = x_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un quasi-s.c.e. dénombrable.

En général ce n'est pas un s.c.e. car on peut avoir $\mathbb{P}(X = x_k) = 0$ pour certaines valeurs de k.

Définition 3 Tribu engendrée par une VARD
On appelle tribu engendrée par la VARD X, notée $\sigma(X)$, la tribu engendrée par le s.c.e. $\big([X = x]\big)_{x\in X(\Omega)}$.

Intuitivement $\sigma(X)$ correspond à tous les évènements qui donnent de l'information sur X.

Théorème 4 Caractérisation de la loi de probabilité d'une VARD
Si X est une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, la loi de probabilité de X est caractérisée par la donnée des valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

C'est-à-dire qu'au lieu calculer les $\mathbb{P}(X \in I)$ pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$, on est ramené à calculer ces probabilités seulement pour les singletons.

⚠ ATTENTION ! Avant de déterminer la loi de X, il est *indispensable* de déterminer en premier $X(\Omega)$, c'est-à-dire les valeurs prises par la VARD X.

Définition 5 Égalité en loi
Si X et Y sont deux VARD, définies chacune sur un espace probabilisé, on dit que X et Y sont égales en loi lorsque $\mathscr{L}_X = \mathscr{L}_Y$.
On le note $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$.

Proposition 6 Propriétés élémentaires d'une loi de probabilité
Soit X une VARD. On a alors :
(i) $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \in [0, 1]$;
(ii) $\sum\limits_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.

Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ alors $\sum\limits_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = x_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 0$.

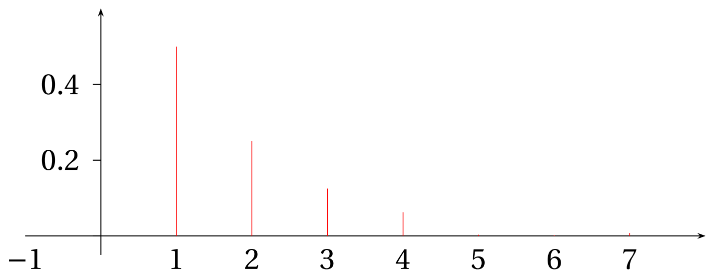
Exemple **:** On lance une infinité de fois une pièce et on note X = Rang du lancer où on obtient le premier Pile. Alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k} \qquad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$$

Sur cet exemple on peut considérer, par abus de notation, que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

⚠ ATTENTION : $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$ ne signifie pas que $[X = +\infty] = \emptyset$, mais seulement que cet évènement est $\mathbb{P}$-négligeable !

On obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 7 Construction d'une VARD infinie ayant une loi de probabilité donnée
On se donne une suite de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
• $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n \geq 0$;
• $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.
Alors pour toute suite de réels strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que :
$X(\Omega) = \{x_n / \ n \in \mathbb{N}\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.
Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \in [0,1]$.

Il n'y a unicité, ni de $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, ni de la VARD X.

***Exemple* :** Il existe une VARD infinie X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et de loi donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{4^k}$$

1.2 L'expérience a-t-elle une fin ?

Dans certaines situations, on note X = Nombre de répétitions d'une expérience aléatoire jusqu'à obtenir une certaine condition. On alors $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, l'évènement $[X = +\infty]$ correspondant au cas où la condition souhaitée n'est jamais vérifiée.

On cherche alors à calculer :
• $\mathbb{P}(X = +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on répète indéfiniment l'expérience ;
• $\mathbb{P}(X < +\infty)$ qui correspond à la probabilité qu'on ne répète l'expérience qu'un nombre fini de fois.
Ces deux quantités étant reliés par la formule :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

Définition 8 Expérience ne se répétant qu'un nombre fini de fois presque sûrement
On dit que l'expérience ne se répète presque sûrement qu'un nombre fini de fois, ou que l'expérience s'arrête presque sûrement au bout d'un nombre fini de tours, lorsque :
$\mathbb{P}(X < +\infty) = 1$ ou de manière équivalent $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On dispose de deux méthodes pour déterminer ces quantités. Commençons par éliminer ce qu'il ne faut pas faire !

⚠ ATTENTION : on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X = +\infty)$! En effet on a toujours $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X = n) = 0$ puisque la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbb{P}(X = n)$ converge...

<u>Première méthode</u> : utiliser la loi de X et la σ-additivité de $\mathbb{P}$. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que :

$$[X < +\infty] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n]$$

et comme les évènements situés dans l'union sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \qquad (1)$$

⚠ ATTENTION : dans l'union $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X = n]$ figurent tous les évènements $[X = n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, mais ne figure pas l'évènement $[X = +\infty]$. On a pourtant l'impression que l'indice n peut prendre la valeur $+\infty$, mais ce n'est pas le cas…

Une autre façon de le voir est de partir du fait que la famille $\big([X = n]\big)_{n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}}$ est un s.c.e., ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$$

et donc :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n) \qquad (2)$$

Les deux formules sont les mêmes puisque $\mathbb{P}(X < +\infty) + \mathbb{P}(X = +\infty) = 1$.

***Exemple* :** Deux joueurs A et B jouent à Pile ou Face. Le joueur A gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang pair, et le joueur B gagne si le premier Pile survient à un lancer de rang impair. Par exemple pour les lancer « FFP » c'est le joueur B qui gagne, et pour les lancer « FFFFFP » c'est le joueur A qui gagne.
Ce jeu se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

Deuxième méthode : utiliser la fonction de répartition de X et le théorème de continuité monotone. On suppose qu'on a calculé $\mathbb{P}(X \leq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On remarque alors que la suite d'évènements $\big([X \leq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n)$$

or $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [X \leq n] = [X < +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}(X < +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq n) \qquad (3)$$

Une formule semblable est obtenue en remarquant alors que la suite d'évènements $\big([X \geq n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion et donc, d'après le théorème de continuité monotone :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X \geq n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

or $\bigcap_{n=0}^{+\infty} [X \geq n] = [X = +\infty]$ donc :

$$\mathbb{P}(X = +\infty) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \geq n) \qquad (4)$$

En fait les formule (1), (2), (3) et (4) sont les mêmes, mais nous ne rentrons pas dans le détail par souci de concision…

***Exemple* :** On considère une urne de N boules, composée d'une boule noire et de $N-1$ blanches. On effectue des tirages successifs d'une boule avec remise. On arrête les tirages

dès qu'on a obtenu une boule noire.
Cette expérience se termine presque sûrement en un nombre fini de tours.

Abus de notation : Lorsque $\mathbb{P}(X < +\infty) = 0$, on considèrera que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$.

Exemple **:** Nous allons construire un exemple d'expérience qui peut durer indéfiniment avec une probabilité strictement positive.
On considère une urne contenant initialement une seule boule, celle-ci étant de couleur noire.
On ajoute ensuite une boule blanche, et on tire une boule. Si elle est noire on arrête, sinon on continue selon le processus suivant :
• *avant le k-ième tirage, on remet la boule blanche tirée dans l'urne, on ajoute encore k boules blanches supplémentaires, et on tire alors une nouvelle boule.*
Les tirages ne s'arrêtent que lorsqu'on a obtenu une boule noire.
On note X le nombre de tirages effectués. On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.
Au moment d'effectuer le k-ième tirage, l'urne contient $S_k = 1+2+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$ boules blanches ; cette formule étant aussi vraie pour $k = 1$.
On a donc $\mathbb{P}(X \geq n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{S_k}{S_k+1}$.
Et donc $\mathbb{P}(X = +\infty) = \exp\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)\right]$.
On a $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$ puisque la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 - \frac{2}{n^2+n+2}\right)$ est convergente.

1.3 Fonction de répartition d'une VARD

Théorème 9 Loi d'une VARD et point de discontinuité de sa fonction de répartition
Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, on a : $F_X(t_0^-) = \displaystyle\lim_{x\to t_0^-} F_X(x) = \mathbb{P}(X < t_0) = F_X(t_0) - \mathbb{P}(X = t_0)$. Et donc :

$$F_x \text{ est continue en } t_0 \iff \mathbb{P}(X = t_0) = 0$$

En particulier si $t_0 \notin X(\Omega)$, alors F_X est continue en t_0. Les points de discontinuité de F_x sont donc inclus dans $X(\Omega)$.

Abus de notation : En supprimant de $X(\Omega)$ les valeurs prises avec probabilité 0, on peut même considérer que $X(\Omega)$ est exactement égal à l'ensemble des points de discontinuité de F_X.

Démonstration : On considère la suite d'évènement $\left(\left[X \leq t_0 - \dfrac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

CQFD □

Corollaire 10 La fonction de répartition caractérise la loi
Si X est une VARD telle que $\mathbb{P}(X<+\infty)=1$, alors $X(\Omega)$ = ensemble des points de discontinuité de F_X et :

$$\forall t\in X(\Omega),\quad \mathbb{P}(X=t)=F_X(t)-F_x(t^-)=\text{ saut de discontinuité de } F_X \text{ au point } t$$

Ce résultat est fondamental : il indique que pour définir la loi d'une VARD il suffit de donner sa fonction de répartition.

Théorème 11 Calcul de la fonction de répartition d'une VARD
La fonction de répartition d'une VARD X est constante par morceaux.

1. Cas d'une VARD finie : $X(\Omega)=\{x_1,\dots,x_n\}$ avec $x_1<x_2<\cdots<x_n$. Alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_x(t)=\sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ \text{tq } x_k\le t}}\mathbb{P}(X=x_k)=\begin{cases}0 & \text{si } t<x_1\\ \mathbb{P}(X=x_1) & \text{si } x_1\le t<x_2\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2) & \text{si } x_2\le t<x_3\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2)+\mathbb{P}(X=x_3) & \text{si } x_3\le t<x_4\\ \vdots & \vdots\\ \mathbb{P}(X=x_1)+\cdots+\mathbb{P}(X=x_{n-1}) & \text{si } x_{n-1}\le t<x_n\\ 1 & \text{si } x_n\le t\end{cases}$$

2. Cas d'une VARD infinie : $X(\Omega)=\{x_n/\ n\in\mathbb{N}\}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante. Alors :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ F_x(t)=\sum_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ \text{tq } x_k\le t}}\mathbb{P}(X=x_k)=\begin{cases}0 & \text{si } t<x_0\\ \vdots & \vdots\\ \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=x_i) & \text{si } x_k\le t<x_{k+1} \text{pour un } k\in\mathbb{N}\\ \vdots & \vdots\end{cases}$$

On peut retenir que $[X\le x_k]=\bigcup_{i=1}^{k}[X=x_i]$ et donc :

$$F_x(x_k)=\mathbb{P}(X\le x_k)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{P}(X=x_i)=\mathbb{P}(X=x_1)+\mathbb{P}(X=x_2)+\cdots+\mathbb{P}(X=x_k)$$

Cas particulier où $X(\Omega)\subseteq\mathbb{N}$: Dans ce cas on utilise les formules suivantes (à savoir redémontrer), valables pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X\le k)-\mathbb{P}(X\le k-1)=\mathbb{P}(X\ge k)-\mathbb{P}(X\ge k+1)$$

et :

$$\mathbb{P}(X\le k)=\sum_{j=0}^{k}\mathbb{P}(X=j)\qquad\text{et}\qquad \mathbb{P}(X\ge k)=\sum_{j=k}^{n}\mathbb{P}(X=j)$$

***Exemple* :** Dans une urne de n boules numérotées, on effectue des tirages d'une boule avec remise.

On note X = nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro strictement supérieur au précédent, avec la convention que $X = +\infty$ si ceci ne se produit jamais.
Donner la loi de X.

1.4 Transfert de loi

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On considère une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et une fonction $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y = f \circ X$ est aussi une VARD sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y = f(X)$.

Connaissant la loi de X et l'expression de la fonction f, nous souhaiterions déterminer la loi de la VARD $Y = f(X)$: c'est ce qu'on appelle un **transfert de loi** (la loi de X est transférée par la fonction f).

Valeurs prises par Y : • Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n /\ n \in \mathbb{N}\}$, alors $Y(\Omega) = \big\{f(x_n) \big/ n \in \mathbb{N}\big\}$. On peut aussi noter $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \dots < y_p$, ou $Y(\Omega) = \{y_n /\ n \in \mathbb{N}\}$, selon les cas (nombre fini ou dénombrable de valeurs).

Exemple **:** $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y = 2X$ donne $Y(\Omega) = \{2n /\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemple **:** $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$ donne $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

On peut maintenant s'intéresser à la loi de Y. Pour cela il est important de comprendre le point suivant : si on prend $y \in Y(\Omega)$ une valeur prise par la VARD Y, alors, par définition, y a un antécédent par f dans $X(\Omega)$: $\exists x \in X(\Omega)$ tel que $y = f(x)$. Et comme f est en général non injective, il y a plusieurs valeurs de x possibles, voire même une infinité !

Exemple **:** Sur l'exemple précédent, 1 a une infinité d'antécédents : tous les entiers impairs.

Théorème 12 Formule de transfert de loi
La loi de $Y = f(X)$ est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On somme sur tous les antécédents de y.

Exemple **:** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^k}$, et si $Y = 2X$, alors $Y(\Omega) = \{2k / k \in \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = 2k) = \frac{1}{2^k}$$

Exemple **:** Si X est une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2^k}$, et si $Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ entier pair} \\ 1 & \text{si } X \text{ entier impair} \end{cases}$, alors $Y(\Omega) = \{0,1\}$ et :

k	0	1
$\mathbb{P}(Y=k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

2 Espérance mathématique d'une VARD

2.1 Espérance mathématique d'une VARD

Définition 13 Espérance mathématique d'une VARD

1. Si X est une VARD finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \times \mathbb{P}(X = x_k)$$
2. Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$, alors on dit que $\mathbb{E}(X)$ existe lorsque la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$$
Si X est une VARD infinie telle que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, on dit que $\mathbb{E}(X)$ n'existe pas.

Pour une VARD infinie, il faut donc montrer que l'espérance existe avant de la calculer. Pour cela, on doit vérifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument, ce qui assure que sa somme ne dépendent de l'ordre des termes. On doit donc montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \times \mathbb{P}(X = x_n)$ converge, puis calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$. Dans la majorité des cas, la VARD X sera à valeurs positives, et le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \times \mathbb{P}(X = x_n)$ prouvera la convergence de la série et, comme elle est à termes positifs, le calcul prouvera en fait la convergence absolue de la série et donc l'existence de l'espérance de X.

Remarquons que la définition impose que : $\mathbb{E}(X)$ existe $\Longrightarrow \mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

On a la formule « universelle » suivante, valable si X est une VARD finie ou infinie :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \times \mathbb{P}(X = x)$$

***Exemple* :** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = 2$.

***Exemple* :** Soit X une VARD telle que : $X(\Omega) = \left\{2^n \middle/ n \in \mathbb{N}\right\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = 2^n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X n'admet pas d'espérance.

On reprend les notations du paragraphe sur le transfert de loi :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f \circ X"'] & \end{tikzcd}$$

On a vu que la loi de la VARD $Y = f(X)$ se calcule par la formule :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)$$

On veut cette fois calculer son espérance (si elle existe). Sous réserve de convergence absolue de la série :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \times \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \left[y \times \left(\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tq } f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \right) \right]$$

On peut voir que le calcul est compliqué. On va donc essayer d'avoir une formule simple, donnant $\mathbb{E}(Y)$ connaissant la loi de X, et **sans avoir à calculer la loi de Y.**

Théorème 14 Théorème de transfert
Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \to \mathbb{R}$ telle que $X(\Omega) \subseteq \mathscr{D}_f$.

1. <u>Cas d'une VARD finie</u> : Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors $Y = f(X)$ est aussi une VARD finie, donc admet une espérance, et

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

2. <u>Cas d'une VARD infinie</u> : Si $X(\Omega) = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge absolument} \\ &\Longleftrightarrow \quad \sum_{n \geq 0} \big|f(x_n)\big| \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge} \end{aligned}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

On a l'énoncé « universel » suivant :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) \text{ existe} \Longleftrightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x) \text{ converge absolument}$$

et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x) \times \mathbb{P}(X = x)$$

Exemple **:** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et telle que : $\forall n \geq 1, \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{3}{4^n}$.
Alors $\mathbb{E}\big(2^X\big)$ existe et $\mathbb{E}\big(2^X\big) = 3$.

Corollaire 15 Linéarité de l'espérance (version 1)
Soit X une VARD telle que $\mathbb{E}(X)$ existe. Alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX + b)$ existe et :

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

En particulier si $a = 0$, on a pour tout $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{E}(b) = b$. Et donc pour $b = \mathbb{E}(X)$, on obtient $\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X)\big) = \mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{E}\big(X - \mathbb{E}(X)\big) = 0$.

Définition 16 VARD centrée

1. On appelle VARD centrée une VARD X, admettant une espérance, et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$.
2. Si X est une VARD admettant une espérance, on appelle VARD centrée associée à X la VARD $Y = X - \mathbb{E}(X)$.

2.2 Moments d'une VARD

Définition 17 Moments d'une VARD
Soient X une VARD et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque $\mathbb{E}\big(X^r\big)$ existe.
Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big)$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'espérance de X.

Si X est une VARD **finie** telle que $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors X **admet des moments de tout ordre** et d'après le théorème de transfert :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r \times \mathbb{P}(X = x_k)$$

Si X est une VARD infinie telle que $X(\Omega) = \{x_n / \, n \in \mathbb{N}\}$, le théorème de transfert donne que :

$$\mathbb{E}\big(X^r\big) \text{ existe} \iff \sum_{n\geq 0} |x_n|^r \times \mathbb{P}(X = x_n) \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r \times \mathbb{P}(X = x_n)$$

Ainsi pour calculer les moments d'une VARD X, il suffit de connaître la loi de X. Il n'est pas nécessaire de déterminer la loi des VARD X^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Théorème 18 Existence de moments d'ordre inférieur
Soit X une VARD qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Alors X admet des moments à tout ordre $s \in [\![0, r]\!]$.

Démonstration : Seul le cas d'une VARD infinie pose problème. Pour $s \in [\![0, r]\!]$, il suffit d'utiliser l'inégalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x|^s \leq \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ |x|^r & \text{si } |x| > 1 \end{cases} \leq 1 + |x|^r$$

CQFD □

Théorème 19 Existence du moment centré d'ordre r
Si X est une VARD qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, alors la VARD centrée $X - \mathbb{E}(X)$ admet elle-aussi un moment d'ordre r égal à $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$.

Démonstration : Utiliser la formule du binôme pour montrer que :

$$\forall (x, b) \in \mathbb{R}^2, \quad |x - b|^r \leq \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} |b|^{r-k} |x|^k$$

CQFD □

Définition 20 Moment centré d'ordre r d'une VARD
Si X est une VARD admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, on appelle moment centré d'ordre r le réel :

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$$

2.3 Variance d'une VARD

Définition 21 Variance d'une VARD
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\text{Var}(X)$, son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$$

Donc $V(X)$ existe si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe.

Si X est une VARD finie, X admet une variance.

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 22 Règles de calcul de la variance
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2.

1. $V(X) \geq 0$;
2. $V(X) = 0 \iff X$ est presque sûrement constante.
   Dans ce cas : $X = \mathbb{E}(X)$ p.s..
3. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

Théorème 23 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire…
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VARD.

Exemple **:** Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$.
Alors X admet une variance et $V(X) = 2$.

Définition 24 Écart-type d'une VARD
Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 25 VARD centrée réduite Soit X une VARD admettant un moment d'ordre 2, non presque sûrement constante.

1. On dit que X est une VARD centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VARD centrée réduite associée à X la VARD : $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est une VARD centrée réduite.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VARD définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi géométrique

Définition 26 VARD de loi géométrique
On dit que X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} = pq^{k-1} \qquad \text{où} \quad q = 1-p$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

X est donc une VARD infinie.

Dans certains cas, on considère une variante : la loi géométrique décalée sur $\mathbb{N}$, notée $\mathscr{G}_0(p)$. On dit que $Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p)$ lorsque $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

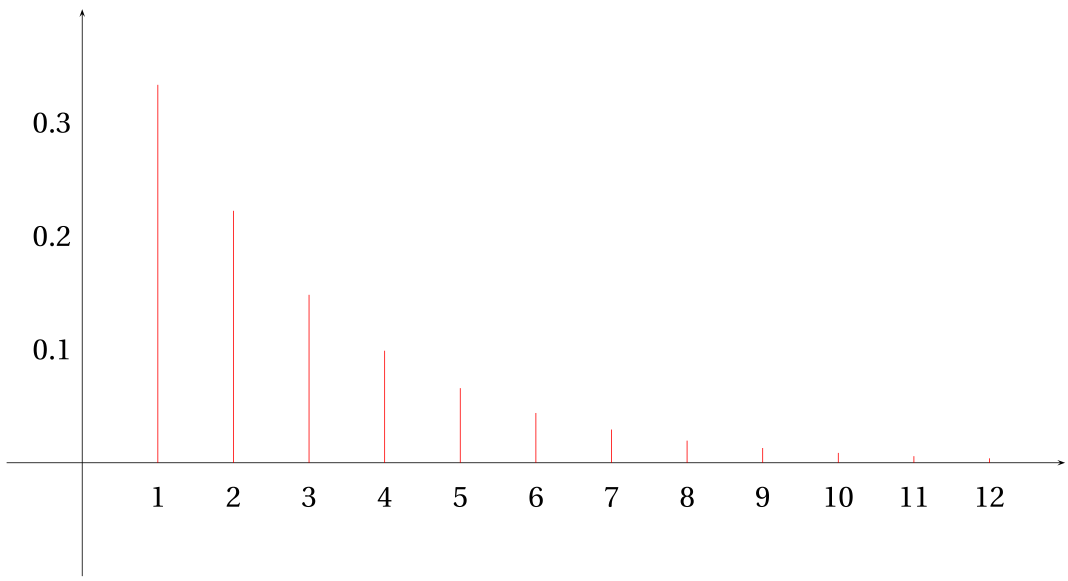
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = pq^k$$

Ces deux lois sont reliées de la façon suivante.

Proposition 27 Lien entre loi géométrique et loi géométrique décalée
Soi Y une VARD et $X = Y + 1$. Alors :

$$Y \hookrightarrow \mathscr{G}_0(p) \iff X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$$

Pour $\mathscr{G}\left(\frac{1}{3}\right)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 28 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice 1 Que dire des moments de la loi $\mathscr{G}_0(p)$?

On utilise aussi souvent la fonction de répartition d'une loi géométrique.

Théorème 29 Fonction de répartition d'une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$

1. Soit X une VARD de loi $\mathscr{G}(p)$. Alors :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X \geq k) = q^{k-1}$$
2. Réciproquement, si X est une VARD telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - q^k$$
alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, où $q = 1 - p$.

Modélisation : On considère une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles : succès avec probabilité p ou échec avec probabilité $q = 1 - p$.
On effectue une infinité de répétitions indépendantes de cette même expérience.
On note X = Rang du premier succès obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

⚠ Plus généralement, on peut fixer $n \in \mathbb{N}^*$, et considérer X_n = Rang du n-ième succès. Pour $n = 1$, $X_1 \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, et pour $n \geq 2$, X_n suit une loi appelée loi binomiale négative... mais ce n'est pas au programme !

***Exemple* :** On dispose d'une pièce de monnaie truquée, de telle sorte qu'elle donne Pile avec probabilité $p \in]0,1[$.
On la lance une infinité de fois cette pièce, de manières indépendantes.
On note X = Rang du premier Pile obtenu.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.

Terminons par une autre propriété de modélisation des lois géométriques.

Théorème 30 Absence de mémoire de la loi géométrique
Si $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, alors :
$$\forall (s,t) \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$$

Réciproquement, si X est une VARD telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et qui vérifie la propriété d'absence de mémoire, alors X est suit une loi géométrique de paramètre $p = \mathbb{P}(X = 1)$ (mais ce n'est pas au programme).

On peut retenir que la loi géométrique est la loi d'attente du premier succès dans un processus sans mémoire.

3.2 Loi de Poisson

La loi de Poisson est la « loi des évènements rares » :
• Nombre de clients dans une file d'attente ;
• Nombre de particules rayonnées par un élément radioactif sur une période ;
• Nombre de soldats tués par des coups de pieds de chevaux dans l'armée prussienne entre 1875 et 1894.

Elle a été introduite par Siméon Denis Poisson en 1837 pour modéliser les erreurs de jugements dans un procès.

La modélisation est hors-programme : l'énoncé précisera toujours quelles sont les VARD qui suivent une loi de Poisson.

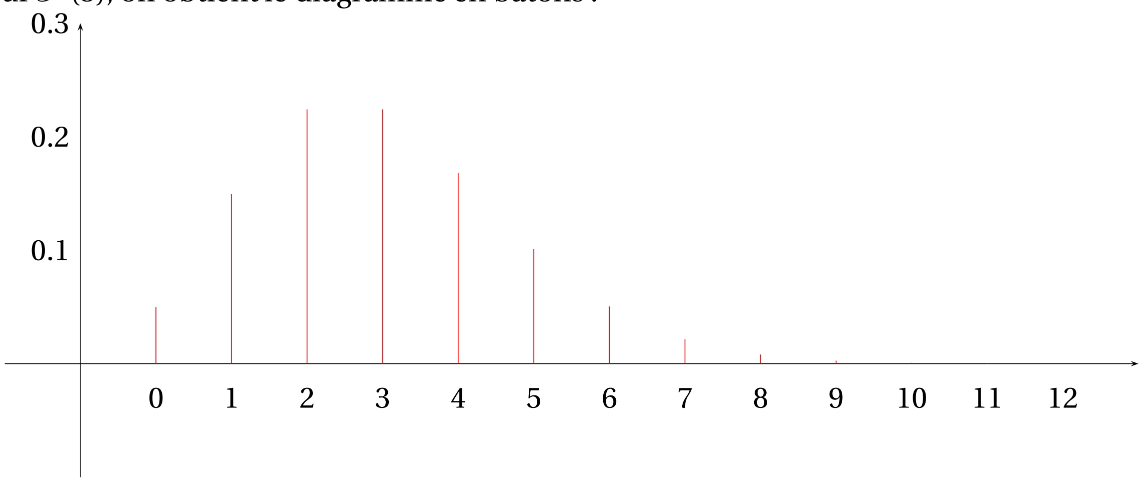
Définition 31 VARD de loi de Poisson
On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

X est donc une VARD infinie.

Pour $\mathscr{P}(3)$, on obtient le diagramme en bâtons :



Théorème 32 Espérance et variance d'une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$
Soit X une VARD de loi $\mathscr{P}(\lambda)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$$

4 Exercices

Exercice 2 (Lois usuelles) Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. Un employé de télémarketing appelle des clients pour leur vendre un volet roulant électrique. La probabilité qu'un client achète un volet est de $\frac{1}{100}$, et on suppose que sa liste de client est infinie.
   X = nombre de clients qu'elle doit appeler pour vendre le premier volet.
2. Chaque jour le cours d'une action monte avec probabilité $\frac{1}{3}$.
   X = nombre de jours consécutifs avant d'oberserver la première baisse.
3. Un concierge dispose d'un trousseau de n clefs, et ne sait plus laquelle ouvre sa porte. Il les essaie une par une en mettant de côté celles qui n'ouvrent pas la porte.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.
4. Le même concierge rentre chez lui après une soirée un peu trop alcoolisée. Cette fois il ne met plus de côté les clefs déjà essayées.
   X = nombre d'essais avant d'ouvrir la porte.

Exercice 3 (Rupture de stock)

Un commerçant estime que la demande d'un certain produit saisonnier est une vard X de loi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

où $p > 0$ est le prix d'une campagne publicitaire de l'année précédente.

1. Vérifier que X suit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer l'espérance et la variance de X (si elles existent).
3. Connaissant son stock s, déterminer la probabilité de rupture de stock.

Exercice 4 (n-ième succès lors de tirages avec remise : loi binômiale négative) On effectue des lancers indépendants d'un dé cubique non équilibré. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé on note X_n le temps d'attente du $n^{\text{ème}}$ as. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance (si elles existent).

Exercice 5 (Une formule de calcul de l'espérance d'une VARD) Soit X une vard vérifiant : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\mathbb{P}(X > n)$.
2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant n\mathbb{P}(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$.
   (b) En déduire que la série de terme général $\mathbb{P}(X > n)$ converge et que sa somme vaut $\mathbb{E}(X)$.
3. Réciproquement : on suppose que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge. Montrer qu'alors la série $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} k\mathbb{P}(X = k)$ converge et que X admet une espérance.
4. Énoncer le théorème ainsi établi.

5. On effectue des tirages d'une boule avec remise dans une urne de n boules numérotées. On arrête les tirages lorsque le numéro de la boule tirée est supérieur ou égal au numéro de la boule obtenue au précédent tirage. On note X le nombre de tirages effectués.
   (a) Déterminer $X(\Omega)$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$.
2. Soit $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. On note Y la variable aléatoire égale à 0 si X est paire et 1 sinon. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice 7 (Loi de Poisson composée) Un élément chimique émet des électrons pendant une période T. Le nombre d'électrons émis est une variable aléatoire Y qui suit une loi de POISSON de paramètre λ. Chaque électron a une probabilité p d'avoir un effet biologique (on dira qu'il est efficace). Soit Z la variable aléatoire égale au nombre d'électrons efficaces émis pendant une période T.

1. Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}([Y = i] \cap [Z = j])$.
2. Déterminez la loi de Z. Calculez son espérance.

Exercice 8 (Calcul d'espérance par analyse à un pas) On reprend l'exemple de la ruine du joueur.
Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du casino de est b, avec $b \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$.
On note X_a la variable aléatoire égale au nombre de tours de jeu avant que le joueur ou le casino soit ruiné, lors d'une partie où le joueur commence avec une fortune initiale de a euros.
Si ceci ne se produit jamais, on pose $X_a = -1$. On rappelle qu'on a démontré que $\mathbb{P}(X_a = -1)$ (et que c'est le toujours le joueur qui est ruiné si $p \le q$).
On admet que X_a admet une espérance qu'on note $\mathbb{E}(X_a)$. On a $\mathbb{E}(X_0) = \mathbb{E}(X_{a+b}) = 0$.

1. Pour $j \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, a+b-1]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_k = j) = q\mathbb{P}(X_{k-1} = j-1) + p\mathbb{P}(X_{k+1} = j-1)$$

   En déduire que $\mathbb{E}(X_k) = 1 + q\mathbb{E}(X_{k-1}) + p\mathbb{E}(X_{k+1})$.
2. Pour $p = q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel α tel que la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ ait une espérance qui vérifie :

$$\forall k \ge 1, \quad \mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k-1})$$

   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = ab$. Calculer $\lim_{b \to +\infty} \mathbb{E}(X_a)$. Interprétation ?

3. Pour $p \neq q$.
   (a) Montrer l'existence d'un réel β tel que la variable $Z_k = X_k + \beta k$ ait une espérance qui vérifie :
   $$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{E}(Z_k) = p\mathbb{E}(Z_{k+1}) + q\mathbb{E}(Z_{k-1})$$
   (b) En utilisant la partie I montrer que $\mathbb{E}(X_a) = \dfrac{1}{p-q}\left(\dfrac{(a+b)(x^a-1)}{x^{a+b}-1} - a\right)$.
   (c) Quelle est la limite de $\mathbb{E}(X_a)$ lorsque $b \to +\infty$ dans le cas $p < q$?

Exercice 9 (Modèle de Galton-Watson)

Soit $p \in]0,1[$.
On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p, ou à aucun descendant avec la probabilité $1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de descendants issus de la $n^{\text{ème}}$ génération, c'est-à-dire le nombre de descendants de notre plante à la $(n+1)^{\text{ème}}$ génération.
On note aussi f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = px^2 + (1-p)$.
a) Montrer que f est strictement croissante sur $[0,1]$.
b) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1-p$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$
Montrer qu'elle est bien défnie, puis étudier sa monotonie et sa convergence.
c) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une relation entre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 0)$.
d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 10 (Fonction génératrice d'une VARD)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Justifier que pour tout $t \in [-1,1]$ la VARD t^X admet une espérance.
   On définit dans la suite une fonction $G_x : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $G_X(t) = \mathbb{E}\big(t^X\big)$.
2. Etablir que :
   $$\forall t \in [-1,1], \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathbb{P}(X = n)$$
3. Donner l'expression de $G_X(t)$ lorsque $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$ et $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.
4. On suppose dans cette question que X admet une espérance.
   (a) Déterminer, pour tout $t \in [0,1[$, une expression de $\dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$.
   (b) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ est croissante et bornée sur $[0,1[$.
   (c) En déduire que G_x est dérivable en 1.
5. On suppose dans cette question que G_x est dérivable en 1.
   (a) Montrer que :
   $$\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \left[\mathbb{P}(X = k) \sum_{i=0}^{k-1} t^i\right] \leq \frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \leq G'_X(1)$$
   puis que X admet une espérance.

6. Montrer enfin que X admet une espérance si et seulement si G_x est dérivable en 1 et que :

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$