Chapitre 15

Continuité des fonctions numériques

1 Continuité d'une fonction numérique

1.1 Continuité en un point

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

Définition 1 Continuité en un point
Soit x_0 un point intérieur à I (ie x_0 n'est pas une borne de I).
On dit que f est continue en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \left| f(x) - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue en x_0.

Petit rappel : on a vu au chapitre sur les limites de fonctions, que si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie, alors elle ne peut être égale qu'à $f(x_0)$. On pourrait donc dire que f est continue en x_0 si, et seulement si, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe et est finie.

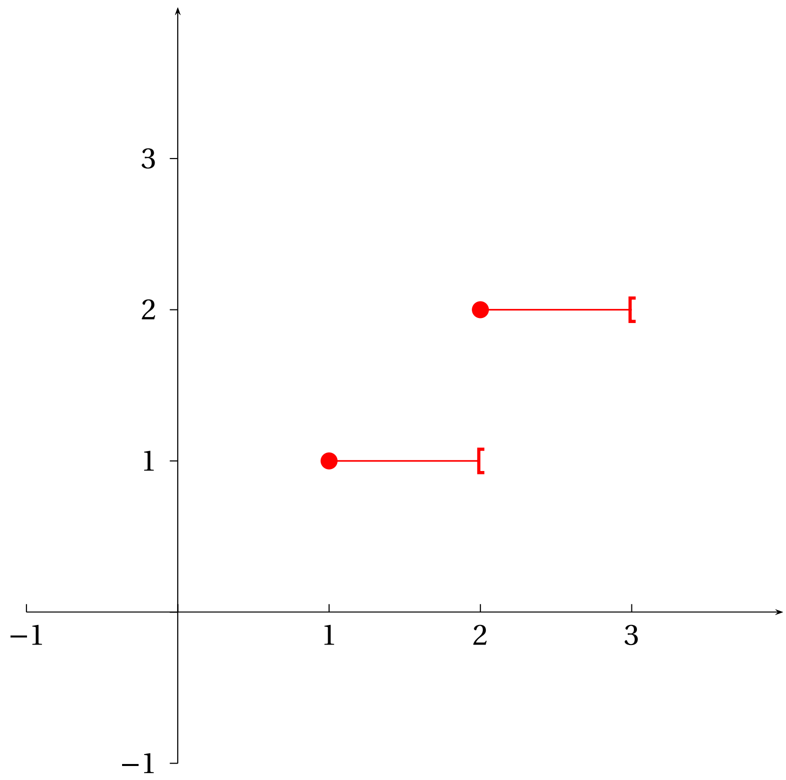
Le changement de variable $x = x_0 + h$ permet de remplacer $\lim_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, par $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$. f continue en x_0 signifie donc que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \ \forall h \in]-\delta, \delta[, \left| f(x_0 + h) - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

1.2 Continuité à droite ou à gauche en un point

Définition 2 Continuité à droite un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de gauche de I.
On dit que f est continue à droite en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^+) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à droite en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en 2.



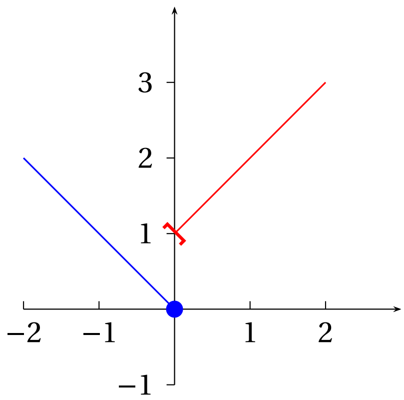
Définition 3 Continuité à gauche un point
Soit x_0 un point intérieur à I, ou la borne de droite de I.
On dit que f est continue à gauche en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \overset{\text{existe}}{=} f(x_0)$, ce qui se note aussi $f(x_0^-) = f(x_0)$.
Dans le cas contraire, on dit que f est discontinue à gauche en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est discontinue à gauche en 2.

Théorème 4 Lien entre continuité, continuité à gauche et à droite
Soit x_0 un point intérieur à I. Alors :

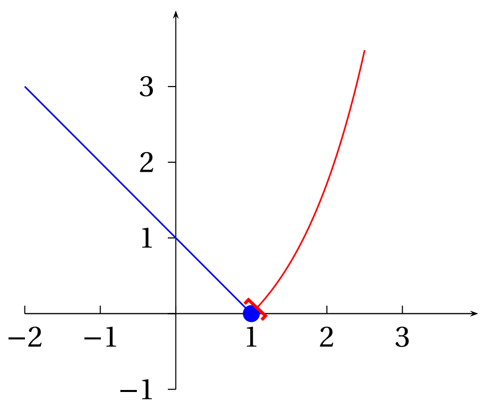
$$f \text{ est continue en } x_0 \iff f \text{ est continue à gauche et à droite en } x_0$$

Exemple **:** $f(x) = \begin{cases} -x \text{ si } x \leq 0 \\ x+1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



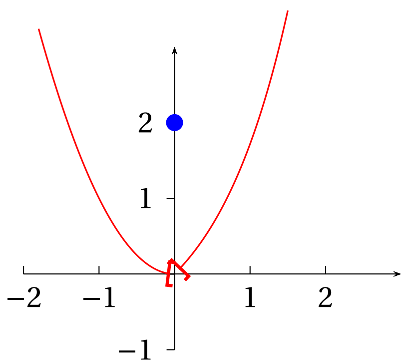
Sur cette exemple : $f(0^-) = 0$, $f(0^+) = 1$ et $f(0) = 0$. Donc f est continue à gauche en 0, mais discontinue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

***Exemple* :** $f(x) = \begin{cases} 1 - x \text{ si } x < 1 \\ e^{x-1} - 1 \text{ si } x \geq 1 \end{cases} \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$



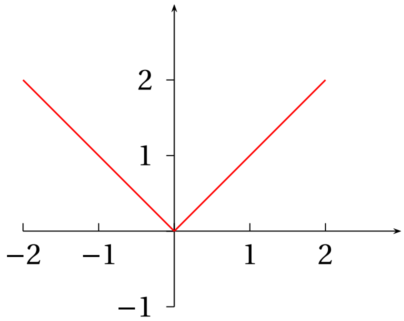
Sur cette exemple : $f(1^-) = f(1^+) = f(1) = 0$. f est donc continue en 1, puisqu'elle est continue à gauche $\boxed{\text{et}}$ à droite en ce point.

***Exemple* :** $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 0 \\ 2 \text{ si } x = 0 \\ e^x - 1 \text{ si } x > 0 \end{cases} \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R}$

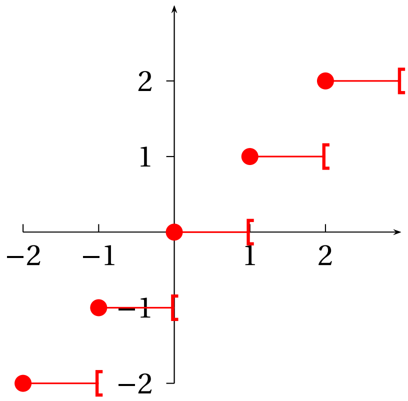


Sur cette exemple : $f(0^-) = f(0^+) = 0$ et $f(0) = 2$. Donc f n'est ni continue à gauche, ni continue à droite en 0. À fortiori, elle n'est pas continue en 0.

***Exemple* :** $x \longmapsto |x|$ est continue en 0.



***Exemple* :** Si $x_0 \notin \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est continue en x_0.
Si $x_0 \in \mathbb{Z}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, est continue à droite en x_0 mais est discontinue à gauche en x_0.



1.3 Continuité sur un intervalle - Prolongement par continuité

Définition 5 Continuité sur un intervalle
On note a et b les bornes de I, avec $a < b$.
On dit que f est continue sur I lorsque :
- f est continue en tout point intérieur de I ;
- si $a \in I$, f est continue à droite en a ;
- si $b \in I$, f est continue à gauche en b.

***Exemple* :** f continue sur $[0, +\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$, et que f est continue à droite en 0.
f continue sur $]0, +\infty[$ signifie que f est continue en tout $x_0 > 0$.
f continue sur $]1, 2]$ signifie que f est continue en tout $x_0 \in]1, 2[$, et que f est continue à gauche en 2.

Définition 6 Continuité sur une union d'intervalles
On se donne une famille d'intervalles $(I_j)_{j \in J}$ (indexée par un ensemble J fini ou infini).
On dit que f est continue sur $A = \bigcup_{j \in J} I_j$ lorsque, pour tout $j \in J$, f est continue sur I_j.

***Exemple* :** f continue sur $\mathbb{R}^*$ signifie que f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, donc que f est continue en tout $x_0 < 0$ et en tout $x_0 > 0$.

Proposition 7 Stabilité de la continuité pour l'union
Si f est continue sur deux parties A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $A_1 \cup A_2$.
Plus généralement, si f est continue sur une famille $(A_j)_{j \in J}$ de parties de $\mathbb{R}$, alors elle est continue sur $\bigcup_{j \in J} A_j$.

Le résultat suivant permet de prolonger une fonction en un point, de telle sorte que la fonction soit continue en ce point.

Théorème 8 Prolongement par continuité
Soit x_0 un point d'un intervalle I, et f une fonction définie et continue sur $I \backslash \{x_0\}$.
On suppose aussi que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \mathbb{R}$.
On définit alors une fonction $\widetilde{f} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \quad \widetilde{f}(x) = \begin{cases} \ell & \text{si } x = x_0 \\ f(x) & \text{si } x \neq x_0 \end{cases}$$

La fonction $\widetilde{f}$ est alors un prolongement à I de f, et ce prolongement est continue sur I.

En pratique la fonction $\widetilde{f}$ est encore notée f, pour ne pas alourdir les notations.

Si la fonction f est continue sur $I \backslash \{x_0\}$, alors sont prolongement par continuité en x_0 est continue sur I tout entier.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. On peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$.
La fonction f devient alors continue sur $\mathbb{R}$. Elle est définie par morceaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f() = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1.4 Continuité des fonctions usuelles

• Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont continues sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction tan est continue sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \middle/ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

• La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et la fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque).

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 9 Prolongement de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Pour $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est prolongeable en 0 en une fonction continue, en posant $0^\alpha = 0$ si $\alpha > 0$ et $0^0 = 1$.
Pour $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ n'est prolongeable par continuité en 0.

Exemple **:** $x \longmapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$, et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de continuité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$.
Par exemple $x \longmapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

1.5 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues

Théorème 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions continues
Soient f une fonction continue sur A et g continue sur B.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $\lambda.f + \mu.g$ et $f \times g$ sont continues sur $A \cap B$.
2. Si g ne s'annule pas sur B, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue sur B et $\dfrac{f}{g}$ est continue sur $A \cap B$.
3. Si $f(A) \subseteq B$ alors $g \circ f$ est définie et continue sur A.

En pratique, pour démontrer simplement qu'une fonction est continue, on utilise la continuité des fonctions usuelles et le théorème précédent.

Exemple **:** La fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln(1 + x^2)}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2 Continuité sur un intervalle

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction continue sur un intervalle I.

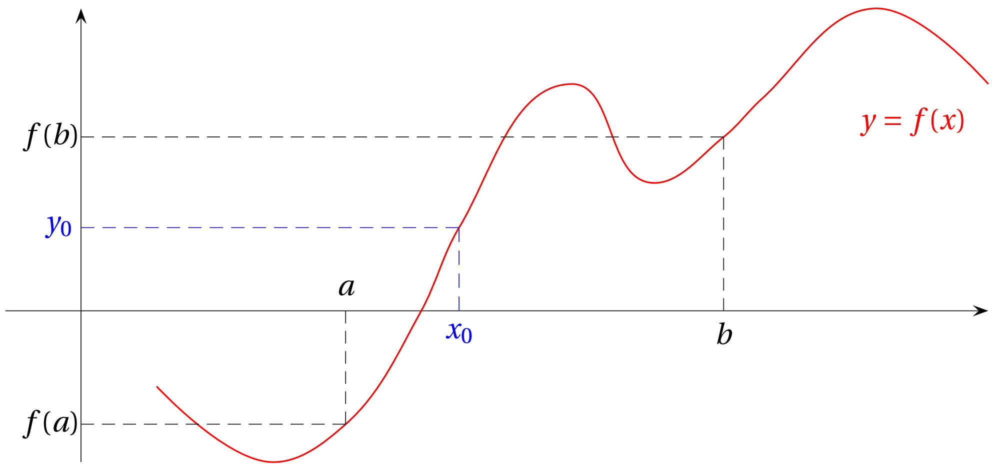
2.1 Théorème des valeurs intermédiaire

Théorème 11 Théorème des valeurs intermédiaires
Si f est continue sue l'intervalle $[a, b]$, alors f prend toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$:

$$\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \quad \exists x_0 \in [a, b] / f(x_0) = y_0$$

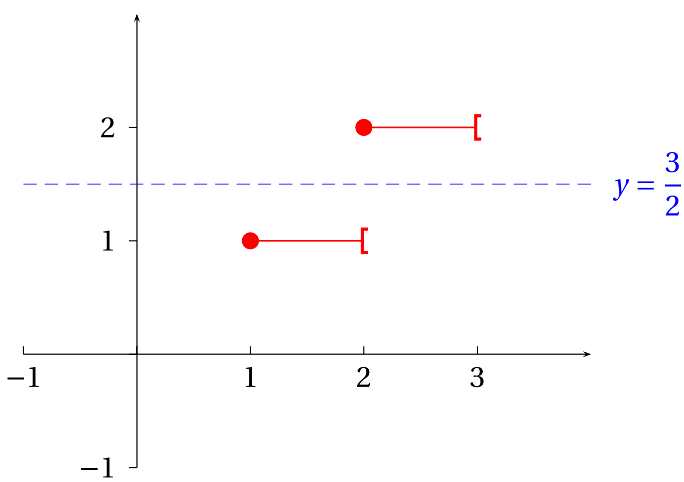
ce qui peut aussi s'écrire plus simplement :

$$[f(a), f(b)] \subseteq f\big([a, b]\big)$$



⚠ ATTENTION : dans la notation $[f(a), f(b)]$, on ne sous-entend pas que $f(a) \leq f(b)$, on peut très bien avoir $f(a) > f(b)$.

⚠ ATTENTION ! Ce résultat est faux si f n'est pas continue.
Par exemple pour $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, on a $\frac{3}{2} \in \big[f(1), f(2)\big] = [1, 2]$, mais $\forall x \in [1, 2]$, $f(x) \neq \frac{3}{2}$.



<u>**Démonstration**</u> **:** On fixe $y_0 \in [f(a), f(b)]$. On cherche $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.

• **Simplification du problème.** En posant $g(x) = f(x) - y_0$, on est ramené à chercher $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

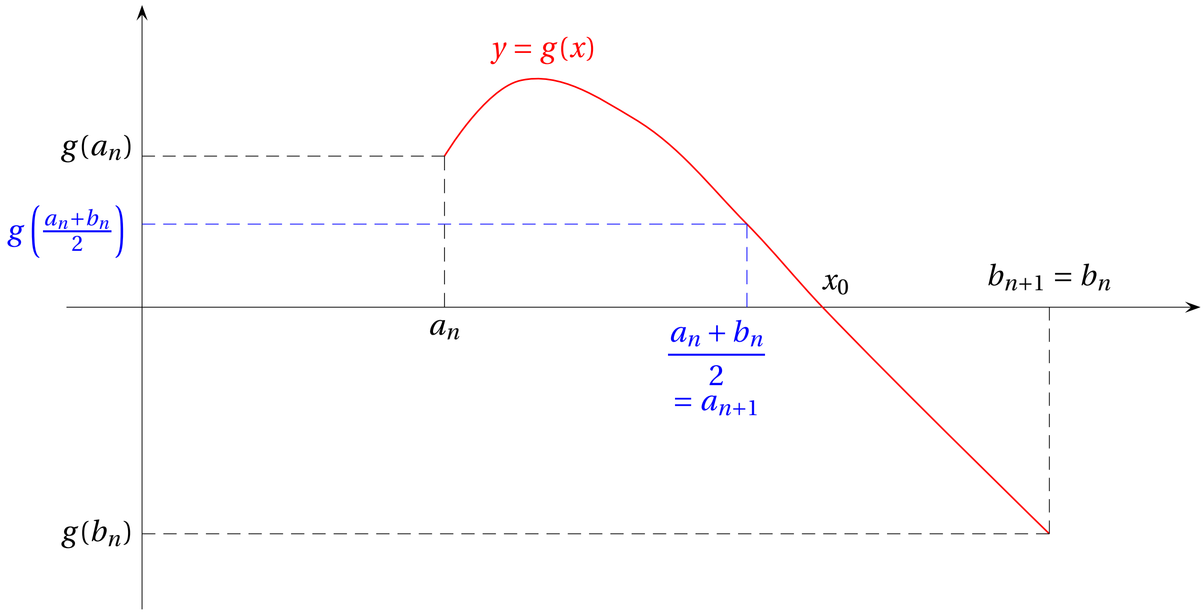
On a $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$, donc $g(a) \leq 0 \leq g(b)$ ou $g(b) \leq 0 \leq g(a)$.

Quitte à remplacer g par $-g$ on peut supposer que $g(b) \leq 0 \leq g(a)$, et le problème est toujours de trouver $x_0 \in [a,b]$ tel que $g(x_0) = 0$.

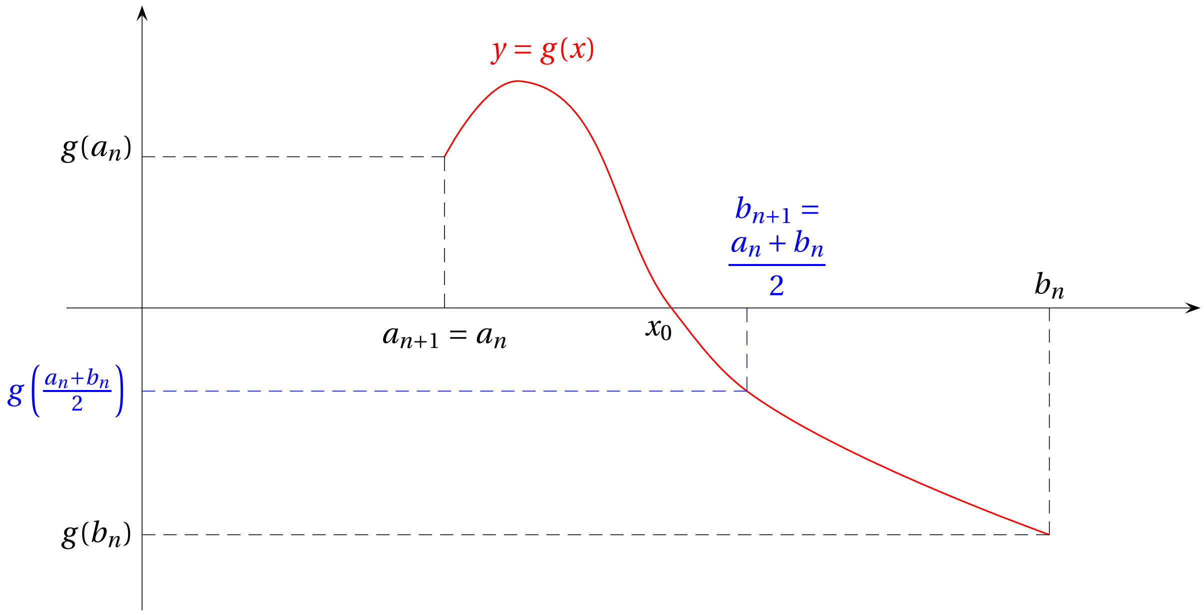
• **Définition de deux suites adjacentes par dichotomie.** On définit deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et :

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ a_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

On peut visualiser cette construction dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \geq 0$:



Et dans le cas où $g\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) < 0$:



On vérifie alors par récurrence qu'elles ont les propriétés suivantes :
(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ;
(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$;
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(b_n) \leq 0 \leq g(a_n)$.

Ceci montre en particulier que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Notons x_0 leur limite commune.

• **Conclusion.** Il reste à vérifier que $x_0 \in [a,b]$ et que $g(x_0) = 0$.

CQFD □

Corollaire 12 Image d'un intervalle par une fonction continue
Si I est un intervalle et si f est continue sur I alors $J = f(I)$ est aussi un intervalle.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si f n'est pas continue. Par exemple si $f : x \longmapsto \lfloor x \rfloor$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ n'est pas un intervalle.

⚠ ATTENTION ! La **nature** de l'intervalle (ie le caractère ouvert/fermé/borné...) n'est pas conservée. Par exemple cos est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) et $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$ (intervalle fermé borné).

Corollaire 13 Signe d'une fonction continue sur un intervalle
Soit f continue sur un intervalle I.
• Si f ne s'annule pas sur I, alors f est de signe constant au sens strict sur I :

$$\forall x \in I,\ f(x) > 0 \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in I,\ f(x) < 0$$

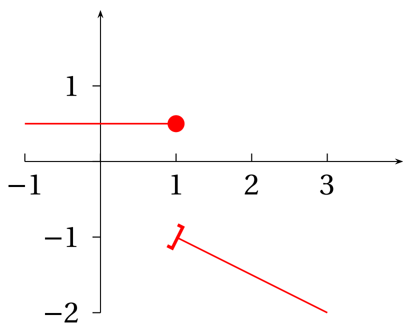
• par contraposée si la fonction change de signe sur I

$$\exists (x_1, x_2) \in I^2 \text{ tel que } x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) f(x_2) < 0$$

alors elle s'annule sur I.

⚠ ATTENTION : si la fonction s'annule sur I, elle peut ne pas changer de signe.
Prendre par exemple $x \longmapsto x^2$ sur $[-1,1]$.

⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si la fonction est discontinue en un point : la fonction peut changer de signe sans s'annuler, comme le montre la fonction $x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{-x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



2.2 Théorème de continuité sur un segment

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a, b]$ fermé et borné (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

Théorème 14 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a, b]$.
Alors $f\big([a, b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a, b]\big) = [m, M]$ où on a posé

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

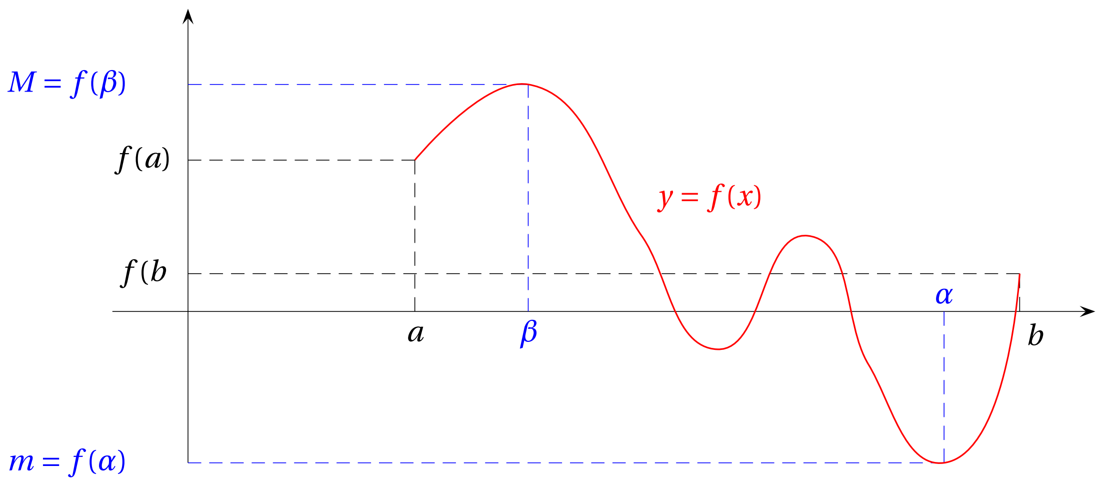
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a, b] \,/\, m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a, b] \,/\, M = f(\beta)$$

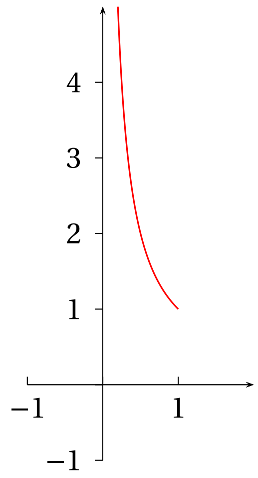
et ainsi :

$$\forall x \in [a, b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.

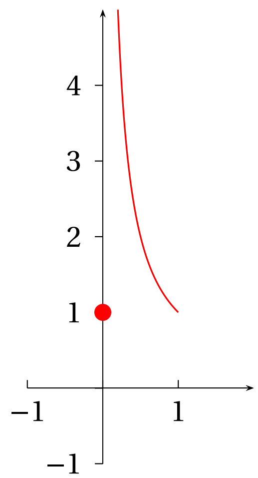


⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas majorée puisque $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.



⚠ ATTENTION ! Le résultat est faux si la fonction n'est pas continue.

Par exemple la fonction $x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est définie sur $[0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.



3 Fonctions continues et bijectives

On rappelle que si $f : I \longrightarrow J$ est bijective alors elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$, définie par :

$$\forall x \in I, \forall y \in J, \quad y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

et caractérisée par les relations :

$$\forall x \in I,\ f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J,\ f\big(f^{-1}(y)\big) = y$$

3.1 Théorème de la bijection monotone

On commence par les propriétés générales de la réciproque d'une fonction numérique bijective.

Proposition 15 Propriétés de l'application réciproque
On se donne deux intervalles I et J et une fonction f bijective de I sur J.

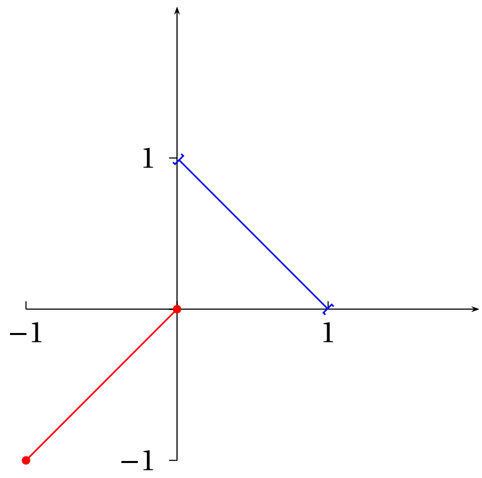
1. Si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J.
2. Si f est strictement monotone sur I, alors f^{-1} est strictement monotone sur J. Plus précisément :
   • Si f est strictement croissante sur I, alors f^{-1} est strictement croissante sur J.
   • Si f est strictement décroissante sur I, alors f^{-1} est strictement décroissante sur J.
3. Si f est strictement monotone sur I :
   • si f est strictement croissante sur I alors pour tout a point adhérent à I (ie $a \in I$ ou a est une borne de I) :
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^-$$
   • si f est strictement décroissante sur I alors pour tout $a \in I$:
   $$\lim_{x\to a^+} f(x) = b^- \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^-} f^{-1}(y) = a^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = b^+ \in \overline{\mathbb{R}} \Longrightarrow \lim_{y\to b^+} f^{-1}(y) = a^-$$
4. $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Si f est paire, on ne peut pas dire que f^{-1} est paire. La raison est très simple : si f est paire, elle ne peut pas être injective, et donc f^{-1} n'existe pas !!

On peut maintenant énoncer le théorème de la bijection monotone sous sa forme complète.

Théorème 16 Théorème de la bijection monotone
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
• $J = f(I)$ est un intervalle ;
• f est bijective de I sur J ;
• f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
• si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
• f^{-1} est continue sur J ;
• $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

⚠ ATTENTION ! Il n'y pas de réciproque, une fonction bijective peut être ni continue, ni strictement monotone.
Prendre par exemple la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$



Proposition 17 Calcul de l'intervalle image $J = f(I)$

1. Si f est strictement croissante :

$$\bullet f\big([a,b]\big) = \big[f(a), f(b)\big] \qquad \bullet f\big([a,b[\big) = \big[f(a), f(b^-)\big[$$
$$\bullet f\big(]a,b]\big) = \big]f(a^+), f(b)\big] \qquad \bullet f\big(]a,b[\big) = \big]f(a^+), f(b^-)\big[$$

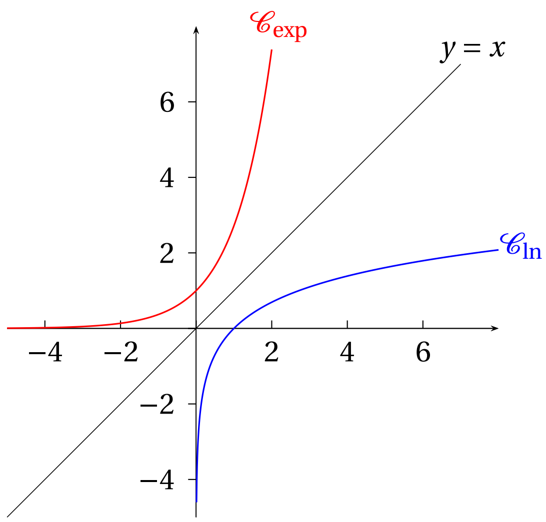
2. Si f est strictement décroissante :

$$\bullet f\big([a,b]\big) = \big[f(b), f(a)\big] \qquad \bullet f\big([a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a)\big]$$
$$\bullet f\big(]a,b]\big) = \big[f(b), f(a^+)\big[\qquad \bullet f\big(]a,b[\big) = \big]f(b^-), f(a^+)\big[$$

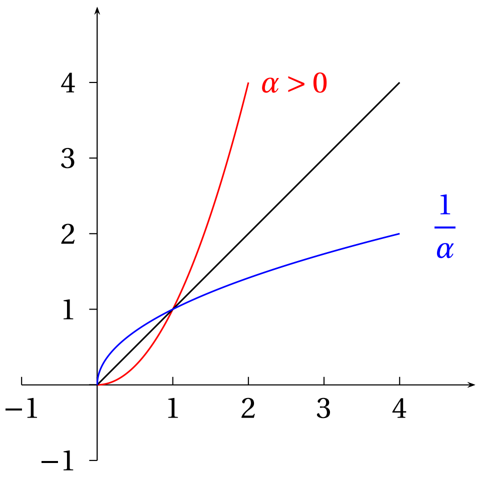
***Exemple* :** La fonction ln est continue et strictement croissante de l'intervalle $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Sa bijection réciproque est la fonction $\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On retrouve donc que ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante et :

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

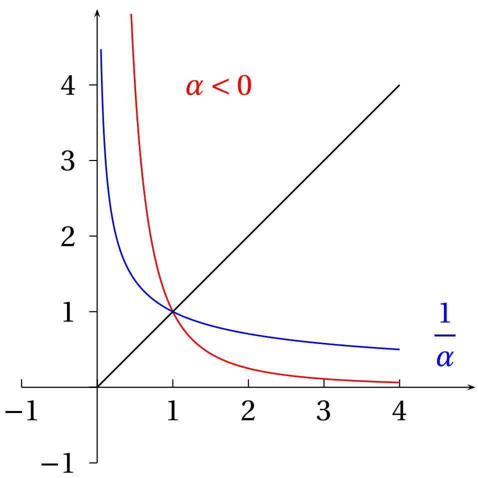
La courbe de $\mathscr{C}_{\ln}$ se déduit de la courbe de $\mathscr{C}_{\exp}$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite $y = x$.



***Exemple* :** Si $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



***Exemple* :** Si $\alpha < 0$, la fonction $x \longmapsto x^{\alpha}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.



3.2 La fonction arctangente

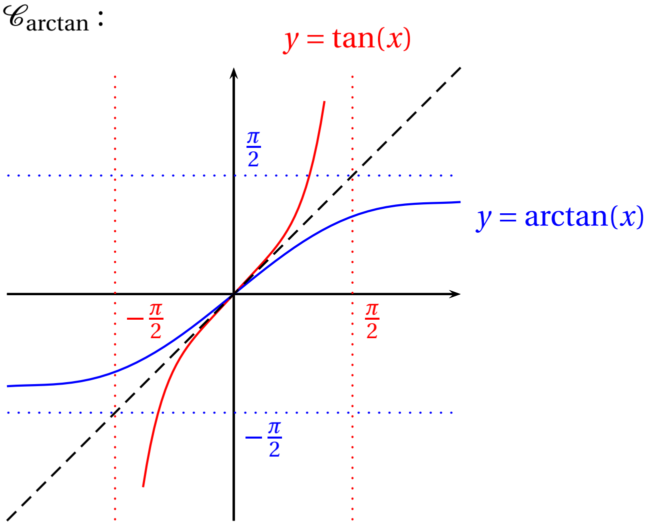
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Elle induit donc une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est appelée **fonction arctangente**, notée $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$ $\nearrow$ $+\frac{\pi}{2}$

On déduit de $\mathscr{C}_{\tan}$ la courbe $\mathscr{C}_{\text{arctan}}$:



Proposition 18 Propriétés de la fonction arctangente

1. arctan est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
2. arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan = \dfrac{\pi}{2}^-$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)^+$
4. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$ et $\forall x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan(x)) = x$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
6. On a les valeurs remarquables :

x	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$

7. Si $x \neq 0$: $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

⚠ ATTENTION ! La fonction $x \longmapsto \arctan(\tan(x))$ est définie sur $\mathscr{D}_{\tan}$, mais elle ne vaut x que sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4 Exercices

Continuité d'une fonction numérique

Exercice 1 Étudier la continuité (et les éventuels prolongements par continuité) des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ 2. $f(x) = \frac{x}{2x+|x|}$ 3. $f(x) = x^x$ 4. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \text{ si } x < 0 \\ x^2 + x \text{ si } 0 \leqslant x < 1 \\ \ln(x) + e^x \text{ si } x \geqslant 1 \end{cases}$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par : $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-1} - \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier la continuité de f.
2. Montrer que f est impaire puis étudier la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en 0 et vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.

Théorèmes des valeurs intermédaires et de continuité sur un segment

Exercice 4

1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que f a au moins un point fixe.
2. Montrer que l'équation $x^{17} = x^{12} + 1$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^+$.
3. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $I = [a,b]$, telles que : $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < g(x)$.
   Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [a,b]$, $\epsilon + f(x) \leqslant g(x)$.
   Ce résultat est-il encore valable si l'intervalle I n'est pas un segment ?

Exercice 5 Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que la limite de f en $+\infty$ existe et est finie. Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$.
2. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée sur $[0,+\infty[$ et que sa borne inférieure est atteinte.
3. On suppose que $f(0) < 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe et est strictement positive. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$.

Théorème de la bijection strictement monotone

Exercice 6

1. Soit f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Montrer que $f_{|[-\frac{1}{2},+\infty[}$ admet une application réciproque continue que l'on explicitera.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier sa bijection réciproque arcsin. Faire de même avec la restriction de cos à $[0,\pi]$ ($\cos^{-1}_{|[0,\pi]}$ sera notée arccos).

Exercice 7

1. Étudier la fonction $x \mapsto \arctan(\tan x)$, puis tracer sa courbe représentative.
2. Montrer que $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
3. Discuter en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x : $\arctan(x-1) + \arctan(x) + \arctan(x+1) = t$.

Compléments

Exercice 8 (Fonctions k-lipschitziennes et leur point fixe)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On suppose qu'il existe $k > 0$ telle que f soit k-lipschitzienne ie :

$$\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $0 < k < 1$, que $I = [a, b]$ est stable par f, et que f a un unique point fixe $\ell \in I$.
   On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leq k^n |x_0 - \ell|$.

   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

   (c) Déterminer une valeur de l'entier n (en fonction de a, b et k) pour laquelle x_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.