Chapitre 16

Dérivabilité des fonctions numériques

1 Dérivabilité d'une fonction numérique

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction définie sur un intervalle I.

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1 Dérivabilité en un point

Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (ie x_0 intérieur à I).

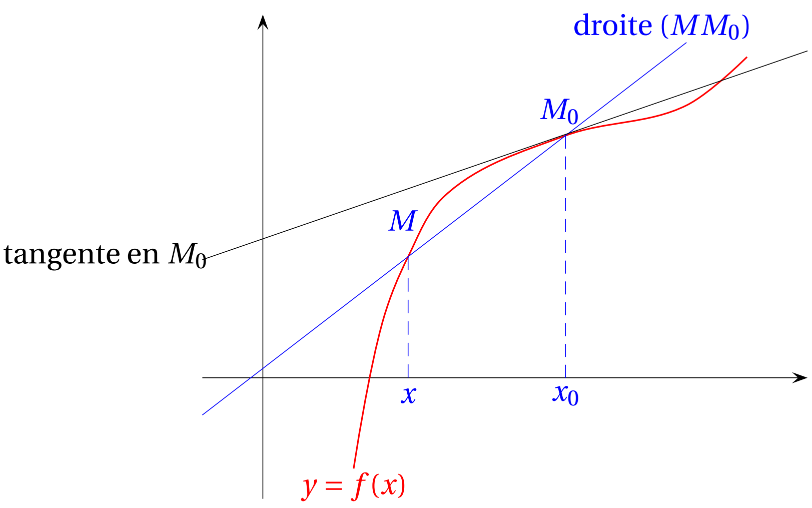
On dit que f est dérivable en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on pose : $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$.

Le réel $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0. On le note aussi $\dfrac{df}{dx}(x_0)$.

On peut toujours se ramener au voisinage de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



Interprétation graphique : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente la pente de la droite passant par les points $M\big(x, f(x)\big)$ et $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. $f'(x_0)$ représente donc la « pente limite » en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$, c'est-à-dire la pente de la tangente à la courbe de f au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Proposition 2 Dérivabilité et DL_1
Si f est dérivable en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ alors f admet un $DL_1(x_0)$ donné par :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0) \times (x - x_0) + o(x - x_0)$$

Une fonction dérivable en un point peut donc être localement approximée par une fonction affine.

Exemple **:** $f : x \longmapsto ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = a$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \cos(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = -\sin(x_0)$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sin(x)$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = \cos(x_0)$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{x_0^2}$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. Alors f est dérivable en tout $x_0 > 0$ et $f'(x_0) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

1.2 Dérivabilité à droite ou à gauche en un point

Définition 3 Dérivabilité à gauche en un point
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ou la borne droite de x_0.
On dit que f est dérivable à gauche en x_0 lorsque $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on pose : $f'_g(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Le réel $f'_g(x_0)$ est appelé nombre dérivé à gauche de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à gauche de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Définition 4 Dérivabilité à droite en un point
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ ou la borne gauche de x_0.
On dit que f est dérivable à droite en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on pose : $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Le réel $f'_d(x_0)$ est appelé nombre dérivé à droite de f en x_0.

On peut toujours se ramener au voisinage à droite de 0, en posant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Théorème 5 Lien entre dérivabilité en un point et dérivabilité à droite/gauche
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (ie x_0 intérieur à I). Alors :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \Longleftrightarrow f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemple **:** $f :\longmapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable en 0.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0.

1.3 Interprétations graphiques

• **Cas f dérivable en x_0 :** $\mathscr{C}_f$ admet une tangente au point $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ d'équation $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

• **Cas f non dérivable en x_0 :** Il y a plusieurs cas possibles.

Si f est dérivable à droite en x_0, alors elle admet une demi-tangente à droite en x_0 d'équation $y = f'_d(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si f est dérivable à gauche en x_0, alors elle admet une demi-tangente à gauche en x_0 d'équation $y = f'_g(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.

Si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0, avec $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors les deux demi-tangente ne sont pas parallèles. On dit que $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point anguleux**.

Exemple **:** En 0 la représentation graphique de $x \longmapsto |x|$ admet un point anguleux.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite en x_0, mais $\mathscr{C}_f$ admet quand même une demi-tangente verticale en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$. On a le même résultat à gauche en x_0.

Exemple **:** $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0, et sa courbe admet une tangente verticale en $O(0,0)$.

Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (ou $x \to x_0^-$) n'existe pas, il n'y a d'interprétation graphique...

1.4 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

Définition 6 Dérivabilité sur une partie de $\mathbb{R}$

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ de bornes a et b, et f définie au moins sur I.
   On dit que f est dérivable sur I lorsque :
   • f est dérivable en point x_0 intérieur à I,
   • si $a \in I$, f est dérivable à droite en a,
   • si $b \in I$, f est dérivable à gauche en b.

2. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ qui est une union d'intervalles et f définie au moins sur A.
   On dit que f est dérivable sur A lorsque f est dérivable sur tout les intervalles dont est constituée la partie A.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, mais non dérivable à droite en 0.

⚠ ATTENTION ! Le raisonnement naïf consistant à calculer $f'(x)$ et à regarder pour quelles valeurs de x cette fonction est définie est faux. Il ne donne pas la dérivabilité de la fonction. Par exemple le raisonnement « pour $f(x) = \sqrt{x}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et n'est pas dérivable à droite en 0 » n'est pas correct.
Mais nous verrons qu'on peut le corriger grâce au théorème de prolongement de la dérivabilité.

Définition 7 Fonction dérivée
Si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, on appelle fonction dérivée de f l'application :

$$f' : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Théorème 8 Une fonction dérivable est continue
Si f est dérivable en un point x_0 alors f est continue en x_0, et donc $x_0 \in \mathscr{D}_f$, (ce résultat est valable à droite ou à gauche en x_0).
Par conséquent, si f est dérivable sur une partie A de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur A.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Une fonction peut être continue en un point sans y être dérivable. Considérer par exemple $x \longmapsto |x|$ en 0.

Il existe même des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$ mais dérivables en aucun point de $\mathbb{R}$: par exemple la fonction de Weierstrass $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ (avec $b \in]0,1[$, a entier impair et $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$).

2 Opérations sur les dérivées

2.1 Opérations arithmétiques

Théorème 9 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables en un point x_0
Soient f et g deux fonctions dérivables en un même point x_0.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(\lambda.f + \mu.g)'(x_0) = \lambda.f'(x_0) + \mu.g'(x_0)$$

2. La fonction $f \times g$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(f \times g)'(x_0) = f'(x_0) \times g(x_0) + f(x_0) \times g'(x_0)$$

Ces résultats restent évidemment vrais à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 10 Opérations arithmétiques sur les fonctions dérivables sur une partie A
Soient f et g deux fonctions dérivables sur une même partie A.

1. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est dérivable sur A et on a :

$$\forall x \in A, \quad (\lambda.f + \mu.g)'(x) = \lambda.f'(x) + \mu.g'(x)$$

2. La fonction $f \times g$ est dérivable sur A et on a :

$$\forall x \in A, \quad (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$

Corollaire 11 Linéarité de la dérivation
Si on note $D(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur A, alors $D(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev.
L'application :

$$\begin{array}{ccc} D(A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^A \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

est linéaire.

2.2 Dérivée d'une composée, d'un quotient

Théorème 12 Dérivabilité d'une composée en un point
Soient f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $y_0 = f(x_0)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'\big(f(x_0)\big)$$

Ce résultat reste évidemment vrai à droite ou à gauche en x_0.

Corollaire 13 Dérivabilité d'une composée sur une partie A de $\mathbb{R}$
Soient f une fonction dérivable sur $A \subseteq \mathbb{R}$ et g une fonction dérivable sur $B \subseteq \mathbb{R}$, tel que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'\big(f(x)\big)$$

Exemple **:** $f : x \longmapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
Elle est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
Elle n'est ni dérivable à gauche en -1, ni dérivable à droite en 1.

Corollaire 14 Dérivabilité d'un quotient

1. Soient f et g deux fonctions dérivables x_0 tel que $g(x_0) \neq 0$.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables en x_0 et :
   $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \times g(x_0) - f(x_0) \times g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$
2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $A \subseteq \mathbb{R}$, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur A et :
   $$\forall x \in A, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - f(x) \times g'(x)}{g(x)^2}$$

2.3 Dérivée d'une bijection réciproque

On rappelle le théorème suivant.

Théorème 15 Théorème de la bijection monotone Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Alors :
- $J = f(I)$ est un intervalle ;
- f est bijective de I sur J ;
- f^{-1} est strictement monotone sur J, de même sens de variations que f ;
- si f est impaire sur I, alors f^{-1} est impaire sur J ;
- f^{-1} est continue sur J ;
- $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ se déduit de $\mathscr{C}_f$ par symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $y = x$

Pour la dérivabilité de f^{-1}, on dispose du résultat suivant.

Théorème 16 Dérivabilité d'une bijection réciproque en un point
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue et strictement monotone sur I. Soit $x_0 \in I$ tel que f est dérivable en x_0. Alors :
- Si $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

- Si $f'(x_0) = 0$ (cas d'une tangente horizontale pour $\mathscr{C}_f$ en x_0), alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et sa courbe admet une tangente verticale en ce point.

Il existe un moyen mnémotechnique simple pour retrouver la dérivée de f^{-1} : dériver la formule $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$.

⚠ Attention : si f n'est pas dérivable en x_0, on ne peut rien dire sur la dérivabilité de f^{-1} en $y_0 = f(x_0)$. Par exemple $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais $x \longmapsto x^2$ l'est.

Corollaire 17 Dérivabilité d'une bijection réciproque sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable et strictement monotone sur I, et telle que f' ne s'annule pas sur I.
Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et :

$$\forall y \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y)}$$

Application à la fonction arctan.

La fonction tan est dérivable et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$$

On en déduit que la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R} = \tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan(x)\right)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

3 Tableaux récapitulatifs des dérivées des fonctions usuelles

On rappelle les formules de dérivation des fonctions usuelles.

$f(x)$	$f'(x)$	Valeurs de x
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x > 0$ (au minimum...)
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\ln(a).a^x$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)$	$x \in \mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

En utilisant la formule de dérivation d'une composée $\left[f\big(u(x)\big)\right]' = u'(x).f'\big(u(x)\big)$, on obtient les formules suivantes.

$f(x)$	$f'(x)$	Condition sur $u(x)$ en plus de sa dérivabilité
$u(x)^\alpha$	$\alpha.u'(x).u(x)^{\alpha-1}$	$u(x) > 0$ (au minimum...)
$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$
$e^{u(x)}$	$u'(x).e^{u(x)}$	aucune
$\sin\big(u(x)\big)$	$u'(x).\cos\big(u(x)\big)$	aucune
$\cos\big(u(x)\big)$	$-u'(x).\sin\big(u(x)\big)$	aucune
$\tan\big(u(x)\big)$	$u'(x).\left[1+\tan^2\big(u(x)\big)\right]$	$u(x) \in \mathscr{D}_{\tan}$
$\arctan\big(u(x)\big)$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	aucune

⚠ ATTENTION ! La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais dérivable seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• **Cas des fonctions puissances réelles :**

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables.

On a déjà vu que si $\alpha \geq 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ peut être prolongé par continuité en 0. Intéressons nous désormais à la dérivabilité de cette fonction prolongée.

Pour $\alpha = 0$, on a $x^\alpha = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce cas la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est donc dérivable (à droite) en 0 si, et seulement si, $\alpha = 0$ ou $\alpha \geq 1$.

Donc pour $0 < \alpha < 1$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue mais non dérivable (à droite) en 0.

4 Dérivabilité sur un intervalle d'une fonction à valeurs réelles

Dans tout ce paragraphe, on considère une fonction f définie sur un intervalle I.

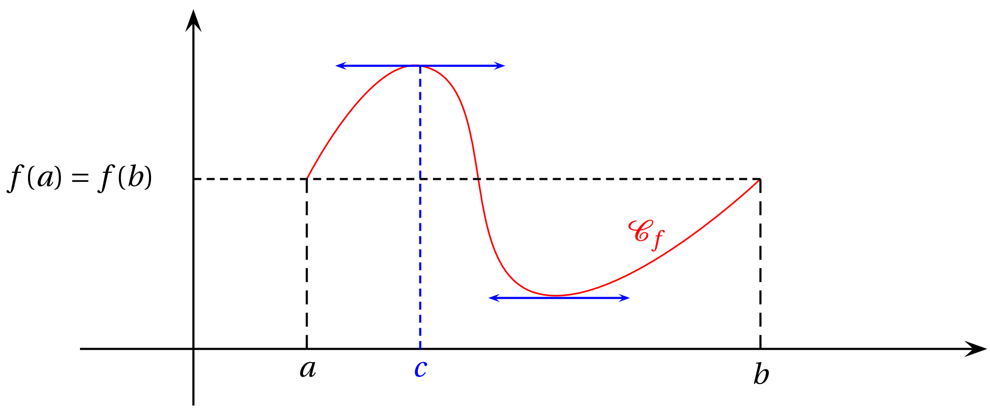
4.1 Lien entre extremum et dérivée

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant dont l'énoncé a été rappelé au chapitre 7.

Théorème 18 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \mathring{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

4.2 Théorème de Rolle

Intuitivement, pour une fonction f vérifiant $f(a) = f(b)$, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente horizontale.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 19 Théorème de Rolle
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a, b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a, b[$;
(iii) $f(a) = f(b)$.
Alors :

$$\exists c \in]a, b[/ \ f'(c) = 0$$

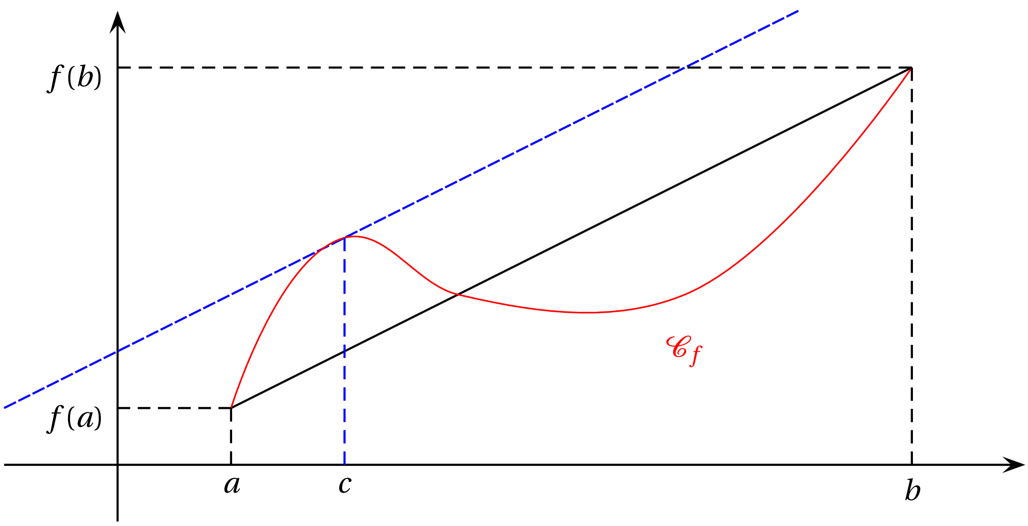
Démonstration : Puisque f est continue sur $[a, b]$, le théorème de continuité sur un segment donne que f est bornée et atteint ses bornes.

Si note $f(c_1) = \max_{t\in[a,b]} f(t)$ et $f(c_2) = \min_{t\in[a,b]} f(t)$, il reste à vérifier que $c_1 \in]a, b[$ ou $c_2 \in]a, b[$.

CQFD □

4.3 Théorème des accroissements finis

Intuitivement, pour une fonction f, on voit sur la figure ci-dessous que sa courbe admet au moins une tangente parallèle à la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a, f(a))$.



Énonçons alors le résultat rigoureux.

Théorème 20 Théorème des accroissements finis
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a, b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a, b[$.
Alors :

$$\exists c \in]a, b[/ \ f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration : On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$\varphi : t \longmapsto f(t) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)$$

CQFD □

Corollaire 21 Inégalité des accroissements finis

1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I,\ m \leq f'(x) \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x,y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow m \times (y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M \times (y-x)$$
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :
   (i) f est dérivable sur I ;
   (ii) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq M$.
   Alors :
   $$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(y) - f(x)| \leq M \times |y-x|$$

Si $I = [a,b]$, le théorème de continuité sur un segment permet de poser dans le premier cas : $m = \min\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$ et $M = \max\limits_{t\in[a,b]} f'(t)$, et dans le second cas : $M = \max_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

***Exemple* :** Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

***Exemple* :** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ |\sin(t)| \leq |t|$.

4.4 Lien entre dérivée et monotonie

Théorème 22 Lien entre dérivée et monotonie au sens large
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

1. f est croissante sur $[a,b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur $[a,b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur $[a,b] \Longleftrightarrow \forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$.

***Exemple* :** Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

***Exemple* :** On suppose que f affine sur tout segment $[a,b]$. Montrer que f est affine sur $\mathbb{R}$.

Théorème 23 Lien entre dérivée et stricte monotonie
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur $[a,b]$;
(ii) f est dérivable sur $]a,b[$.
Alors :

1. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.
2. $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur $[a,b]$.

⚠ ATTENTION : les réciproques sont fausses. Considérer par exemple $f : x \longmapsto x^3$ sur $[-1,1]$.

Corollaire 24 Lien entre dérivée et stricte monotonie sur un intervalle
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :
(i) f est continue sur I ;
(ii) f est dérivable sur I sauf éventuellement en des points isolés $\{x_1,\dots,x_p\}$.
Alors :

1. $\forall x \in I\backslash\{x_1,\dots,x_p\},\ f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ est strictement croissante sur I.
2. $\forall x \in I\backslash\{x_1,\dots,x_p\},\ f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ est strictement décroissante sur I.

5 Dérivées d'ordre supérieur

5.1 Dérivées successives

Définition 25 Dérivées successives
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la dérivée n-ième de f en x_0 par récurrence :

$$f^{(0)}(x_0) = f(x_0) \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0)$$

On note aussi $\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$.

On a donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ et $f^{(2)} = f''$.

Proposition 26 Associativité de la dérivation
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f est une fonction n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
On a alors, pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^p}{dx^p}\left(\frac{d^{n-p}f}{dx^{n-p}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right)(x_0)$$

et donc :

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)(x_0) = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0)$$

Exemple **:** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5.2 Fonctions de classe C^n, de classe C^∞

Définition 27 Fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que f est de classe C^n sur A lorsque :
(i) f est n fois dérivable en tout $x_0 \in A$;
(ii) $f^{(n)}$ est continue sur A.

Donc : f est de classe C^0 sur $A \iff f$ est continue sur A ;
et : f est de classe C^1 sur $A \iff f$ est dérivable sur A et f' est continue sur A.
Dans ce dernier cas, on dit aussi que f est continûment dérivable sur A.

Exemple **:** La fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Notations : On note $D^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur A, et $C^n(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^n sur A. Alors :

$$C^0(A,\mathbb{R}) \subsetneq D^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^1(A,\mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq D^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R}) \subsetneq \ldots$$

Proposition 28 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^n
Soit $f \in C^n(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, $f^{(p)} \in C^{(n-p)}(A,\mathbb{R})$.

Définition 29 Fonctions de classe C^∞
On dit que f est de classe C^∞ sur A lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur A.
On dit aussi que f est indéfiniment dérivable sur A.

Notation : On note $C^\infty(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur A.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $C^\infty(A,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(A,\mathbb{R})$.

Proposition 30 Régularité de la dérivée d'une fonction de classe C^∞
Soit $f \in C^\infty(A,\mathbb{R})$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \in C^\infty(A,\mathbb{R})$.

Proposition 31 Caractérisation des fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors :
f est classe C^n sur $I \iff f$ est n dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I.

5.3 Classe de régularité des fonction usuelles

• Les fonctions polynômes sont C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• Les fractions rationnelles (= quotient de polynômes) sont C^∞ sur leur ensemble de définition.

• Les fonctions cos et sin sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

La fonction tan est C^∞ sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle/ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

• arctan est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

• La fonction ln est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x > -1, \quad \left(\ln(1+x)\right)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

• La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (vrai en base quelconque) et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathrm{e}^x\right)^{(k)} = \mathrm{e}^x$$

• La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais C^∞ seulement sur $\mathbb{R}^*$.

• Les fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, sont C^∞ (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, on a le résultat suivant.

Théorème 32 Classe de régularité de la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ en 0
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :
la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est C^n (à droite) en 0 $\Longleftrightarrow \alpha \geq n$

***Exemple* :** $x \longmapsto x\sqrt{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

⚠ ATTENTION ! Pour des puissances entières, l'ensemble de dérivabilité peut être beaucoup plus grand que $\mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$. Par exemple $x \longmapsto x^2$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ (fraction rationnelle).

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est C^∞ sur $]-1,+\infty[$ (au moins), et on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1, \quad \left((1+x)^\alpha\right)^{(k)} = \alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) \times (1+x)^{\alpha-k}$$

***Exemple* :** Simplifier la formule dans le cas $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

⚠ Attention : on ne peut pas dire ne général que $\alpha \times (\alpha-1) \times (\alpha-2) \times \cdots \times (\alpha-k+2) \times (\alpha-k+1) = \dfrac{\binom{\alpha}{k}}{k!}$.

5.4 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n/C^∞

Théorème 33 Opérations arithmétiques sur les fonctions de classe C^n

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^n sur A et on a :
   $$(\lambda.f + \mu.g)^{(n)} = \lambda.f^{(n)} + \mu.g^{(n)}$$
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A.
   Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est de classe C^∞ sur A.

Corollaire 34 Structures de $\mathbb{R}$-ev

1. $C^0(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D^n(A, \mathbb{R})$ et $C^n(A, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. $C^\infty(A, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Ils sont bien évidemment de dimension infinie.

Théorème 35 Formule de Leibnitz
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A.
Alors $f \times g$ est C^n sur A et :
$$\forall x \in A, \quad (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.f^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x)$$

***Exemple* :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $L_n(x) = \mathrm{e}^x \times \dfrac{d^n}{dx^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^n\right)$ (polynômes de Laguerre).
Montrer que $L_n \in \mathbb{R}[X]$ et que son terme dominant est $(-1)^n X^n$.

5.5 Composition de fonctions de classe C^n/C^∞

Théorème 36 Composition de fonctions de classe C^n
Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe C^n sur une partie A, et g une fonction de classe C^n sur une partie B telle que $f(A) \subseteq B$.
Alors $g \circ f$ est C^n sur A.

⚠ ATTENTION : il existe une formule pour $(g\circ f)^{(n)}$, dite formule de Faà di Bruno mais...

$$(g\circ f)^{(n)}(x)=\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in[\![0,n]\!]^n\\ \text{tq } 1.m_1+2.m_2+3.m_3+\dots+n.m_n=n}}\frac{n!}{m_1!m_2!\cdots n!}f^{(m_1+m_2+\dots+m_n}(g(x))\times\prod_{k=1}^{n}\left[g^{(k)}(x)\right]^{m_k}$$

rassurez-vous, **elle n'est pas au programme !**

Corollaire 37 Composition de fonctions de classe C^∞
Soient f une fonctions de classe C^∞ sur une partie A, et g une fonction de classe C^∞ sur une partie B telle que $f(A)\subseteq B$.
Alors $g\circ f$ est C^∞ sur A.

Corollaire 38 Quotient de fonctions de classe C^n/C^∞

1. Soient $n\in\mathbb{N}$, f et g deux fonctions de classe C^n sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^n sur A.
2. Soient f et g deux fonctions de classe C^∞ sur une même partie A, telle que g ne s'annule pas sur A.
   Alors $\dfrac{f}{g}$ est C^∞ sur A.

⚠ ATTENTION : il n'y pas de formule pour $\left(\dfrac{f}{g}\right)^{(n)}$ (ou plutôt pas de formule utilisable en pratique !).

6 Formules de Taylor

6.1 Formule de Taylor-Lagrange

La formule suivante permet d'approximer localement une fonction par une intégrale. On a une expression exacte du reste.

Théorème 39 Formule de Taylor-Lagrange
Soient $n\in\mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall(a,x)\in I^2,\exists\zeta\in]a,b[/\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

__**Démonstration**__ : On applique le théorème de Rolle à la fonction :

$$\varphi: t\longmapsto f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k-A\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $A \in \mathbb{R}$ est choisi telle que $\varphi(a) = 0$.

CQFD □

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\exists \zeta \in]0, h[/ \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\zeta)}{(n+1)!} h^{n+1}$$

Corollaire 40 Développement en série de la fonction exponentielle
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

6.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

la formule précédente permet d'encadrer sur un intervalle (fermée) une fonction entre deux polynômes de même degré.

Théorème 41 Inégalité de Taylor-Lagrange
Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

***Exemple* :** Encadrer la fonction $x \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty$, entre deux polynômes de degré 4.

En posant $x = a + h$, on obtient :

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k \right| \leq M \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M = \sup_{t \in [a, a+h]} |f^{(n+1)}(t)|$.

6.3 Formule de Taylor-Young

Dans cette version de la formule, le reste n'est pas exact, on connaît simplement son ordre de grandeur (ce qui suffit dans la plupart des applications). On obtient donc un développement limité.

Théorème 42 Formule de Taylor-Young
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et et f une fonction de classe C^n sur un voisinage de a. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^{n+1}\big)$$

En posant $x = a+h$, on obtient :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o\big(h^{n+1}\big)$$

***Exemple* :** Si f est C^2 au voisinage de a, alors : $f''(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

Corollaire 43 Existence de développement limité à tout ordre
Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^∞ sur un voisinage de a.
Alors f admet en a un développement limité à tout ordre.

On en déduit tous les développements usuels en 0 !

6.4 Recherche d'extremums

On rappelle qu'on appelle segment tout intervalle $[a,b]$ fermé et borné (avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$). Nous avons vu au chapitre 15 le théorème suivant.

Théorème 44 Théorème de continuité sur un segment
Soit f continue sur un segment $[a,b]$.
Alors $f\big([a,b]\big)$ est aussi un segment. Précisons : cela signifie que $f\big([a,b]\big) = [m,M]$ où on a posé

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

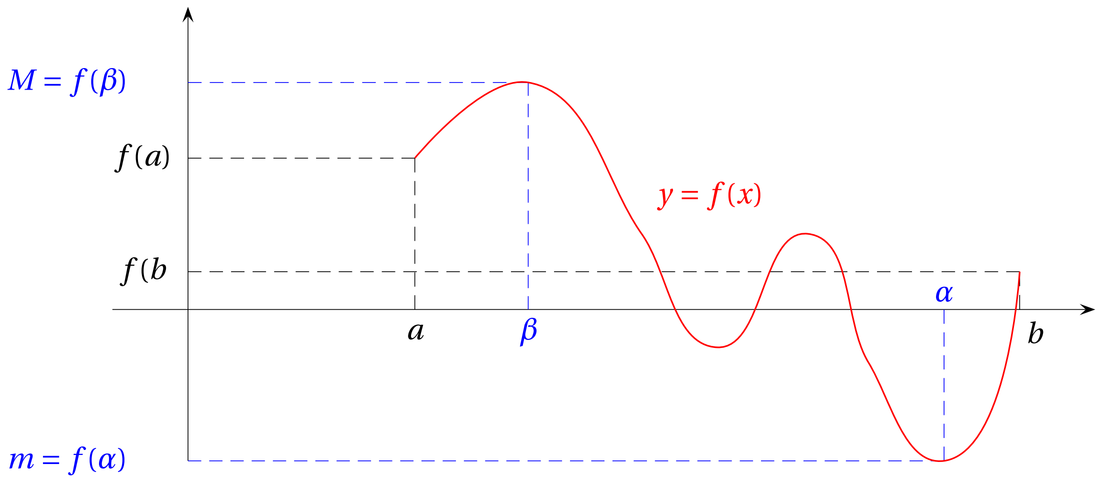
Rappelons que, par définition d'un minimum et d'un maximum, ces bornes sont atteintes, donc :

$$\exists \alpha \in [a,b] / \ m = f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \exists \beta \in [a,b] / \ M = f(\beta)$$

et ainsi :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$$

Autrement dit : f est **bornée et atteint ses bornes**.



⚠ ATTENTION ! Ceci est faux si on ne prend pas un segment.
Par exemple $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais n'est pas majorée puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Théorème 45 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction C^1 sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) I est un intervalle ouvert.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse I ouvert est essentielle.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in I$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 46 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f une fonction C^2 sur un intervalle ouvert I, et x_0 un point critique de f.
Si $f''(x_0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en x_0 (maximum local si $f''(x_0) \geq 0$ et minimum local si $f''(x_0) \leq 0$).

En pratique, pour savoir si un extremum local est global, il suffit de dresser le tableau de variations de f.

***Exemple* :** Extremums de $x \longmapsto x^3$ sur $[-1,2]$.

7 Fonctions convexes

Définition 47 Fonction convexe/concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est convexe sur I lorsque :

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \leq t.f(x)+(1-t).f(y)$$

2. On dit que f est concave sur I lorsque :

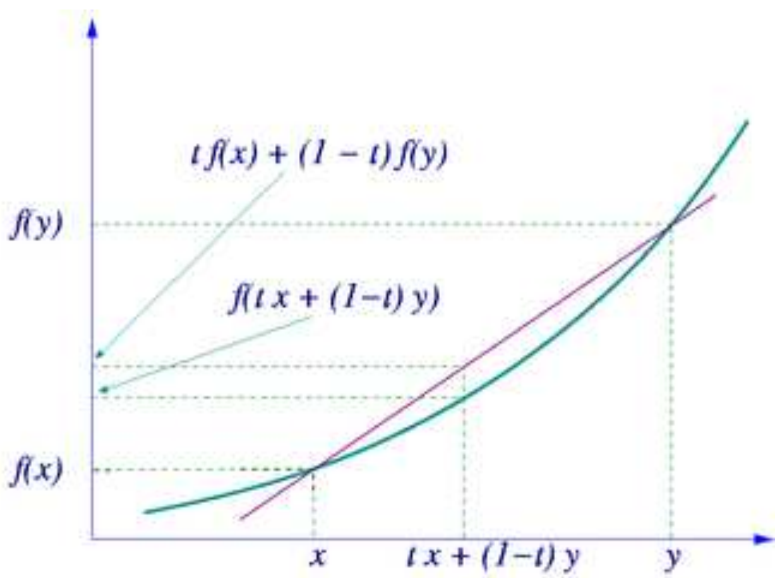
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall t \in [0,1], \quad f\big(tx+(1-t)y\big) \geq t.f(x)+(1-t).f(y)$$

Proposition 48 Lien entre convexe et concave
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est concave sur } I \Longleftrightarrow -f \text{ est convexe sur } I$$

Pour cette raison nous n'étudierons que le cas des fonctions convexes.

Interprétation graphique de la convexité/concavité :
• Si f est convexe, tout arc de sa courbe est situé en-dessous de sa corde ;
• Si f est concave, tout arc de sa courbe est situé au-dessus de sa corde.



Théorème 49 Inégalité de Jensen
Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. On a alors, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in I^n$ et tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in[0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k)$$

Théorème 50 Fonctions convexes de classe C^1
Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. On a équivalence de :
(i) f est convexe sur I ;
(ii) f' est croissante sur I ;
(iii) $\mathscr{C}_f$ est au-dessus ses tangentes sur I.

Théorème 51 Fonctions convexes de classe C^2
Soit f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est convexe sur } I \Longleftrightarrow \forall x\in I,\quad f''(x)\geq 0$$

Exemple **:** Les fonctions exp et $x\longmapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple **:** Si $t\in[0,\pi]$, alors $\sin(t)\leq t$. En déduire que $\forall t\in\mathbb{R}$, $|\sin(t)|\leq|t|$ (cf l'inégalité des accroissements finis).

Définition 52 Point d'inflexion
Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I. Lorsque f est convexe sur l'un des deux intervalles $I\cap]-\infty,x_0]$ et $I\cap[x_0,+\infty[$, et concave sur l'autre, on dit que f admet un point d'inflexion en x_0.

Théorème 53 Condition nécessaire de point d'inflexion pour une fonction de classe C^2
Soient f une fonction de classe C^2 sur un intervalle I, et x_0 un point intérieur à I.
Si f'' s'annule en changeant de signe en x_0, alors f admet un point d'inflexion en x_0.

Exemple **:** $x\longmapsto x^3$ admet un point d'inflexion en 0.

8 Exercices

Dérivée et étude de fonctions

Exercice 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. Établir que f et f' sont de parités contraires.
2. Montrer que f' est de même périodicité que f.

Exercice 2

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2+\ln x = x^2$.
2. On note h l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(0)=0$ et pour tout $x>0$, $h(x) = x\ln(x)$. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tracer l'allure de son graphe en précisant les tangentes au point d'abscisse 0 et 1.
3. On pose $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est bijective sur $\mathbb{R}$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes déterminer son ensemble de continuité (la prolonger éventuellement par continuité aux bornes de son ensemble de définition), son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée. Sont-elles de classe C^1 là où elles sont dérivables ?

1. $x \longmapsto \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
2. $x \longmapsto \begin{cases} 1-e^x & \text{si } x<0 \\ -\ln(1+x) & \text{si } x>0 \end{cases}$
3. $x \longmapsto \sqrt{|1-x^2|}$

Exercice 4

1. Montrer que la restriction de cos à $[0,\pi]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arccos.
2. Montrer que la restriction de sin à $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ est bijective et étudier la continuité et la dérivabilité de son application réciproque, notée arcsin.

Exercice 5 On pose : $\forall t>0$, $g(t) = \dfrac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}$.

1. Montrer que g peut-être prolongée en 0 en une fonction dérivable à droite en 0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour n assez grand, l'équation (E_n) : $g(t) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions x_n et y_n sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant : $0<x_n<1<y_n$.
3. Donner la monotonie et la limite des suites (x_n) et (y_n).

Exercice 6 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur son ensemble de définition.
2. Construire le tableau de variations de f.

Exercice 7 On définit les deux fonctions $\varphi : [0,2\pi] \longrightarrow [0,2\pi]$, $t \longmapsto \varphi(t) = t-\sin(t)$ et $\psi : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \psi(t) = 1-\cos(t)$.

1. Montrer que φ est C^1 sur $[0,2\pi]$ et qu'elle admet une fonction réciproque φ^{-1} qui est continue sur $[0,2\pi]$ t dérivable sur $]0,2\pi[$.

   On pose $f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = \psi\circ\varphi^{-1}(x)$.

2. Vérifier que f est continue sur $[0,2\pi]$ et dérivable sur $]0,2\pi[$.
3. Étudier les variations de f sur $[0,2\pi]$. Montrer que la droite d'équation $x=\pi$ est axe de symétrie pour la courbe représentative de f. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 8 Soit a un réel positif ou nul. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $P_a(x)=x^3+ax-1$.

1. Montrer que ce polynôme admet une unique racine réelle $u(a)$.

   On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui a tout a associe le réel $u(a)$.
2. Montrer que : $u(\mathbb{R}_+)\subseteq\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
4. Calculer $u(0)$, puis $\lim\limits_{a\to+\infty} u(a)$.
5. Déterminer l'application réciproque de u.
6. Montrer que u est continue sur $\mathbb{R}_+$.
7. Montrer que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $u'(a)$, pour tout $a\in\mathbb{R}_+$.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de u.

Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 9 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, telle que $f(0)=0$ et f' croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Établir que :

$$\forall x>0,\quad \frac{f(x)}{x}\leq f'(x).$$

En déduire que la fonction $g: x\longmapsto \frac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10 Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(a)=f(b)=0$.

1. Montrer que :

   $$\forall x\in[a,b],\quad \exists c\in]a,b[\,/\ f(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(c)$$

   Indication : on considèrera la fonction $\varphi(t)=f(t)-\frac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A est une constante bien choisie.
2. En déduire une constante M telle que :

   $$\forall x\in[a,b],\quad |f(x)|\leq M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Exercice 11
Soit $\alpha\in]0,1[$.

1. Établir que :

   $$\forall n\geq 1,\quad \frac{1-\alpha}{(n+1)^\alpha}\leq (n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\leq\frac{1-\alpha}{n^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent de la suite $(H_n)_{n\geq1}$ définie par :

   $$\forall n\geq 1,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 12

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $[a, b]$, s'annulant en $n+1$ points distincts de $[a, b]$. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels tels que $a < b$. On considère f une fonction de classe C^n sur $[a, b]$ telle que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad f^{(k)}(a) = f^{(k)}(b) = 0.$$

   Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]a, b[$.
   Application : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = (X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n = P_n^{(n)}$ (polynômes de Legendre). Montrer que L_n admet n racines réelles disctinctes et qu'elles appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 13 Montrer que les fonctions suivantes sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et déterminer leurs dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 14 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}.$$

2. En déduire que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Fonctions convexes

Exercice 15

1. Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad \sqrt[p]{a}\,\sqrt[q]{b} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$$

2. Soit $p \geq 1$. En étudiant la convexité de $f :\longmapsto (1+t^p)^{\frac{1}{p}}$, établir que : $\forall t \geq 0$, $(1+t^p)^{\frac{1}{p}} \geq 2^{\frac{1}{p}-1}(1+t)$.
   En déduire que :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, \quad (x+y)^p \leq 2^{p-1}\left(x^p + y^p\right)$$

   Retrouver directement cette inégalité en utilisant la fonction $x \longmapsto x^p$.

Exercice 16

1. Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n points de I. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réelspositifs tels que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.
   Établir que : $f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

2. En déduire que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs alors :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$