Chapitre 18

Intégration sur un segment

1 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

1.1 Primitive d'une fonction continue

Définition 1 Primitive d'une fonction
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie sur I telle que :
(i) F est dérivable sur I ;
(ii) $F' = f$.

⚠ f n'est pas nécessairement continue, et donc F n'est pas nécessairement de classe C^1 (nous avons vu dans le chapitre sur la dérivabilité qu'il existe des fonctions dérivables qui ne sont pas de classe C^1).

⚠ En général une fonction quelconque n'a pas pas de primitive.

⚠ Attention : dire que F est une primitive de f n'a pas de sens. Il faut préciser sur quel intervalle. Par exemple, on ne peut pas dire que $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Proposition 2 Primitives d'une même fonction
Soit f une fonction numérique définie sur I, et admettant au moins une primitive sur I. Alors :
(i) f admet une infinité de primitives sur I ;
(ii) toutes les primitives de f sur I sont égales à une constant additive près, ie que si F et G sont deux primitives de f sur I alors il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C$$

C'est pourquoi on parle d'**une** primitive de f. Pour avoir unicité d'une primitive, et donc parler de **la** primitive, il faut imposer une condition initiale.

Théorème 3 Unicité d'une primitive vérifiant une condition initiale
Soit f une fonction numérique définie sur I, et admettant au moins une primitive sur I. On se donne aussi $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

On peut donc dire que F est **la** primitive de f sur I vérifiant la condition initiale $y_0 = F(x_0)$.

Théorème 4 Existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle
Si I est un intervalle et f une fonction continue sur I, alors f admet au moins une primitive sur I.
Elle en admet donc une infinité, toutes égales à une constante additive près, et elles sont toutes de classe C^1 sur I.
Elles sont de la forme :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C \end{array}$$

où $a \in I$ et $C \in \mathbb{R}$.

1.2 Tableaux récapitulatifs des primitives usuelles

On rappelle les primitives des fonctions usuelles.

Fonction	Primitive	Intervalle et conditions
x^α	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$x > 0$ (au minimum...) et $\boxed{\alpha \neq -1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x > 0$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 1$
$\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax)$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
$\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax)$	$x \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$
$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \in \mathbb{R}$

On rappelle la formule de dérivation d'une composée de fonctions dérivables $\left[F\big(u(x)\big)\right]' = u'(x).F'\big(u(x)\big)$. On en déduit que si F est une primitive de f, alors $F \circ u$ est une primitive de

$u' \times f \circ u$.

Fonction	Primitive	Condition
$u'(x).u(x)^{\alpha}$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u(x)^{\alpha+1}$	$\alpha \neq -1$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	aucune
$u'(x).\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$	aucune
$u'(x).\cos\left(u(x)\right)$	$\sin\left(u(x)\right)$	aucune
$u'(x).\sin\left(u(x)\right)$	$-\cos\left(u(x)\right)$	aucune
$u'(x).\left[1+\tan^2\left(u(x)\right)\right] = \dfrac{u'(x)}{\cos^2\left(u(x)\right)}$	$\tan\left(u(x)\right)$	aucune
$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$	$\arctan\left(u(x)\right)$	aucune

1.3 Intégrale sur un segment d'une fonction continue

Théorème 5 Intégrale sur un segment d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a,b]$, et si F est **une** primitive de f sur $[a,b]$, alors le réel $F(b)-F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F.

A partir de ce résultat, on peut définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Définition 6 Intégrale sur un segment d'une fonction continue
Si f est continue sur le segment $[a,b]$, et si F est **une** primitive de f sur $[a,b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b)-F(a)$$

Extension de la définition. On pose :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Ainsi si f est continue sur un intervalle I, on a défini $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $(a,b)\in I^2$ (sans la condition $a<b$).

Nous allons voir que les propriétés de l'intégrale sont très proches de celles de la **somme discrète** $\sum$. Par analogie, on dit que $\displaystyle\int$ est une **somme continue**.

Théorème 7 Relation de Chasles
Si f est continue sur un intervalle I, alors :

$$\forall (a,b,c) \in I^3, \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Insistons sur le fait qu'on ne suppose pas que $a < c < b$.

Théorème 8 Linéarité de l'intégrale
Si f, g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ et λ, μ deux nombres réels, alors :

$$\int_a^b \big(\lambda.f(t) + \mu.g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu.\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Autrement dit, l'application :

$$\begin{array}{rccc} I: & C^0([a,b,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

Corollaire 9 Linéarité de l'intégrale
Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions continues sur $[a,b]$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels, alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k.f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^n \lambda_k.\int_a^b f_k(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ Ceci est complètement faux avec la multiplication ! En général :

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 10 Positivité (stricte) de l'intégrale

1. Positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

2. Stricte positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,b],\ f(t)=0 \quad (\text{ie } f \text{ est l'application nulle sur } [a,b])$$

3. Stricte positivité (contraposée) : Soit f une fonction continue et positive sur un segment $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$. On suppose que f est différente de l'application nulle sur $[a,b]$:

$$\exists t_0 \in [a,b] / \ f(t_0) \neq 0$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

Que se passe-t-il si f est continue et positive sur $[a,b]$ avec $b<a$? Réponse : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$.

On retiendra donc que pour appliquer la positivité de l'intégrale à une fonction continue positive, il faut vérifier que les « bornes sont dans le bon sens ».

***Exemple* :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis). Alors $I_n > 0$.

Théorème 11 Croissance de l'intégrale
Si f, g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a \leq b}$. On suppose que :

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) \leq g(t)$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens ».

***Exemple* :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis). Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Théorème 12 Inégalité de la moyenne
Si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a<b}$:

$$\min_{a\leq t\leq b} f(t) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \max_{a\leq t\leq b} f(t)$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont (strictement) dans le bon sens ».

Vocabulaire : le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé valeur moyenne de f.

Exemple : Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est une valeur prise par f sur $[a,b]$.

Théorème 13 Inégalité triangulaire pour l'intégrale
Si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a\le b}$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens ».

Exemple : Montrer que, si f continue sur $[a,b]$ tel que $\boxed{a\le b}$:

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le (b-a).\max_{a\le t\le b}|f(t)|$$

1.4 Extension aux cas des fonctions continues par morceaux sur un segment

Définition 14 Fonction continue par morceaux
Une fonction $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux lorsqu'il existe une subdivision $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ de $[a,b]$ telle que :
(i) pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, f est continue sur $]x_K,x_{k+1}[$;
(ii) pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, $f(x_k^+)$ et $f(x_{k+1}^-)$ existent et sont finies.

La subdivision σ est dite adaptée à f. En lui ajoutant des points, on obtient encore une subdivision adaptée. Par contre une subdivision adaptée doit contenir un minimum de points (correspondant aux points de discontinuité de f), et dans ce cas on dit qu'elle est optimale pour f.

Exemple : Les fonctions continues sont des cas particuliers de fonctions continues par morceaux.

Exemple : La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[0,3]$.

Exemple : La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } 0<x\le 1\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$.

Remarque importante : Si $\sigma=(x_0,\dots,x_n)$ est une subdivision adaptée à f, alors pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[x_k,x_{k+1}]$, notée φ_k :

$$\varphi_k(t)=\begin{cases} f(x_k^+) & \text{si } t=x_k\\ f(t) & \text{si } x_k<t<x_{k+1}\\ f(x_{k+1}^-) & \text{si } t=x_{k+1}\end{cases}$$

Théorème 15 Intégrale d'une fonction continue par morceaux
Si f est une fonction continue par morceaux et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f, alors le réel :

$$I(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_k(t)\,\mathrm{d}t$$

où φ_k est le prolongement continue de f à $[x_k, x_{k+1}]$, ne dépend pas du choix de la subdivision σ. On peut donc le noter $I(f)$.

Définition 16 Intégrale d'une fonction continue par morceaux
Si f est une fonction continue par morceaux on appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$ le réel :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{\text{def}}{=} I(f)$$

Exemple **:** Calculer $\displaystyle\int_0^2 \big(t - \lfloor t \rfloor\big)\,\mathrm{d}t$.

On vérifie facilement que cette définition englobe les définitions de l'intégrale d'une fonction continue. Nous avons donc généralisé la notions du précédent paragraphe.

Théorème 17 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux
L'intégrale d'une fonction continue par morceaux a les mêmes propriétés que l'intégrale d'une fonction continue, sauf la stricte positivité.
• Plus précisément : les propriétés de Chasles, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire sont vraies pour l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.
• La stricte positivité est mise en défaut : on peut avoir f continue par morceaux et positive, différente de l'application nulle, et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Exemple **:** On pose $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2 & \text{si } t = 1 \end{cases}$. On a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et pourtant f est continue positive et différente de l'application nulle.

1.5 Fonctions définies par une intégrale

On peut définir des fonctions à l'aide d'une intégrale.

On suppose donc que u et v sont deux fonctions numériques et que f est une fonction numérique continue sur un intervalle I.

On définit alors une fonction g par la formule :

$$g(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction g peut alors être étudier comme n'importe quelle fonction numérique : dérivée, variations, limites, équivalents... On propose le plan d'étude suivant.

• **Ensemble de définition** :

$$x \in \mathscr{D}_g \Longleftrightarrow f \text{ est continue par morceaux sur } [u(x), v(x)] \Longleftrightarrow f \text{ est continue sur} I \Longleftrightarrow x \in A$$

où A est une partie de $\mathbb{R}$ à déterminer. On a alors $\mathscr{D}_g = A$.

RAISONNEMENT IMPORTANT : pour aller plus loin on se donne une autre expression de g. On prend F une primitive de f sur I (F existe car f est continue). On a alors :

$$\forall x \in A, \quad g(x) = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) \qquad (*)$$

C'est cette expression qui va nous permettre de poursuivre notre étude. Noter que F est C^1 sur I.

• **Continuité de** g : d'après la formule $(*)$, si u et v sont continues sur A et à valeurs dans I, alors g est continue sur A.

• **Dérivabilité de** g : d'après la formule $(*)$, si u et v sont dérivables sur A et à valeurs dans I, alors g est dérivable sur A et :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = v'(x).F'\big(v(x)\big) - u'(x).F'\big(u(x)\big) = v'(x).f\big(v(x)\big) - u'(x).f\big(u(x)\big)$$

En général on se sait pas calculer l'expression de F, mais ce n'est pas important vu que l'expression de g' dépend seulement de celle de f.

• **Limites ou équivalents de g en certains points** : on détermine un encadrement de f, et on en déduit par croissance de l'intégrale un encadrement de g.

***Exemple* :** On pose $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$. Étudier les variations de g sur son ensemble de définition et déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$ (pour cela montrer que $g(x) \geq 2\ln(x)$ si $x \geq 1$).

2 Calcul intégral

Notation : si f est une fonction continue sur un intervalle I, note $\displaystyle\int f(x)\,dx$ une primitive de f sur I. Cette notation n'est pas correcte car elle ne précise ni l'intervalle I, ni la primitive choisie (on rappelle que f en admet une infinité !). Mais elle rend tout de même service en simplifiant les notations dans les calculs de primitives.

2.1 Intégration par parties

Théorème 18 Intégration par parties (IPP)

1. Version intégrale. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u'(t).v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t).v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t).v'(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Version primitive. Si u et v sont deux foctions de classe C^1 sur un intervalle I alors :

$$\int u'(x).v(x)\,\mathrm{d}x = u(x).v(x) - \int u(x).v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Méthode : Penser à ce théorème lorsqu'apparaissent :
• des termes en $x^n.f(x)$ qu'on simplifie en dérivant n fois x^n ;
• des bijections réciproques f^{-1} ;
• des termes en sin, cos, exp dont la dérivée est proche de la fonction intiale.

***Exemple* :** Déterminer les primitives de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

***Exemple* :** Déterminer les primitives de arctan sur $\mathbb{R}$.

***Exemple* :** Calculer $\displaystyle\int_0^1 t^2 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.

***Exemple* :** Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

2.2 Changement de variable

Ce théorème est l'analogue du théorème de changement d'indice dans une somme discrète $\sum$.

Théorème 19 Théorème de changement de variable
Si f est continue sur $[a,b]$ et si φ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ vérifiant les conditions :

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{et} \quad \varphi(\beta) = b$$

alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(x)\big).\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

En pratique : pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $t = \varphi(x)$. On a alors $\mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on détermine α et β tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Démonstration : Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $f\circ\varphi.\varphi'$ sur $[\alpha,\beta]$.

CQFD □

***Exemple* :** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\mathrm{e}^t$.

***Exemple* :** Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $x=\sin(t)$.

Corollaire 20 Intégrale d'une fonction périodique
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Alors :

1. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $n\in\mathbb{Z}$:
$$\int_{a+nT}^{b+nT} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Pour tout $a\in\mathbb{R}$:
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Pour 1. poser $x=t-nT$. Pour 2. utiliser Chasles : $\displaystyle\int_a^0+\int_0^T+\int_T^{a+T}=\int_a^{a+T}$.
CQFD □

⚠ Attention : ce théorème ne s'applique pas à la fonction tan.

***Exemple* :** $\displaystyle\int_{-2\pi}^{-\frac{3\pi}{4}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \cos(2t)\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 21 Intégrale d'une fonction paire/impaire
Soit f une fonction continue sur $[-a,a]$ où $a>0$. Alors :

1. Si f est paire sur $[-a,a]$:
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$$
2. Si f est impaire sur $[-a,a]$:
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

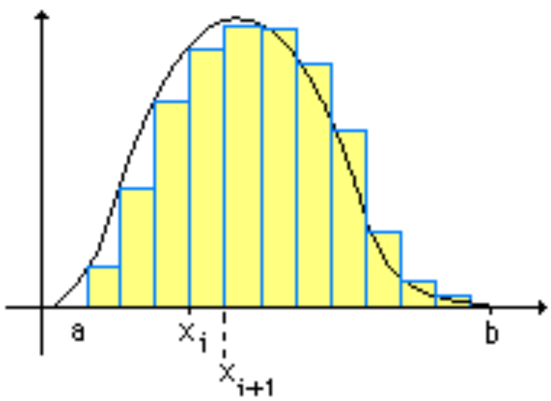
***Exemple* :** $\displaystyle\int_{-2}^{2} |t|\,\mathrm{d}t = 2\int_0^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \arctan\Big(\sin\big(\arctan(x)\big)\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$

2.3 Sommes de Riemann à pas constant

Définition 22 Somme de Riemann à pas constant
Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle somme de Riemann de f à pas constant d'ordre n le réel :

$$S_n(f;a,b) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Interprétation graphique : Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\frac{b-a}{n}.f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ est l'aire du rectangle de base $\left[a+(k-1)\frac{b-a}{n}, a+k\frac{b-a}{n}\right]$ et de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. $S_n(f;a,b)$ est la somme des aires de ces rectangles, le long du segment $[a,b]$.



Théorème 23 Théorème de la valeur moyenne
Si f est continue sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Cas particulier $a = 0$ et $b = 1$: Si f est continue sur $[0,1]$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

***Exemple* :** Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$.

Démonstration : La démonstration est à connaître dans le cas f f de classe C^1.

CQFD □

On en déduit une méthode numérique de calcul approchée d'une intégrale, appelée **méthode des rectangles**.

Interpétation géométrique de l'intégrale : on en déduit (intuitivement) que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est égale à l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

2.4 Formule de Taylor avec reste intégral

Cette formule est aussi appelée formule de Taylor-Mac Laurin. L'avantage par rapport à la formule de Taylor-Lagrange est qu'on a une expression plus précise du reste.

Théorème 24 Formule de Taylor avec reste intégral
Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$:

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!}.f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}.f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : Par récurrence et par IPP.

CQFD □

Exemple **:** Montrer que si $x \in]-1, 1]$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

3 Exercices

Exercice 1

1. Soit la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3+\frac{1}{x^2} \end{array}$$
   (a) Etudier f et tracer sa courbe $(\mathscr{C}_f)$ dans un repère orthonormé.
   (b) Soit $\lambda > 1$. Calculer l'aire $\mathscr{A}(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par $(\mathscr{C}_f)$ et les droites d'équations :
$$y = 2x-3, \qquad x = 1 \qquad \text{et} \qquad x = \lambda.$$
   (c) $\mathscr{A}(\lambda)$ a-t-elle une limite quand $\lambda \to +\infty$?
2. Reprendre cette étude avec la fonction
$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3+\frac{1}{x} \end{array}$$
   Conclusion ?

Exercice 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$. Établir que :
$$\left|\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}$$
et qu'on a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

Exercice 3 (Comparaison série-intégrale)

1. (a) En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k,k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'on a :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$
   (b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que :
$$\forall n \geq 2,\ \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$
   (c) En déduire que : $H_n \overset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. (a) Étudier la fonction $f : t \longmapsto \frac{\ln t}{t}$.
   (b) A l'aide d'une comparaison à une intégrale, déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$, lorque $n \to +\infty$.
   (c) En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$.

Exercice 4 On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle $I = [a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est de classe C^1,On considère le fonction G définie sur I par $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier que G est de classe C^1 sur I.

2. Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que : $G([a,b]) = [m,M]$.
3. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$
4. En déduire que :
$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant Mf(a).$$
5. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t.$$
6. On suppose que $a > 0$; montrer que : $\displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{2+b-a}{a}$.
7. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t = 0$

Exercice 5 Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 6 Soit : $\displaystyle G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$.

1. Donner l'ensemble de définition $\mathscr{D}_G$ de G.
2. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathscr{D}_G$.
3. Calculer G'. Conclusion ?

Exercice 7 Soit la fonction $\displaystyle f : x \longmapsto \int_0^{\sin x^2} \arcsin\sqrt{t}\,dt + \int_0^{\cos x^2} \arccos\sqrt{t}\,dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est π-périodique et paire.
3. Montrer que f est constante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et en déduire qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Donner la valeur de cette constante. On commencera par démontrer que :
$$\forall x \in [-1,1],\ \arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 8 On considère la fonction f définie par $\displaystyle f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Vérifier que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et donner $f'(x)$.
4. A l'aide du théorème des gendarmes, déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 9 Dans cet exercice, a est un réel strictement positif, $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a[$, nulle en 0. La fonction f est alors bijective de $[0,a]$ sur $[0, f(a)]$, de réciproque notée g. On veut montrer que, pour tout réel $t \in [0,a]$:
$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y = tf(t) \qquad (1).$$

1. Vérifier la relation (1) dans le cas où : $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}^*$.

   Pour tout $t \in [0, a]$, on note $\varphi(t)$ la quantité :

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{f(t)} g(y)\,\mathrm{d}y - tf(t).$$

2. Montrer que φ est définie et continue sur $[0, a]$, dérivable sur $]0, a[$.
3. En déduire l'égalité (1).

Exercice 10 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \left(\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}}$.

1. Calculer u_1.
2. Établir que : $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}$.
3. Soit $a \in [0,1]$. Montrer que : $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant (1-a)^{\frac{1}{n}} \dfrac{a}{1+a}$.
4. A l'aide d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $[0,1]$ judicieusement choisie, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 11 Pour $a \in [-1, 1]$, on considère la fonction f_a définie par : $f_a(x) = \left|1 - ae^{ix}\right|^2$.

1. Pour tout $a \in]-1,1[$ et tout $x \in [0, \pi]$ vérifier les propriétés suivantes :
   - $\left(1 - |a|\right)^2 \leqslant f_a(x) \leqslant \left(1 + |a|\right)^2$
   - $f_a(\pi - x) = f_{-a}(x)$
   - $f_{a^2}(x) = f_a\left(\frac{x}{2}\right) f_{-a}\left(\frac{x}{2}\right)$

   On pose, pour tout $a \in]-1,1[$: $g(a) = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(f_a(x)\right)\mathrm{d}x$.
2. Montrer que g est une fonction paire.
3. Montrer que : $\forall a \in]-1,1[$, $g(a^2) = 2g(a)$.
4. Montrer que g est continue en 0.
5. En déduire que : $\forall a \in]-1,1[$, $g(a) = 0$.

Exercice 12

1. Calculer la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^3} \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
2. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $x_n = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 13

1. Vérifier que : $\forall t > 0$, $\ln(t) \leqslant t - 1$.
2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n réels strictement positifs. En utilisant $a_k = \frac{x_k}{\overline{x}}$, où $\overline{x}$ est la moyenne des x_k, établir que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)$$

3. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives. Montrer que :

$$\int_0^1 \ln\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \leqslant \ln\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Exercice 14 (Méthode des rectangles) Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$.

1. Montrer qu'il existe une constant $C \geq 0$ telle que : $\forall (x,y) \in [a,b]^2$, $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|$.
2. En déduire qu'il existe une constante M ne dépendant que de f telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{M}{n}$$
3. En déduire un programme Turbo-Pascal qui permet de déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Même question en imposant une précision de 10^{-2}.

Exercice 15 On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et donner sa limite.
2. En déduire un équivalent de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \int_0^1 t^n \ln\left(1+t^2\right)\,dt.$$

Exercice 16 Pour $n, p \in \mathbb{N}$ on pose $I_{n,p} = \displaystyle\int_{-1}^1 (1+x)^n(1-x)^p\,dx$. Pour $n \geq 1$, exprimer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n-1,p+1}$, puis $I_{n,p}$ en fonction de $I_{0,n+p}$, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En déduire la valeur de $I_{n,p}$ en fonction de n et p.

Exercice 17 (Lemme de Riemann-Lebesgue) Soit f de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Exercice 18

1. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{u-1}{2u+1}\,\mathrm{d}u$.
2. (a) Déterminer des constantes réelles a et b telles que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $\dfrac{x+1}{x^2+4x+4} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{(x+2)^2}$.
   En déduire que $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+4x+4}\,dx = \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{6}$.

   (b) Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1} + \dfrac{c}{x^2+x+1}$.
   En déduire que $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln\left(\sqrt{3}\right) + \frac{\pi\sqrt{3}}{18}$.

Exercice 19 Calculer les intégrales ou les primitives suivantes :
$$\int_0^{\pi/4} \sin^4(x)\cos^3(x)\,dx, \quad \int e^{-x}\cos(x)\,dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx, \quad \int_0^1 t\arctan(t)\,dt$$

Exercice 20 Au moyen du changement de variable indiqué entre parenthèses calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dt}{\sin(t)} \qquad (u = \cos(t))$
2. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)}\,dx \qquad (u = \tan(x))$
3. $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\frac{\ln(x)}{x}\,dx \qquad (x = 1/t)$

Exercice 21 Soient $a < b$ deux réels et f continue sur $[a, b]$.
Montrer au moyen d'un changement de variable affine que $\displaystyle\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.
Application : calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,dt$.

Exercice 22 (ESCP 2013 1.11) Soit un réel x et un entier naturel $n > 0$; on note :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(-x)^p}{p+1}$$

1. Montrer que les relations $u_n = S_{2n}(1)$ et $v_n = S_{2n+1}(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ définissent deux suites réelles adjacentes. En déduire la convergence de la suite $(S_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ.

   Les questions suivantes sont indépendantes ; elles permettent toutes le calcul de ℓ.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x)$. Pour $x \in [0,1]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $f^{(k)}(x)$ puis déterminer $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]} |f^{(k)}(x)|$.
   En déduire la valeur de ℓ par application de l'inégalité de Taylor-Lagrange à f sur $[0,1]$.
3. Établir que, pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n > 0$:

   $$S_{2n}(x) \leq f(x) \leq S_{2n+1}(x)$$

   et en déduire la valeur de ℓ.
4. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$: $\displaystyle S_{2n}(1) = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
   En déduire la valeur de ℓ en faisant apparaître une somme de Riemann.
5. Montrer que pour tout entier $n > 0$:

   $$S_n(1) = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$$

   et en déduire la valeur de ℓ.