Chapitre 19

Applications linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications linéaires

Dans tout ce paragraphe, $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ désignent deux $\mathbb{K}$-ev.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 Application linéaire
Soit f une application définie sur $\mathbb{E}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$:

$$f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$$

On dit que f est linéaire lorsque :

1. $\forall (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in \mathbb{E}^2,\ f(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = f(\vec{x_1}) + f(\vec{x_2})$
2. $\forall (\alpha, \vec{x_1}) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E},\ f(\alpha.\vec{x_1}) = \alpha.f(\vec{x_1})$

On note $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

$\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est donc une partie de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$.

<u>Vocabulaire et notations</u> :

• Si $\mathbb{E} = \mathbb{F}$, $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})$ est noté plus simplement $\mathscr{L}(\mathbb{E})$. Les éléments de $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ sont appelés **endomorphismes de** $\mathbb{E}$.

• Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ est bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f est appelée **isomorphisme de** $\mathbb{E}$ **sur** $\mathbb{F}$.

• Si f est à la fois un endomorphisme de $\mathbb{E}$ et un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, c'est-à-dire que $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ est linéaire et bijective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}$, alors f est appelée **automorphisme de** $\mathbb{E}$. L'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$ est noté $Gl(\mathbb{E})$.

• Si $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ alors les applications linéaires $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{K}$ sont appelées **formes linéaires sur** $\mathbb{E}$.

Exemple **:** Application nulle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$.

$$\begin{array}{rccl} O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0_{\mathbb{F}}} \end{array}$$

Elle est linéaire, donc $O_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})} \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Exemple **:** Application identité de $\mathbb{E}$.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{id}_{\mathbb{E}}: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & \overrightarrow{x} & \longmapsto & \mathrm{id}_{\mathbb{E}}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x} \end{array}$$

Elle est linéaire et bijective, donc $\mathrm{id}_{\mathbb{E}} \in Gl(\mathbb{E})$.

Exemple **:** Somme des composantes d'un n-uplet.

$$\begin{array}{rccl} S: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \overrightarrow{u} = (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & S\left(\overrightarrow{u}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Elle est linéaire, donc S est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

Exemple **:** Intégrale d'une fonction continue. On note $\mathscr{C}([a,b])$ l'ensemble des fonction numériques continues sur $[a,b]$.

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathscr{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & I(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

Elle est linéaire, donc I est une forme linéaire sur $\mathscr{C}([a,b])$.

Théorème 2 Critère de linéarité

Soit $f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ une application. On a équivalence de :

1. f est linéaire ;
2. $\forall \left(\alpha, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) \in \mathbb{K} \times \mathbb{E}^2,\ f\left(\alpha.\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}\right) = \alpha.f\left(\overrightarrow{x_1}\right) + f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$

C'est ce critère qu'on utilise en pratique pour montrer qu'une application est linéaire.

Exemple **:** Un exemple de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{u}\right) = f(x,y,z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$

Elle est linéaire, ce qui se note $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Proposition 3 Propriétés des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $f\left(\overrightarrow{0_E}\right) = \overrightarrow{0_F}$;
2. $\forall \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right) \in \mathbb{E}^2,\ f\left(\overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}\right) = f\left(\overrightarrow{x_1}\right) - f\left(\overrightarrow{x_2}\right)$
   en particulier $\forall \overrightarrow{x_1} \in \mathbb{E},\ f\left(-\overrightarrow{x_1}\right) = -f\left(\overrightarrow{x_1}\right)$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall \left(\overrightarrow{x_1},\dots,\overrightarrow{x_n}\right) \in \mathbb{E}^n,\ \forall (\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ f\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \overrightarrow{x_k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.f\left(\overrightarrow{x_k}\right)$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

1.2.1 Restriction

Théorème 4 Restriction d'une application linéaire à un sev
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, si $\mathbb{G}$ est un sev de $\mathbb{E}$, et si $\mathbb{H}$ est un sev de $\mathbb{F}$ tel que $f(\mathbb{G}) \subseteq \mathbb{H}$, alors $f_{|\mathbb{G}}^{|\mathbb{H}} \in \mathscr{L}(\mathbb{G},\mathbb{H})$.

Autrement dit, la restriction d'une application linéaire à un sev est encore une application linéaire.

1.2.2 Somme et multiplication par un scalaire

Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit les applications $f+g : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ et $\alpha.f : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{E}, \quad \begin{aligned} (f+g)(\vec{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \\ (\alpha.f)(\vec{x}) &\stackrel{\text{def}}{=} \alpha.f(\vec{x}) \end{aligned}$$

Proposition 5 Opérations dans $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$
Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $f+g \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $\alpha.f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

Corollaire 6 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$
Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ muni des deux opérations ci-dessus est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^{\mathbb{E}}$).

En particulier $\mathscr{L}(\mathbb{E})$ est aussi un $\mathbb{K}$-ev.

1.2.3 Composition

Théorème 7 Composition d'applications linéaires
On se donne un troisième $\mathbb{K}$-ev noté $\mathbb{G}$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{G})$.
2. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$ et g est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{G}$, alors $g \circ f$ est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{G}$.
3. Si f et g sont deux automorphismes de $\mathbb{E}$, alors $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Proposition 8 Règles de calcul dans $(\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}), +, ., \circ)$
On se donne $(f_1, f_2) \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})^2$ et $(g_1, g_2) \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})^2$.

1. $\circ$ est distributive par rapport à $+$:
   $g_1 \circ (f_1 + f_2) = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$ et $(g_1 + g_2) \circ f_1 = g_1 \circ f_1 + g_2 \circ f_2$.
2. Si $\alpha \in \mathbb{K}$: $g_1 \circ (\alpha.f_1) = \alpha.(g_1 \circ f_1) = (\alpha.g_1) \circ f_1$.

Rappelons que $\circ$ est aussi associative, mais non commutative : $g \circ f \neq f \circ g$ en général.

Définition 9 Puissance d'un endomorphisme
Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$, on pose $f^0 = \mathrm{id}\mathbb{E}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

D'après les résultats précédents, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.

Proposition 10 Règles de calcul
Si $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a : $\left(f^n\right)^p = f^{np} = \left(f^p\right)^n$ et $f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n$.

Par contre, en général : $\left(g \circ f\right)^n \neq g^n \circ f^n$.

Lemme 11 Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g \circ f = f \circ g$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(g \circ f\right)^n = g^n \circ f^n$.

On dispose même d'une formule du binôme !

Théorème 12 Formule du binôme de Newton, version endomorphisme
Si $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathbb{E})^2$ commutent, ie $g \circ f = f \circ g$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f+g)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . f^k \circ g^{n-k} = (g+f)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} . g^k \circ f^{n-k}$$

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $g \circ f \neq f \circ g$.
Par exemple, on a : $(f+g)^2 = f^2 + f \circ g + g \circ f + g^2 \neq f^2 + 2.f \circ g + g^2$.

1.2.4 Bijection réciproque

Théorème 13 Bijection réciproque d'un iso/automorphisme

1. Si f est un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F}$, alors f^{-1} est un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{E}$.
2. Si f est un automorphisme de $\mathbb{E}$, alors f^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{E}$.

Définition 14 Puissances négatives d'un automorphisme
Soit f un automorphisme de $\mathbb{E}$. On pose :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$;
• pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, $f^n = \underbrace{\left(f^{-1}\right) \circ \left(f^{-1}\right) \circ \cdots \circ \left(f^{-1}\right)}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 15 Règles de calcul
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(f^n\right)^p = f^{np} = \left(f^p\right)^n$ et $f^n \circ f^p = f^{n+p} = f^p \circ f^n$ et $\left(f^{-1}\right)^n = f^{-n}$.

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Définition 16 Noyau et image
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle noyau de f la partie de $\mathbb{E}$ suivante :
$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}\left(\{\overrightarrow{0_F}\}\right) = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}\right\}$$
On a donc pour $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$:
$$\overrightarrow{x} \in \operatorname{Ker}(f) \iff f\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{0}$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, on appelle image de f la partie de $\mathbb{F}$ suivante :
$$\operatorname{Im}(f) = f(\mathbb{E}) = \left\{f\left(\overrightarrow{x}\right) \in \mathbb{F} / \ \overrightarrow{x} \in \mathbb{E}\right\}$$
On a donc pour $\overrightarrow{y} \in \mathbb{F}$:
$$\overrightarrow{y} \in \operatorname{Im}(f) \iff \exists \overrightarrow{x} \in \mathbb{E} / \ \overrightarrow{y} = f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

Théorème 17 $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des $\mathbb{K}$-ev
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors $\operatorname{Ker}(f)$ est un sev de $\mathbb{E}$ et $\operatorname{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$.

***Exemple* :** On considère l'application :
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{u} = (x,y,z) & \longmapsto & f\left(\overrightarrow{u}\right) = f(x,y,z) = (2x - z, x + y + z) \end{array}$$
Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

***Exemple* :** $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})} \iff \operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$.

⚠ ATTENTION : en particulier $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ne donne pas $f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ ou $g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$. Prendre par exemple $f(x,y) = (x,x)$ et $g(x,y) = x - y$.

⚠ ATTENTION : $\text{Im}(f) = \text{Im}(g)$ ne donne pas que $f = g$. Prendre par exemple $f(x, y) = x$ et $g(x, y) = x + y$.

Théorème 18 Critères d'injectivité et de surjectivité
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$. Alors :

1. f est injective sur $\mathbb{E} \Longleftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}$.
2. f est surjective de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{F}$.

Le premier point n'est vrai que si f est linéaire. Par contre le second est vrai en général, quelle que soit l'application (il ne sera donc pas très utile en pratique).

Cas d'une restriction : Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $\mathbb{H}$ sev de $\mathbb{E}$, on a $\text{Ker}(f_{|\mathbb{H}}) = \text{Ker}(f) \cap \mathbb{H}$. Donc si f est injective, $f_{|\mathbb{H}}$ l'est encore. On a aussi $\text{Im}(f_{|\mathbb{H}}) \subseteq \text{Im}(f)$, mais dans le cas général, on ne peut rien dire de plus.

1.4 Image d'une famille de vecteurs

Si $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_i})_{i \in I}$ famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, alors on définit $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i \in I}$ qui est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, appelée famille image de la famille $\mathscr{F}$ par f. Comme les familles $\mathscr{F} = (\overrightarrow{u_i})_{i \in I}$ et $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_i})\right)_{i \in I}$ sont indexées par le même ensemble d'indices, elles ont le même nombre de vecteurs.

En particulier si $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, alors $f(\mathscr{F}) = \left(f(\overrightarrow{u_1}), \dots, f(\overrightarrow{u_p})\right)$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{F}$.

Théorème 19 Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base
Si $\mathscr{B} = (\overrightarrow{\varepsilon_i})_{i \in I}$ est une base de $\mathbb{E}$ et si $(\overrightarrow{v_i})_{i \in I}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{F}$, alors il existe une unique application $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que $\forall i \in I$, $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = \overrightarrow{v_i}$.
Elle est définie ainsi : si $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$ a pour coordonnées $(\lambda_i)_{i \in I}$ dans $\mathscr{B}$, alors $f(\overrightarrow{x}) = \sum_{i \in I} \lambda_i . f(\overrightarrow{x_i})$.

Il faut retenir deux points :
• pour définir $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$, il suffit de se donner la valeur des vecteurs $f(\overrightarrow{\varepsilon_i})$, pour $i \in I$;
• pour montrer que $f \equiv g$, ie que $f(\overrightarrow{x}) = g(\overrightarrow{x})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{E}$, il suffit de vérifier que : $f(\overrightarrow{\varepsilon_i}) = g(\overrightarrow{\varepsilon_i})$ pour tout $i \in I$.

Théorème 20 Image d'une famille de vecteurs
Soient $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$.

1. On a : $f(\text{Vect}[\mathscr{F}]) = \text{Vect}\left[f(\mathscr{F})\right]$
2. En particulier si $\mathscr{B}$ est génératrice (ou une base) de $\mathbb{E}$: $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left[f(\mathscr{B})\right]$

Théorème 21 Applications linéaires et familles de vecteurs
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1.
$$f \text{ est injective sur } \mathbb{E} \Longrightarrow \forall \mathscr{F} \text{ famille libre de } \mathbb{E}, f(\mathscr{F}) \text{ famille libre de } \mathbb{F}$$

De plus :

$$f \text{ est injective sur } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ famille libre de } \mathbb{F}$$

et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

2.
$$f \text{ est surjective de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longrightarrow \forall \mathscr{F} \text{ famille génératrice de } \mathbb{E}, f(\mathscr{F}) \text{ génératrice de } \mathbb{F}$$

De plus :

$$f \text{ est surjective de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ génératrice de } \mathbb{F}$$

et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

3.
$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longrightarrow \forall \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E}, f(\mathscr{B}) \text{ base de } \mathbb{F}$$

De plus :

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \Longleftrightarrow \text{ il existe } \mathscr{B} \text{ base de } \mathbb{E} \text{ telle que } f(\mathscr{B}) \text{ base de } \mathbb{F}$$

et c'est alors vrai pour toutes les bases de $\mathbb{E}$.

1.5 Projections

Définition 22 Projection
Soient $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ deux sev de $\mathbb{E}$, tels que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.
L'application :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_F} \end{array}$$

est appelée projection sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.
De même l'application :

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} & \longmapsto & p(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_G} \end{array}$$

est appelée projection sur $\mathbb{G}$ parallèlement à $\mathbb{F}$.
p et q sont appelés projections associées à la somme directe $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$.

Lorsqu'on montre que $\mathbb{E} = \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}$ par analyse-synthèse, les formules obtenues dans la partie analyse donnent une expression de $p(\overrightarrow{x})$.

***Exemple* :** Déterminer l'expression de la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 23 Propriétés des projections

1. p et q sont des endomorphismes de $\mathbb{E}$;
2. $p+q=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$;
3. $p\circ q=q\circ p=0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$, $p\circ p=p$ et $q\circ q=q$;
4. Pour $\vec{x}\in\mathbb{E}$: $\vec{x}\in\mathrm{Ker}(p)\Longleftrightarrow p(\vec{x})=\vec{0}$ et $\vec{x}\in\mathrm{Im}(p)\Longleftrightarrow p(\vec{x})=\vec{x}$;
5. $\mathrm{Ker}(p)=\mathbb{G}=\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Im}(p-\mathrm{id}_{\mathbb{E}})$ et $\mathrm{Im}(p)=\mathbb{F}=\mathrm{Ker}(q)=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_{\mathbb{E}})=$ ensemble des points fixes de p

⚠ ATTENTION : si p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{E}$, on n'a pas en général $p\circ q=0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$! Sauf si p et q sont deux projecteurs **associés**, ie si $p+q=\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$.

Définition 24 Projecteurs
Soit f un endomorphisme de $\mathbb{E}$. On dit que f est un projecteur lorsque $f\circ f=f$.

Théorème 25 Caractérisation des projections
Soit p un endomorphisme de $\mathbb{E}$. Alors p est une projection si et seulement si p est un projecteur, ie $p\circ p=p$.
On a alors $\mathbb{E}=\mathrm{Ker}(p)\oplus\mathrm{Im}(p)$ et p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Exemple **:** Calculer $(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}+p)^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, lorsque p est un projecteur de $\mathbb{E}$.

⚠ ATTENTION : si f est un endomorphisme de $\mathbb{E}$, qui n'est pas un projecteur, alors on ne peut pas dire que $\mathbb{E}=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

Noter que $0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ sont deux projecteurs associés de $\mathbb{E}$ associés à la somme directe $\mathbb{E}=\mathbb{E}\oplus\left\{\vec{0}_{\mathbb{E}}\right\}$.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Rang d'une application linéaire

Définition 26 Rang d'une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f\in\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
On appelle rang de f le nombre entier naturel : $\mathrm{rg}(f)=\dim\left[\mathrm{Im}(f)\right]$.

Si $\mathscr{B}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_p)$ est une base de $\mathbb{E}$, on rappelle que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}\left[f(\vec{u}_1),\dots,f(\vec{u}_p)\right]$. en particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de $\mathbb{F}$ de dimension finie (même si $\mathbb{F}$ ne l'est pas), et $\mathrm{rg}(f)$ est donc bien défini.

Proposition 27 Propriétés du rang d'une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. Si $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{u}_1,\ldots,\overrightarrow{u}_p\right)$ est une base de $\mathbb{E}$:
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left[f(\mathscr{B})\right] = \mathrm{rg}\left[f(\overrightarrow{u}_1),\ldots,f(\overrightarrow{u}_p)\right]$$
2. $\mathrm{rg}(f) \leq \min\left(\dim(\mathbb{E}),\dim(\mathbb{F})\right)$ (même si $\dim(\mathbb{F}) = +\infty$)
3. $\mathrm{rg}(f) = 0 \iff f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})}$

Le théorème suivant est fondamental, puisqu'il relie la dimension du noyau à celle de l'image.

Théorème 28 Théorème du rang
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$. On a :
$$\dim(\mathbb{E}) = \mathrm{rg}(f) + \dim\left[\mathrm{Ker}(f)\right]$$

⚠ ATTENTION : dans le cas $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, cela ne signifie pas que $\mathbb{E} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 29 Isomorphisme entre les supplémentaires du noyau et l'image
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.
Si $\mathbb{H}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathbb{E}$, alors $\mathbb{H}$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(f)$.

Corollaire 30 Hyperplan et forme linéaire Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors :
$$\mathbb{H} \text{ est un hyperplan de } \mathbb{E} \iff \mathbb{H} \text{ est le noyau d'une forme linéaire non nulle}$$

Démonstration : $\boxed{\Longrightarrow}$ Si $\mathbb{E} = \mathbb{H} \oplus \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$, considérer $\varphi : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{h} + \lambda_x.\overrightarrow{u} \in \mathbb{E} \longmapsto \lambda_x \in \mathbb{K}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Conséquence du théorème du rang.

CQFD □

Corollaire 31 Surjectivité des formes linéaires en dimension finie Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors toute forme linéaire définie sur $\mathbb{E}$, non nulle, est surjective.

Théorème 32 Injectivité, surjectivité et rang
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. $\mathrm{rg}(f) \leq \min\big(\dim(\mathbb{E}), \dim(\mathbb{F})\big)$.
2. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{E}) \iff f$ injective.
3. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{F}) \iff f$ surjective.
4. Si $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F}) = n$:

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \iff \mathrm{rg}(f) = n$$

Théorème 33 Injectivité et surjectivité en dimension finie
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

1. On suppose que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$. Alors :

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ isomorphisme}$$

2. On suppose que $\mathbb{E} = \mathbb{F}$. Alors :

$$f \text{ injective } \iff f \text{ surjective } \iff f \text{ automorphisme}$$

⚠ Attention : ce résultat est faux en dimension infinie. Considérer par exemple l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & XP \end{array}$$

Corollaire 34 Inversibilité à gauche/droite en dimension finie
Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tels que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$.
Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{E})$. Alors :

$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{E}} \implies f \text{ et } g \text{ isomorphismes et } f^{-1} = g$$

et donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$.

On utilisera principalement ce résultat sur les endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de dimension finie.

⚠ ATTENTION : ceci n'est vrai qu'en dimension finie ! Considérer comme contre-exemple le morphisme « shift » sur les suites réelles.

Théorème 35 Rang d'une composée - Invariance du rang par isomorphisme
Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$. Alors :

1. Rang d'une composée : $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f)\big)$;
2. Invariance du rang par isomorphisme :
   si g est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f)$;
   si f est un isomorphisme : $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(g)$.

Démonstration : Pour montrer que $\mathrm{rg}(g\circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$ on utilise le théorème du rang.

CQFD □

2.2 Matrice d'une famille finie de vecteurs

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{B} = \big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\big)$ une base de $\mathbb{E}$.

On a vu que tout $x \in \mathbb{E}$ s'écrit de manière unique : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k.\varepsilon_k$, où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.

On associe alors à x la matrice colonne :

$$X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) = \mathrm{Mat}(x, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

Plus généralement, si $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{E}$, on lui associe la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ telle que la j-ième colonne de A est égale aux coordonnées du vecteur u_j dans la base $\mathscr{B}$:

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}(\mathscr{F}, \mathscr{B}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u_1 & \dots & u_j & \dots & u_p \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \varepsilon_i \\ \vdots \\ \leftarrow \varepsilon_n \end{array} \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathscr{B}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\varepsilon_k$

Définition 36 Matrice d'une famille finie de vecteurs
La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}(\mathscr{F}, \mathscr{B})$ est appelée matrice associée à la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{E}$ de dimension n), alors toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie une famille de p vecteurs $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$ telle que :

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F})$$

***Exemple* :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ donne dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ la famille $\mathscr{F} = \big((1,0,3);(2,1,0)\big)$.

***Exemple* :** La même matrice A donne dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ la famille $\mathscr{F} = \big(1 + 3X^2, 2 + X\big)$.

2.3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$, et $\mathscr{B} = \big(e_1, e_2, \dots, e_p\big)$ une base de $\mathbb{E}$.

Soient $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{C} = \big(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\big)$ une base de $\mathbb{F}$.

On a vu que $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ est entièrement déterminée par la donnée de la famille $\mathscr{F} = \big(f(e_1), \dots, f(e_p)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{F}$, grâce à la formule suivante :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_p)^{\mathscr{B}} \text{ alors } f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k . f(e_k)$$

Or on vient de voir que la famille $\mathscr{F}$ est entièrement déterminée par la donnée de sa matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathscr{C}$. Par conséquent l'application linéaire f est elle aussi entièrement déterminée par la donnée de la matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On note donc :

$$A = \underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad \varepsilon_1 \\ \qquad \vdots \\ \leftarrow \quad \varepsilon_i \\ \qquad \vdots \\ \leftarrow \quad \varepsilon_n \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $f(e_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathscr{C}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} . \varepsilon_k$

On peut remarquer que $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C}) = \mathrm{Mat}\big(f(\mathscr{B});\mathscr{C}\big)$. La matrice de gauche est celle d'une application linéaire dans des bases, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 37 Matrice d'une application linéaire dans des bases
La matrice $\underset{\mathscr{B},\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B},\mathscr{C})$ est appelée matrice associée à f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ (donc $\mathbb{E}$ de dimension p), un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{F}$ de base $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{F}$ de dimension n), alors toute matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ définie une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ telle que :

$$A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{C})$$

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donne, dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et R^2, $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ telle que :

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (1,2) \\ f(0,1,0) & = & (0,1) \\ f(0,0,1) & = & (1,1) \end{array}$$

et d'expression analytique : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = x.f(1,0,0) + y.f(0,1,0) + z.f(0,0,1) = (x+z, 2x+y+z)$.

Définition 38 Application linéaire canoniquement associée
Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'application $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ définie par A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et K^n.

Cas des endomorphismes : Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, et $\mathscr{B} = \left(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\right)$ une base de $\mathbb{E}$.

On associe à $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ la matrice $A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée plus simplement $\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B})$ ou $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$:

$$A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(\varepsilon_1) & \dots & f(\varepsilon_j) & \dots & f(\varepsilon_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow \ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \leftarrow \ \varepsilon_i \\ \vdots \\ \leftarrow \ \varepsilon_n \end{array}$$

où on a posé : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $f(\varepsilon_j) = (a_{1j}, \dots, a_{nj})^{\mathscr{C}} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\varepsilon_k$

On a donc $\mathrm{Mat}(f;\mathscr{B}) = \mathrm{Mat}\left(f(\mathscr{B});\mathscr{B}\right)$. La matrice de gauche est celle d'un endomorphisme dans une base, et celle de droite la matrice d'une famille de vecteurs dans une base.

Définition 39 Matrice d'un endomorphisme dans une base
La matrice $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$ est appelée matrice carrée associée à l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}$.

Réciproquement : si on fixe un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$ de base $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ (donc $\mathbb{F}$ de dimension n), alors toute matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que :

$$A = \mathrm{Mat}(f;\mathscr{B})$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}_n[X]$ on considère l'endomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ est :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 40 Endomorphisme canoniquement associé
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle endomorphisme canoniquement associé à A, l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ défini par A dans la base canonique de K^n.

Cas des formes linéaires : Dans ce cas $\mathbb{F} = \mathbb{K}$ et on prend comme base de $\mathbb{K}$: $\mathscr{C} = (1)$. On remarque que la matrice asociée à une forme linéaire est une matrice ligne. Si $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{E}$:

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2) & \dots & f(\varepsilon_n) \end{pmatrix}$$

Exemple : Dans $\mathbb{K}^n$, on considère la forme linéaire :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \end{array}$$

Sa matrice associée dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{K}^n$ est :

$$\operatorname*{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Interprétation du produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}p1(\mathbb{K})$, le produit $A \times X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est donné par :

$$A \times X = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times x_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

ie que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times x_k$$

Théorème 41 Produit matriciel et image d'un vecteur par une application linéaire
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B}$ et de dimension $p \geq 1$, $\mathbb{F}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{C}$ et de dimension $n \geq 1$, $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{E}$ et $y \in \mathbb{F}$.
On note $A = \mathrm{Mat}((;\mathscr{B},\mathscr{C})f) \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $X = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K})$ et $Y = \underset{\mathscr{C}}{\mathrm{Mat}}(y) \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$. Alors :

$$y = f(x) \iff Y = A \times X$$

Corollaire 42 Égalité de deux matrices
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. On a :
$$A = B \iff \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = B \times X$$
2. On a :
$$A = 0_{np} \iff \forall X \in \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{K}), \quad A \times X = 0_{n1}$$

Le théorème précédent indique aussi comment trouver l'expression analytique d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$.

***Exemple* :** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ z \\ x+2y+z \end{pmatrix}$$

donc $f(x,y,z) = (x+2y+z, z, x+2y+z)$.

***Exemple* :** On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{23}(\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{L}\big(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}_1[X]\big)$ l'application linéaire associée dans les bases canoniques. Pour tout $P = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$:

$$A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+c \\ -a+b-c \end{pmatrix}$$

donc $f(a+bX+cX^2) = (a-b+c) + (-a+b-c)X$.

Définition 43 Noyau et image d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. On appelle noyau de A la partie de $\mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$ suivante :
$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{X \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) \middle/ AX = 0_{p1}\right\}$$
2. On appelle image de A la partie de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ suivante :
$$\mathrm{Im}(A) = \left\{AX \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \middle/ X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right\}$$
3. On dit que A est injective lorsque $\mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{p1}\right\}$.
4. On dit que A est surjective lorsque $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Notons $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\right)$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors :
$$(x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{Ker}(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$$
et donc :
$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow A \text{ est injective}$$
De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(f)$.

De même :
$$(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(A)$$
et donc :
$$f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow A \text{ est surjective}$$
De plus en identifiant $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$, on peut considérer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(f)$.

2.5 Interprétation du produit de deux matrices

Théorème 44 Produit matriciel et composition d'applications linéaires
Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$, G trois K-ev de base respective $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$, ainsi que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{F})$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{F}, \mathbb{G})$.
On a alors :
$$\mathrm{Mat}(g \circ f, \mathcal{B}, \mathcal{D}) = \mathrm{Mat}(g, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathrm{Mat}(f, \mathcal{C}, \mathcal{D})$$

Ce théorème justifie la définition choisie pour le produit matriciel : il correspond à la composée des applications linéaires associées aux matrices. On comprend mieux pourquoi le produit matriciel est non commutatif et non intègre : il hérite ces propriétés de la composition des applications linéaires.

⚠ Rappelons à toutes fins utiles que $g \circ f = 0$ ne donne pas $f = 0$ ou $g = 0$, et en général $f \circ g \neq g \circ f$.

Donnons maintenant le lien entre matrice identité et application identité.

Proposition 45 Lien entre matrice identité et application identité
Si $\mathbb{E}$ est un K-ev de dimension $n \geq 1$, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, on a : $\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathrm{id}_{\mathbb{E}}) = I_n$.

Remarquer que cette relation est vraie dans toutes les bases de $\mathbb{E}$.

Les différentes règles de calcul vue pour le produit matriciel peuvent ainsi être rédémontrées via les applications linéaires.

***Exemple* :** Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, montrer que $A \times I_p = I_n \times A = A$.

2.6 Cas des endomorphismes et des matrices carrées

On a défini les puissances entières d'une matrice carrée et d'un endomorphisme. Ces deux notions sont liées par le théorème suivant.

Proposition 46 Puissances de matrices et d'endomorphismes
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et de base $\mathscr{B}$, et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. On a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^p\right) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^p$$

Donnons maintenant le lien entre matrices carrées inversibles et automorphismes.

Théorème 47 Matrices inversibles et isomorphismes/automorphismes

1. Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, tels que $\dim(\mathbb{E}) = \dim(\mathbb{F})$, et de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. On a :

$$f \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{E} \text{ sur } \mathbb{F} \iff A = \mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{C}) \text{ est inversible}$$

   et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\mathrm{Mat}(f; \mathscr{B}, \mathscr{C})\right)^{-1} = \mathrm{Mat}\left(f^{-1}; \mathscr{C}, \mathscr{B}\right)$$

2. Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie de base $\mathscr{B}$. On a :

$$f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{E} \iff A = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f) \text{ est inversible}$$

   et dans ce cas :

$$A^{-1} = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^{-1} = \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^{-1}\right)$$

   et :

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}\left(f^p\right) = \left(\underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(f)\right)^p$$

Par analogie avec $Gl_n(\mathbb{K})$, on note $Gl(\mathbb{E})$ l'ensemble des automorphismes de $\mathbb{E}$. On l'appelle le **groupe linéaire de** $\mathbb{E}$. $(Gl(\mathbb{E}), \circ)$ a une structure de groupe d'élément neutre $\mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, mais $(Gl(\mathbb{E}), +, .)$ n'est pas un $\mathbb{K}$-ev (car non stable pour l'addition).

Corollaire 48 Familles de vecteurs et matrices inversibles
Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n, et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{E}$. Alors :

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } \mathbb{E} \Longleftrightarrow \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(\mathscr{F}) \text{ est une matrice inversible}$$

Ce résultat donne en particulier un moyen simple de montrer qu'une matrice est inversible : vérifier que ses colonnes forment une famille libre.

Exemple **:** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne l'est pas.

Théorème 49 Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à gauche ;
(iii) A est inversible à droite ;
(iv) A est injective :

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}), \quad \left[AX = 0_{n1} \Longrightarrow X = 0_{n1} \right]$$

(v) A est surjective :

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}), \quad \exists X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \big/ \ Y = AX$$

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

<u>**Bilan**</u> **: Comment montrer qu'une matrice est inversible ?** On vient de voir plusieurs méthodes :
• <u>avec calcul de l'inverse</u> :
- s'aider d'un polynôme annulateur pour montrer qu'elle est inversible à gauche ou à droite ;
- méthode du système linéaire ;
• <u>sans calcul de l'inverse</u> :
- montrer que ses sont colonnes libres (ie que ses colonnes représentent une base) ;
- montrer qu'elle représente un automorphisme ;
- montrer qu'elle est injective ;
- remarquer qu'elle est triangulaire et regarder si ses coefficients diagonaux sont nuls.

<u>**Rappels sur les polynômes annulateurs.**</u>

Les polynômes annulateurs sont utilisés pour étudier l'inversibilité d'une matrice carrée, comme le montre les exemples suivants.

Exemple **:** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3 - A^2 = 4A - 3I_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Exemple **:** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$ et en déduire que A n'est pas inversible.

Ils sont aussi utilisés pour calculer des puissances de matrices carrées.

Exemple **:** Reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ qui vérifie $A^3 - 2A^2 - 8A = 0_3$.
Le polynôme $X^3 - 2X^2 - 8X$ est annulateur de A. On effectue la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X^2 - 8X$. On sait que le reste sera de degré au plus 2 donc on peut écrire :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 8X).Q(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$$

Pour calculer a, b et c on remarque $X^3 - 2X^2 - 8X = X(X-4)(X+2)$ et donc que -2, 0 et 4 sont racines de $X^3 - 2X^2 - 8X$. On obtient : $a_n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)$, $b_n = \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)$ et $c_n = 0$ pour $n \geq 1$ (le cas $n = 0$ est différent car $0^0 = 1$).
Donc :

$$\forall n \geq 1, \quad A^n = \frac{1}{6}\left(4^{n-1} - (-2)^{n-1}\right)A^2 + \frac{1}{3}\left(4^{n-1} - (-2)^n\right)A$$

2.7 Rang d'une matrice

Définition 50 Rang d'une matrice
Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, on note $\mathscr{F}$ la famille de p vecteurs définie par les colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On appelle alors rang de A, l'entier naturel défini par :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim\left[\mathrm{Vect}(\mathscr{F})\right]$$

Exemple **:** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Théorème 51 Lien avec les autres notions de rang

1. Si $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{E}$, $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et si A est la matrice de $\mathscr{F}$ dans une certaine base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{E}$, alors :
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$$
2. Si $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$ avec $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et si A est la matrice de f dans des base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{E}$ et de $\mathbb{F}$, alors :
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$$
3. Si (S) est un système linéaire, et si A est la matrice de ses coefficients, alors :
$$\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(A)$$

Démonstration :

1. On pose $n = \dim(\mathbb{E})$ et on considère l'isomorphisme
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \underset{\mathscr{B}}{\mathrm{Mat}}(x) \end{array}$$
On note aussi $\mathscr{F} = (u_1, \dots, u_p)$. Alors :
$$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(u_1, \dots, u_p) = \mathrm{rg}\big(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_p)\big) = \mathrm{rg}(A)$$
où la seconde égalité vient du fait que φ est linéaire injective.
2. Par définition $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\big(f(\mathscr{B})\big)$, et d'après le résultat précédent $\mathrm{rg}\big(f(\mathscr{B})\big) = \mathrm{rg}(A)$.
3. Voir matrices échelonnées.

CQFD □

Théorème 52 Règles de calcul du rang

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n, p)$.
2. Si $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(AB) \leq \min\big(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B)\big)$.
   Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible : $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(A)$.
   Si $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible : $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$.
3. Les opérations élémentaires ne modifient pas le rang de la matrice

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 53 Rang et inversibilité

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :
$$A \text{ est inversible} \iff \mathrm{rg}(A) = n$$

Définition 54 Matrice échelonnée en ligne
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est échelonnée en ligne lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a au moins une inconnue en moins « sur la gauche ».

Exemple **:** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne, mais $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

Définition 55 Matrice sous forme réduite de Gauss
Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On dit qu'elle est sous forme réduite de Gauss lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) le premier terme non nul de la ligne i est en position i (ie sur la diagonale).
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a exactement une inconnue en moins « sur la gauche ».

L'algorithme du pivot de Gauss effectué sur les lignes d'une matrice la transforme en une matrice sous forme réduite de Gauss.

Proposition 56 Lien entre matrice sous forme réduite de Gauss et matrice échelonnée en ligne
Une matrice sous forme réduite de Gauss et matrice échelonnée en ligne.
La réciproque est fausse.

Exemple **:** $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est sous forme réduite de Gauss donc échelonnée en ligne,
et $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ est échelonnée en ligne mais non sous forme réduite de Gauss.

Théorème 57 Rang d'une matrice échelonnée en ligne
Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est échelonnée en ligne, alors $\text{rg}(A)$ est égale au nombre de lignes non nulles.

Exemple **:** $\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 3.$

Calcul pratique du rang : Si on ne trouve pas de relations entre les colonnes qui simplifient les calculs, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour transformer A en une matrice sous forme réduite de Gauss (ou échelonnée en ligne). On déduit alors son rang, puisque les opérations élémentaires laissent invariant le rang d'une matrice.

***Exemple* :** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

Mais il ne faut pas perdre de vue qu'on peut souvent conclure sans le pivot de Gauss (dont les calculs sont lourds) : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 0_{n-2} & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} = 2.$

Le résultat suivant ne sera pas démontré.

Théorème 58 Rang de la transposée
Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathrm{rg}\left({}^tA\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Application au calcul du rang : On peut effectuer le pivot de Gauss sur les colonnes de A pour calculer son rang. On dira qu'une matrice A est échelonnée en colonnes, si ${}^tA$ est échelonnée en linges. La rang d'une matrice échelonnée en colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.

***Exemple* :** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$

3 Exercices

Applications linéaires

Exercice 1 Soient $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ trois $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{F},\mathbb{G})$. Montrer que : $g \circ f = 0 \iff \operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

Exercice 2 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et f, g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im}(g)$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) = f\big(\operatorname{Ker}(g \circ f)\big)$.
3. On suppose que f et g commutent i.e. $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Im}(g)$ sont stables par f.

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x, y, z) = (x^2 + z, y + z, z + 1)$. f est-elle linéaire ?
2. Soit $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(x, y, z, t) = (x - y + t, 2x + y - z, y + z)$. Montrer que φ est linéaire et déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Exercice 4 Vérifier que les applications suivantes sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer leur noyau et leur image :

1. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \varphi(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$
2. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \psi(u) = (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$

Exercice 5 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et leur image :

1. $\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & \psi(f) = g \quad \text{où } g(x) = f(x) + f(-x) \end{array}$
2. $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$

Exercice 6 On considère l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$. Déterminer $\deg\Big(\varphi(P)\Big)$.
3. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$.

Exercice 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et D l'application

$$D : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On pose $\Gamma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n$. Montrer que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer son application réciproque.

Exercice 8 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$ tel que $f^2 - 3f + 2\mathrm{id}_{\mathbb{E}} = 0$.

1. Montrer que f est un automorphisme et donner f^{-1} en fonction de f.

2. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) de scalaires telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n \mathrm{id}_{\mathbb{E}} + b_n f$. En déduire f^n en fonction de n.

Exercice 9 Soient $\mathbb{E}, \mathbb{F}, \mathbb{E}', \mathbb{F}'$ des $\mathbb{K}$-ev, φ un isomorphisme de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{E}'$, et ψ un isomorphisme de $\mathbb{F}$ sur $\mathbb{F}'$. Montrer que l'application :

$$\Theta : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathbb{E},\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{E}',\mathbb{F}') \\ f & \longmapsto & \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \end{array}$$

est bien définie et est un isomorphisme.

Projections

Exercice 10 Soit $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$.
On considère les sev de $\mathbb{E}$ suivant : $\mathbb{F} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0)_{\mathscr{B}}, (1,1,1)_{\mathscr{B}}\Big)$ et $\mathbb{G} = \mathrm{Vect}\Big((1,2,0)_{\mathscr{B}}\Big)$.
Montrer que $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{E}$, et déterminer l'expression analytique du projecteur sur $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$, et de la symétrie par rapport à $\mathbb{F}$ parallèlement à $\mathbb{G}$.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $f(x,y,z) = (x+z, y+z, 0)$. Montrer que f est un projecteur et préciser son support et sa direction.

Exercice 12 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que p et q ont même image si et seulement si $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que p et q projettent selon la même direction.

Exercice 13 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{E}$.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
2. Dans ce cas, vérifier que : $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ et $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Applications linéaires en dimension finie

Exercice 14 Soit $\theta : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ définie par : $\theta(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que θ est un endomorphisme et déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 15 Polynômes de Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels 2 à 2 distincts. On considère l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \varphi(P) = \big(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. En déduire que si $y_0, \ldots, y_n$ sont des réels donnés alors il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que :
$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad P(x_i) = y_i$$
3. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on note L_j l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad L_j(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
Vérifier que $\mathscr{B} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, quelles sont les coordonnées de P dans cette base ?

Exercice 16 Surjectivité en dimension finie
Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$ l'application définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Vérifier que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et que si P est un polynôme non constant alors $\deg\big(\Delta(P)\big) = \deg(P) - 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\ker\big(\Delta_{|\mathbb{C}_{n+1}[X]}\big)$ et en déduire que Δ induit une surjection de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ sur $\mathbb{C}_n[X]$.
3. En déduire que Δ est surjective de $\mathbb{C}[X]$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 17 Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev tels que $\mathbb{F}$ est de dimension finie.

1. Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$. Montrer que :
$$\big|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)\big| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$
2. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que $f \circ g = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f+g$ est un automorphisme de $\mathbb{E}$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim \mathbb{E}$.

Exercice 18 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$. Établir que :
$$\mathbb{E} = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$$

Représentations matricielles

Exercice 19 Donner la matrice relativement aux base canoniques, pour les applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}_2[X] \longmapsto P - X^3P' \in \mathbb{R}_4[X]$
2. $f : P \in \mathbb{R}_3[X] \longmapsto \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \in \mathbb{R}^3$
3. $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $f(1,2) = (0,5,8)$, $f(2,3) = (5,0,1)$

Exercice 20

1. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.
On pose $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (1,0,0)$ et $u_3 = (0,-1,2)$. Montrer que $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base. Que remarquez-vous ?
2. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice dans la base canonique : $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.
On pose $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,1)$. Montrer que $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de g dans cette base. Que remarquez-vous ?

Exercice 21

1. Montrer que $\mathscr{B} = \big(1, X-1, (X-1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = 2(X+1)P - (X^2 - 2X+1)P'$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, et déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 22

1. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = \big(P(0), P'(0), P(1)\big)$. Montrer que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer φ^{-1} (on pourra utiliser les représentations matricielles).

Exercice 23 Dans chacun des cas suivants on définit une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ par sa matrice relativement aux bases canoniques. Déterminer $rg(f)$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 24 Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{E})$.
On suppose que f est nilpotent d'ordre p : c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$ et $f^{p-1} = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{E})}$.
Montrer que si $\vec{u} \in \mathbb{E} \backslash \{\vec{0}_{\mathbb{E}}\}$, alors la famille $\mathscr{F} = \left(\vec{u}, f(\vec{u}), \dots, f^{p-1}(\vec{u})\right)$ est libre.
Dans le cas $p = n$, donner la matrice de f dans cette base (dans ce cas, on dit que f est un endomorphisme cyclique).