Chapitre 2

Dénombrement et calculs de sommes

1 Ensemble de nombres usuels

• Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. On définit des intervalles d'entiers : si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, on note $[\![n, p]\!] = \{k \in \mathbb{N} /\ n \leq k \leq p\}$.

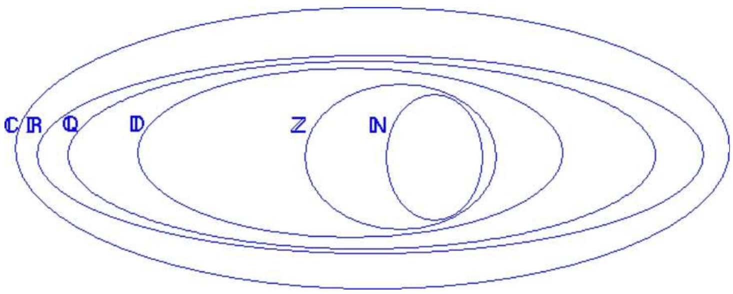
• Ensemble des entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

• Ensemble des nombres rationnels : $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \Big/ \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

• Ensemble des nombres réels : $\mathbb{R}$ (contient strictement l'ensemble $\mathbb{D}$ des décimaux). Les intervalles sont noté avec des crochets simples $[a, b[$ etc…

• Ensemble des nombres complexes : $\mathbb{C} = \{a + ib /\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Ils vérifient la chaîne d'inclusions : $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.



La propriété d'intégrité de la multiplication est fondamentale dans la résolution d'équation : si a et b sont deux nombres alors $ab = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$.
On en déduit que si $ac = bc$ alors $a = 0$ ou $b = c$.

2 Ensembles finis - Dénombrement

2.1 Ensembles finis

Définition 1 Soit E un ensemble non vide. On dit qu'il est fini lorsqu'il existe un entier naturel n et une bijection $\varphi : E \longrightarrow [\![1, n]\!]$. Le choix de n est alors unique : on l'appelle le cardinal de E, noté $\text{Card}(E)$, $\#E$ ou encore $|E|$.

On adopte aussi la convention suivante : $\emptyset$ est un ensemble fini de cardinal égal à 0.

Si E est fini de cardinal $n \neq 0$ alors on peut numéroter ses éléments de 1 à n : $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Proposition 2 Un exemple important
Si $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \leq p$, alors $\llbracket n, p \rrbracket$ est un ensemble fini et $\#\llbracket n, p \rrbracket = p - n + 1$.
En particulier $\backslash lc0, n\rrbracket = n + 1$ et $\#\llbracket 1, n \rrbracket = n$.

Théorème 3 Ensembles finis en bijection
Soient E et F deux ensembles. On suppose que :
(i) E est fini ;
(ii) il existe une bijection $\psi : E \longrightarrow F$.
Alors F est fini et $\#E = \#F$.

Théorème 4 Parties d'un ensemble fini
Soit E un ensemble fini.

1. Toute partie A de E est finie et vérifie $\#A \leq \#E$.
2. Si $A \subseteq E$: $A = E \iff \#A = \#E$.

⚠ ATTENTION : en général si $\#A \leq \#E$, on ne peut pas dire que $A \subseteq E$. Et bien sur si $\#A = \#E$, on ne peut pas dire que $A = E$.

Théorème 5 Propriétés des applications entre ensembles finis / Principe des tiroirs
Soient E et F deux ensembles finis et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si f est injective alors $\#E \leq \#F$.
2. Si f est surjective alors $\#E \geq \#F$.
3. Si $\#E = \#F$ alors :

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

Schubfachprinzip de Dirichlet : « Si n chaussettes occupent m tiroirs, et si $n > m$, alors au moins un tiroir doit contenir strictement plus d'une chaussette. Une autre formulation serait que m tiroirs ne peuvent contenir strictement plus de m chaussettes avec une seule chaussette par tiroir ; ajouter une autre chaussette obligera à réutiliser l'un des tiroirs ».

Définition 6 Ensembles infinis
Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini. Son cardinal est dit transfini.

⚠ Les cardinaux transfinis ne sont pas tous égaux !
Par exemple on peut montrer que $\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$.

Définition 7 Ensembles dénombrables
On dit que E est dénombrable lorsqu'il est en bijection avec $\mathbb{N}$ (dans ce cas E est infini).
On dit que E est au plus dénombrable lorsque E est fini ou dénombrable.

Intuitivement le fait pour un ensemble d'être dénombrable signifie qu'on peut compter/énumérer ses éléments.

Exemple **:** $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ ne le sont pas.

2.2 Dénombrement des ensembles finis

Théorème 8 Dénombrement des parties d'un ensemble fini
Si E est fini alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi et $\#\mathscr{P}(E) = 2^{\#E}$.

Démonstration : On note $n = E$. On donne trois pistes de démonstrations.
• Pour toute partie A de E, chaque $x \in E$ vérifie $x \in A$ ou $x \notin A$. Donc au total 2^n choix.
• On peut raisonner par récurrence sur n.
• On peut mettre $\mathscr{P}(E)$ en bijection avec $\{0,1\}^E$ via les fonctions indicatrices.

CQFD □

Théorème 9 Principe des bergers

1. Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cup B$ est fini et $\#(A \cup B) = \#A + \#B$.
2. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles finis et deux à deux disjoints : $\#(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \#A_1 + \#A_2 + \dots + \#A_n$.

« Quand les bergers veulent compter leurs moutons, ils comptent leurs pattes et divisent par quatre ».

Démonstration : Supposons $\varphi : A \longrightarrow [\![1, n]\!]$ et $\psi : B \longrightarrow [\![1, p]\!]$ sont bijectives.
Alors $f : A \cup B \longrightarrow [\![1, n+p]\!]$ définie par $f(x) = \varphi(x)$ si $x \in A$ et $f(x) = n + \psi(x)$ si $x \in B$ est une bijection.

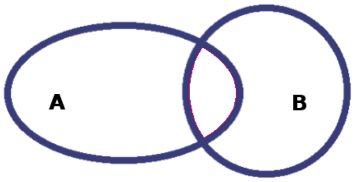
CQFD □

Corollaire 10 Cardinal d'une différence
Si A et B sont deux ensembles finis : $\#(B \backslash A) = \#B - \#(A \cap B)$.

Corollaire 11 Cardinal d'une union
Si A et B sont deux ensembles finis et disjoints alors $A \cap B$ et $A \cup B$ sont finis et :

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

Ces formules se retrouvent facilement à l'aide d'un diagramme :



Corollaire 12 Cardinal du complémentaire
Si E est fini et A est une partie de E alors : $\#\overline{A} = \#E - \#A$.

Théorème 13 Cardinal d'un produit cartésien
Si E et F sont finis alors $E \times F$ est fini et $\#(E \times F) = (\#E).(\#F)$ (le point désigne la multiplication des nombres).

Démonstration : Il suffit de trouver une bijection de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ sur $[\![1,np]\!]$.
Par exemple l'application $(x,y) \longmapsto x + n(y-1)$.

CQFD □

2.3 Dénombrement des applications entre ensembles finis

Théorème 14 Si E et F sont deux ensembles finis alors F^E est fini et $\#F^E = (\#F)^{\#E}$.

***Exemple* :** Si $n = \#E$ alors $\#\left(\{0,1\}^E\right) = 2^n$.

Définition 15 On appelle p-liste d'éléments d'un ensemble F tout p-uplet d'éléments de F.

Théorème 16 Dénombrement des p-listes
Le nombre de p-listes d'éléments de F est égal à $(\#F)^p$.

On va maintenant dénombrer les applications injectives. Pour cela, commençons par définir la notion de factorielle d'un entier naturel.

Définition 17 Factorielle
Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.
On adopte aussi la convention $0! = 1$. Ainsi $n!$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par exemple $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$ ....

Définition 18 Arrangements
Si F est un ensemble fini tel $\#F = n$ et p un entier naturel non nul tel que $p \leq n$, on appelle arrangement de p éléments de F tout p-uplet d'éléments de F dont les composantes sont deux à deux distinctes.

Théorème 19 Dénombrement des arrangements
Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est égal à :

$$A_n^p = \begin{cases} n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } n \geq p \\ 0 & \text{si } n < p \end{cases}$$

avec $n = \#F$ et $p = \#E$.

***Exemple* :** $A_3^7 = 0$ et $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5$.

Théorème 20 Dénombrement des applications injectives
Soient E et F deux ensembles finis.

1. Si $\#E \leq \#F$, il y a au total $\dfrac{(\#F)!}{(\#F - \#E)!} = A_{\#F}^{\#E}$ applications injectives sur E à valeurs dans F.
2. Si $\#E > \#F$, il y n'a aucune application injective sur E à valeurs dans F.

Corollaire 21 Dénombrement des bijections
Si $\#E = \#F$ alors le nombre de bijections de E sur F est égal à $(\#E)!$.
Si $\#E \neq \#F$ alors il n'existe pas de bijection de $\#E$ sur $\#F$.

Définition 22 Permutations
On appelle permutation de E toute bijection de E sur E.

Théorème 23 Dénombrement des permutations
Si E est fini de cardinal n, le nombre de permutations de E est égal à $n!$.

Le dénombrement des surjections est plus compliqué et n'est pas au programme. Nous le ferons en TD.

2.4 Coefficients binômiaux

Définition 24 Coefficients binômiaux
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \in [\![0,n]\!]$. On pose $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \dfrac{A_n^p}{p!}$.
$\binom{n}{p}$ se lit « p parmi n ». La notation C_n^p n'est plus utilisée aujourd'hui.
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ et que l'une des deux conditions $n \geq 0$ ou $p \in [\![0,n]\!]$ n'est pas vérifiée on adopte la convention $\binom{n}{p} = 0$.

Nous allons voir que ces nombres interviennent dans de très nombreuses formules.

Théorème 25 Nombre de parties à p éléments
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour tout $p \in [\![0,n]\!]$, le nombre de parties de E à p éléments est égal à $\binom{n}{p}$.

Définition 26 Combinaisons
Si E est un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle combinaison de p éléments de E toute partie de E dont le cardinal est égal à p.

Théorème 27 Dénombrement des combinaisons
Si E est fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}$, le nombre de combinaisons à p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$ (la formule est vraie même si $n < p$).

Proposition 28 Règles de calcul
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0,n]\!]$.

1. Factorisation : si $p \neq 0$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$.
2. Addition ou formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.
3. Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
4. $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$, $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{n-2}$.

En pratique on peut calculer les $\binom{n}{p}$ à l'aide de leur définition avec des factorielles :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1)}{p!}$$

***Exemple* :** $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 20 \times 19 \times 3 = 1140.$

Pour de petites valeurs de n la formule de factorisation permet de construite le **triangle de Pascal**. Dans un tableau dont les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0, on place la valeur de $\binom{n}{p}$ à l'intersection de la ligne n et la colonne p. La formule de Pascal donne que la somme de deux coefficients consécutifs sur la même ligne (colonnes p et $p+1$), donne le coefficient situé sur la ligne suivante,colonne $p+1$. Au départ on part d'un tableau avec des 1 sur la colonne 0 et sur la diagonale.

***Exemple* :**
$$\begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & & 1 & & & & \\ 1 & & & 1 & & & \\ 1 & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 \end{array} \quad \text{donne} \quad \begin{array}{lllllll} 1 & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{array}$$

et on en déduit $\binom{6}{3} = 20$.

Proposition 29 Les coefficients binômiaux sont des nombres entiers naturels

Pour tout $(n, p) \in \mathbb{Z}^2$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

2.5 Techniques de dénombrement

Pour bien dénombrer les éléments d'un ensemble fini E il faut :
- ne compter que les éléments de E ;
- ne pas en oublier ;
- ne pas compter plusieurs fois le même élément, ou penser à rectifier le résultat final.

Si on dénombre des objets en les décrivant **par étapes successives** (pour une carte : on choisit sa couleur puis sa hauteur), il faut à la fin **multiplier** les résultats.

Si on dénombre par **disjonction des cas**, il faut à la fin **additionner** les résultats (c'est le lemme des bergers).

• $\boxed{p\textbf{-listes :}}$ si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition autorisée, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a n^p possibilités au total.

***Exemple* :** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 4 couleurs = 4^{27}.

***Exemple* :** Nombre de tirages successifs **avec remise** de p boules dans une urne de n boules $= n^p$.

• $\boxed{\textbf{Arrangements :}}$ si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages étant pris en compte**, alors on a A_n^p possibilités au total.

***Exemple* :** Nombre de coloriages possibles d'une carte des 27 pays de l'UE, avec 40 couleurs, de telle sorte que chaque pays ait une couleur différente de celle des autres $= A_{40}^{27}$.

***Exemple* :** Nombre de tirages successifs **sans remise** de p boules dans une urne de n boules $= A_n^p$.

• $\boxed{\textbf{Combinaisons :}}$ si on choisit p éléments dans un ensemble à n éléments, **sans répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, alors on a $\binom{n}{p}$ possibilités au total.

***Exemple* :** Nombre d'équipes de football possibles dans une classe de 45 élèves $= \binom{45}{11}$.

***Exemple* :** Nombre de tirages **simultanées** de p boules dans une urne de n boules $= \binom{n}{p}$.

⚠ Le cas du choix de p éléments dans un ensemble à n éléments, **avec répétition, l'ordre des tirages n'étant pas pris en compte**, n'est pas au programme.

• $\boxed{\textbf{Permutations :}}$ si on permute n éléments, alors on a $n!$ possibilités au total.

***Exemple* :** Nombre de façons de ranger 10 manteaux dans une penderie = 10!.

⚠ Lorsqu'on permute les éléments, certains peuvent revenir à leur position intiale ! (on parle de points fixes).

• $\boxed{\textbf{Situations plus complexes :}}$

⋆ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires et n_2 sont blanches. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 blanches et p_2 noires ($p_1 + p_2 = p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1} A_{n_2}^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1} n_2^{p_2}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

★ On dispose d'une urne de n boules dont n_1 sont noires, n_2 sont blanches et n_3 sont rouges. On tire p boules dans cette urne. Le nombre de tirages différents donnant p_1 noire, p_2 blanches et p_3 rouges ($p_1+p_2+p_3=p$) qu'on peut obtenir est :

$\longrightarrow$ $\underbrace{\binom{n_1}{p_1}\binom{n_2}{p_2}\binom{n_3}{p_3}}_{\textit{Choix des boules}}$ si les boules sont tirées simultanément ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{A_{n_1}^{p_1}A_{n_2}^{p_2}A_{n_3}^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et sans remise ;

$\longrightarrow$ $\underbrace{n_1^{p_1}n_2^{p_2}n_3^{p_3}}_{\textit{Choix des boules}} \times \underbrace{\binom{p}{p_1}\binom{p-p_1}{p_2}}_{\textit{Choix des tirages}}$ si les boules sont tirées successivement et avec remise.

★ Etc... Ces formules se généralisent facilement.

3 Calculs de sommes et de produits

3.1 Sommes

Définition 30 Symbole Σ

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$.

Si $p \in [\![0,n]\!]$, on pose aussi : $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_n$.

Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\sum_{i\in I} a_i$ = somme de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.

Dans le cas où $I=\emptyset$, on adopte la convention : $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Proposition 31 Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\sum_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda \times \sum_{i\in I} a_i$.
2. Linéarité. $\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.
3. Sommation par paquet. Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$.
4. Relation de Chasles. Si $I = [\![p,n]\!]$ et $q \in I$: $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q-1} a_k + \sum_{k=q}^{n} a_k$.

5. Changements d'indice. L'indice de la somme est une variable muette :
$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in I} a_i = \sum_{k\in I} a_k$ ou encore $\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_j = \sum_{i=p}^{n} a_i$.
De plus on peut **décaler les indices**. Si on fixe $q \in Z$, et si on pose $k' = k+q$:
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=p+q}^{n+q} a_{k'-q}$$
D'autre part on peut aussi **inverser** l'ordre des termes de la somme, en posant $k' = n-k$:
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k'=0}^{n-p} a_{n-k}$$

3.2 Sommes usuelles à connaître

• **Sommes télescopiques.** Pour toute famille $(a_k)_{p\leq k\leq n+1}$ de nombres complexes : $\sum_{k=p}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_p$.

• **Sommes à terme général constant.** Pour tout $a \in \mathbb{C}$: $\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a = (\text{nb de termes}) \times a$.

• **Sommes arithmétiques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

• **Somme d'Euler.** On a : $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Sommes géométriques.** On a : $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1 \end{cases}$.

3.3 Formule du binôme de Newton

C'est la formule la plus importante ! Commençons par rappeler la convention suivante : si $z \in \mathbb{C}$ on pose $z^0 = 1$. En particulier $0^0 = 1$.

Théorème 32 Formule du binôme
Si a et b sont deux nombres complexes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^k a^{n-k} = \binom{n}{0}a^0 b^n + \binom{n}{1}a^1 b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a^n b^0$$

***Exemple* :** Grâce au triangle de Pascal on calcule les $\binom{n}{k}$.

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

donne :
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$,
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,
et $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Corollaire 33 Cas particuliers à connaître
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n=0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

***Exemple* :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \left[(k+1)^3 - k^3\right]$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3.4 Sommes doubles

Si $(x_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est un « tableau » de nombres à n lignes et p colonnes on note :

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres du tableau}$$

Visualisons le tableau :

$$\begin{array}{ccc|c|cc}
x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1p} \\
x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2j} & \cdots & x_{2p} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{ip} \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{np}
\end{array}$$

Nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Notons S_i la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{p} x_{ij}$; et notons T_j la somme des nombres de la colonne T_j : $T_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$.
Il est clair que la somme des sommes partielles obtenues pour chaque ligne (resp. chaque colonne) donne la somme de tous les nombres du tableau. On en déduit le théorème suivant sur les sommes doubles.

Théorème 34 Théorème de Fubini

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

et plus généralement :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i\in I\\j\in J}} x_{ij} &= \sum_{i\in I} S_i = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} x_{ij}\right)\\ &= \sum_{j\in J} T_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} x_{ij}\right)\end{aligned}$$

Dans un calcul, on peut donc permuter deux signes Σ consécutifs.

Examinons maintenant le cas plus complexe d'un tableau triangulaire $(x_{ij})_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\leq i\leq n}}$ à n lignes et n colonnes. On note :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i}\leq n} x_{ij} = \text{ somme de tous les nombres de ce tableau}$$

Visualisons le :

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
x_{11} & & & & & & & & \\
x_{21} & x_{22} & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & & & \\
x_{j1} & x_{j2} & \dots & & x_{jj} & & & & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & & & \\
\hline
x_{i1} & x_{i2} & \dots & & x_{ij} & \dots & x_{ii} & & \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & & x_{nj} & \dots & x_{ni} & \dots & x_{nn}
\end{array}$$

Encore une fois, nous avons encadré la ligne i et la colonne j. Si S_i est la somme partielle des nombres de la ligne i : $S_i = \sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}$; si T_j est la somme des nombres de la colonne j : $T_j = \sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}$. Avec même raisonnement que ci-dessus on obtient le théorème suivant.

Théorème 35 Théorème de Fubini
On a :

$$\sum_{1\leq \boxed{j\leq i}\leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\boxed{i}} x_{ij}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{p} T_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=\boxed{j}}^{n} x_{ij}\right)$$

Nous allons maintenant voir une formule pour calculer le produit de deux sommes.

⚠ Malheureusement $\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{i\in I} b_i\right) \neq \sum_{i\in I} a_i \times b_i$!

Le théorème suivant donne la bonne formule. Remarquons que le résultat est une somme double.

Théorème 36 Produit de deux sommes
Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ sont deux familles finies de nombres complexes, on a :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\times\left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i\times b_j\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_i\times b_j\right)$$

3.5 Généralisation des formules de dénombrement

Certaines formules de dénombrement se généralisent grâce aux symboles Σ.

Théorème 37 Principe des bergers
Si E est un ensemble fini et $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de parties de E, deux à deux disjointes, alors :

$$\#\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \# A_i$$

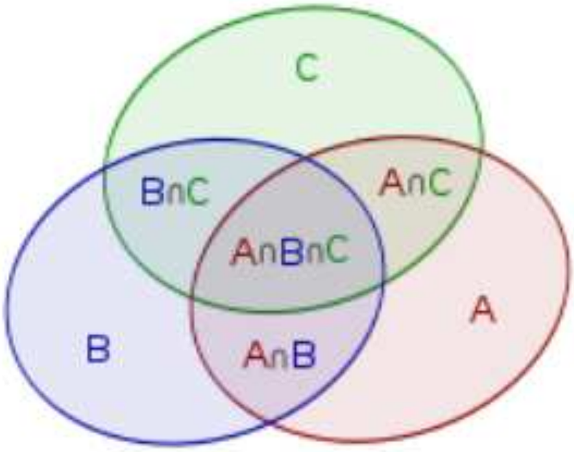
Dans le cas de parties qui ne sont pas deux à deux disjointes on a le résultat suivant.

Théorème 38 Formule du crible de Poincaré / Principe d'inclusion-exclusion
Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties d'un ensemble fini E :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\left(\sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)\right)$$

Exemple **:** Pour $n=2$ on retrouve la formule : $\#(A\cup B)=\#A+\#B-\#(A\cap B)$.
Pour $n=3$ on a : $\#(A\cup B\cup B)=\#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)$.
Pour $n=4$: $\#(A\cup B\cup C\cup D)=\#A+\#B+\#C+\#D-\#(A\cap B)-\#(A\cap C)-\#(A\cap D)-\#(B\cap C)-\#(B\cap D)-\#(C\cap D)+\#(A\cap B\cap C)+\#(A\cap B\cap D)+\#(A\cap C\cap D)+\#(B\cap C\cap D)-\#(A\cap B\cap C\cap D)$.
Etc… Remarquez l'alternance de signe entre les groupements de termes.

Dans ces cas particuliers, on peut retrouver les formules avec un diagramme. Par exemple dans le cas $n=3$:



Il y a un cas particulier « simple » où l'on sait calculer la somme de droite dans la formule du crible : si $\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)$ est une constante α_k qui ne dépend que de k (et pas du choix des valeurs de $(i_1,i_2,\dots,i_k)$. En remarquant que la somme $\displaystyle\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}$ comporte $\displaystyle\binom{n}{k}$ termes on obtient :

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\#\left(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right)=\text{ nombre de termes }\times\alpha_k=\binom{n}{k}\alpha_k$$

et donc :

$$\#\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\alpha_k$$

Exemple **:** On appelle **dérangement** de $[\![1,n]\!]$ toute permutation qui ne laisse fixe aucun élément, ie telle que aucun élément ne reprend sa position initiale. On note d_n le nombre de ces dérangements. Il est clair que $d_n\le n!$. La formule du crible donne la formule exacte :

$$d_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

3.6 Produits

Définition 39 Symbole Π

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres complexes. On pose : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}a_k=a_0\times a_1\times\cdots\times a_n$.
Plus généralement si $(a_i)_{i\in I}$ est une famille finie de nombres complexes (ie I est fini), on pose : $\displaystyle\prod_{i\in I}a_i=$ produit de tous les nombres de la famille $(a_i)_{i\in I}$.
Dans le cas où $I=\emptyset$, on adopte la convention : $\displaystyle\prod_{i\in I}a_i=1$.

Proposition 40 Règles de calcul

Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles finies de nombres complexes.

1. Factorisation. Si $\lambda \in \mathbb{C}$: $\prod_{i\in I}(\lambda \times a_i) = \lambda^{\#I} \times \prod_{i\in I} a_i$.
2. $\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.
3. Etc...

La seule formule à connaître est la suivante.

Proposition 41 Π et factorielle

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\prod_{k=1}^{n} k = n!$.

Les symboles Σ et Π sont liés l'un à l'autre par les fonctions ln et exp. On a en effet les formule suivantes.

Théorème 42 Liens entre Σ et Π

1. Si $a, b > 0$, on a $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$, et si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{a+b} = e^a \times e^b$.
2. Plus généralement, si $(a_i)_{i\in I}$ famille finie de nombre réels : $\exp\left(\sum_{i\in I} a_i\right) = \prod_{i\in I} e^{a_i}$,

   et si les $(a_i)_{i\in I}$ sont strictement positifs : $\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$.

4 Exercices

Exercice 1 Combien de numéros de téléphone peut-on attribuer en France, sachant que :
• L'indicatif de région est 01, 02, 03, 04 ou 05.
• Les deux chiffres suivant doivent être distincts.
• De nouveaux numéros "internet" sont disponibles, commençant tous par 08.

Exercice 2 Un étudiant en ECS veut colorier ses notes de cours en attribuant la même couleur pour chaque matière : histoire, géographie, culture générale, mathématiques, informatique, LV1 et LV2. Il dispose de 10 couleurs différentes.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
3. On choisit autant de couleurs différentes qu'il y a de matières. Combien y a t-il de coloriages possibles en utilisant seulement ces couleurs ? De sorte que chaque matière ait une couleur différente des autres ?
4. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'au moins deux matières aient la même couleur ?
5. Combien y a-t-il de coloriages, de sorte qu'exactement deux matières aient la même couleur ?

Exercice 3 Dans une urne, on place n boules blanches et une noire. On tire simultanément k boules.

1. Combien y-a-t-il de tirages sans boule noire.
2. Combien y-a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?
3. Combien y-a-t-il de tirages possibles en tout ? Quelle propriété du cours venez-vous de démontrer ?

Exercice 4 On dispose d'une urne avec 8 boules blanches, 7 boules noires et 5 boules vertes.

1. Quel est le nombre de tirages simultanés de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ?
2. Quel nombre de tirages successifs et sans remise de 5 boules donnant 2 blanches, 1 noire et 2 vertes ? 2 blanches, 1 noire et 2 vertes *dans cet ordre* ?
3. Mêmes questions avec des tirages successifs et avec remise de 5 boules dans l'urne.

Exercice 5 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de parties de E formées de k éléments ?
2. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ?
3. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E ?
4. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments deux à deux distincts de E, tel que le premier élément est le plus petit et le dernier élément est le plus grand ?
5. Combien y-a-t-il de k-uplets d'éléments de E ordonnés dans l'ordre strictement croissant ?

Exercice 6

1. Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot ECS ? du mot FINANCE ? du mot ANAGRAMME ?
2. Combien y a-t-il de mots composés de 5 lettres ? de 5 lettres distinctes ? de 5 lettres distinctes dans l'ordre alphabétique ? de 5 lettres et de sorte qu'il soit un palindrome ?

Exercice 7 Soit $(n,p)\in\mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. Calculer S_1^4, S_4^1 et S_4^4.
2. Plus généralement calculer S_1^p, S_n^1 et S_n^n.

Exercice 8 Dans une classe il y a autant de filles que de garçons. Tous les éléves étudient au moins une langue. Parmi eux : 10 étudient l'espagnol, 15 étudient l'allemand, 20 étudient l'anglais, 7 étudient l'espagnol et l'allemand, 8 étudient l'allemand et l'anglais, 9 étudient l'anglais et l'espagnol. Quel est l'effectif de la classe ?

Exercice 9 Un joueur de poker reçoit une "main" de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes (sans joker). Donner le nombre total de mains différentes que le joueur peut obtenir. Quel est le nombre de mains contenant :

1. une seule paire ?	2. deux paires ?	3. un brelan ?
4. un carré ?	5. un full ?	6. une couleur ?
7. une paire de roi ?	8. au moins un coeur ?	

Exercice 10 Calculer les sommes suivantes, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}1,\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1,\quad \left(\sum_{i=1}^{n}i\right)+\left(\sum_{j=1}^{n}j\right),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j),\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1,\quad \prod_{k=1}^{n}k,\quad \prod_{k=0}^{n}(2k+1),\quad \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}.$$

Exercice 11 Calculer les sommes et produits suivant, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ (éventuellement non nul) :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3^k}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k},\quad \sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k},\quad \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right),\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Exercice 12 Soient n et p deux entiers naturels tels que $n\geq p$. Calculer la somme :

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{n-i}{p-i}$$

Exercice 13 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

$$1.\quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}\frac{j}{i}\qquad 2.\quad \sum_{1\leq j<i\leq n}ij$$

Exercice 14 Soit $n\in\mathbb{N}$. On considère les sommes

$$A_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k},\quad B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k},\quad S_n=\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k},\quad T_n=\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}.$$

1. Calculer A_n et B_n en fonction de n.

2. En déduire S_n et T_n en fonction de n.
3. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$.

Exercice 15 Soit $(n,p) \in \mathbb{N}$. On note S_n^p le nombre de surjections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments.

1. On pose $E = [\![1,p]\!]$ et $F = [\![1,n]\!]$. On note $S(E,F)$ l'ensemble des surjections de E dans F. Donner une relation simple entre $S(E,F)$ et les ensembles $A_k = \{f : E \longrightarrow F \mid k \text{ n'a pas d'antécédent par } f\}$, où $k \in F$.
2. En déduire, en utilisant la formule du crible de Poincaré que :

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Exercice 16

1. On considère deux suites de nombres réels $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k$.
   Montrer la relation réciproque suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k$$

2. On appelle dérangement de n éléments une permutation où les n éléments changent de place, et on note $d(n)$ le nombre de dérangements de n éléments.

   Vérifier que : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d(n-k)$. En déduire la valeur de d_n en fonction de n.

Exercice 17 Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Combien y-a-t-il de couples (A,B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$? tels que $A \cup B = E$?
2. Combien y-a-t-il de triplets (A,B,C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?