Chapitre 20

Intégrales généralisées

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Cas d'un intervalle $[a, b[$

On suppose que :
• $a \in \mathbb{R}$
• $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$
• $a < b$.

Définition 1 Intégrale impropre en b

Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en b.

Important : Remarquons que pour tout $x \in [a, b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

Par contre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ n'existe pas (à priori) puisque f n'est pas continue sur le segment $[a, b]$.

Si $b = +\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est toujours impropre en $+\infty$.

Définition 2 Intégrale convergente

Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

***Exemple* :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en $+\infty$, converge et est égale à 1.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ est impropre en 1, converge et est égale à 2.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t)^{\frac{3}{2}}}$ est impropre en 1 et diverge.

Vocabulaire :

• les intégrales $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $x \in [a,b[$, s'appellent intégrales partielles de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;
• lorsque $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, les intégrales $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ s'appellent restes de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$;
• étudier la nature d'une intégrale, c'est déterminer si elle est convergente ou divergente ;
• deux intégrales impropres sont dites de même nature lorsqu'elles sont toutes les convergentes ou toutes les deux divergentes.

Proposition 3 Reste d'une intégrale convergente

Supposons que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors pour tout $x \in [a,b[$, le reste $\int xb f(t)$ converge et vérifie :

$$\lim_{x\to b^-} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On a donc des résultats très proches de ceux du chapitre sur les séries convergentes.

⚠ Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f\,\mathrm{d}t$ converge, on ne peut pas dire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ (donc pas d'analogie avec les séries convergentes, pour lesquelles le terme général a pour limite 0). Comme le montre l'exercice suivant, le problème vient du fait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t)$ peut ne pas exister.

Exemple **:** Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et f a une limite en $+\infty$ (ce qui est le cas par exemple si f est monotone), alors cette limite est égale à 0.

Étudions maintenant le cas des intégrales « faussement impropres ».

Définition 4 Intégrale faussement impropre

Si f est continue sur $[a,b]$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en b. Plus précisement, cette intégrale converge au sens précédent, elle est égale à l'intégrale définie au chapitre sur l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{intégrale sur un segment}}$$

On rencontre en particulier cette situation lorsque f est continue sur $[a,b[$, et se prolonge par continuité en b.

Exemple **:** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0, et est donc convergente.

1.2 Cas d'un intervalle quelconque

On suppose ci-dessous que $b \in \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.

Définition 5 Cas d'un intervalle $]a, b]$
Si f est continue sur $]a, b]$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en a. Elle est dite convergente lorsque $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit aussi que f est intégrable sur $]a, b]$.
Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ou que f n'est pas intégrable sur $]a, b]$.

De même que précédemment, on définit les notions de reste, de fausse impropreté etc...En particulier, si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge on a :

$$\lim_{x \to a^+} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est impropre en 0 et converge.

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en 0 et converge.

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est impropre en 0 et diverge.

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} t^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 et donc converge.

Dans la définition ci-dessous, on prend $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

Définition 6 Cas d'un intervalle $]a, b[$

Si f est continue sur $]a, b5$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est doublement impropre en a et b. On alors équivalence des propositions :

(i) $\exists c_0 \in]a, b[/ \int_a^{c_0} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c_0}^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

(ii) $\forall c \in]a, b[, \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou que f est intégrable sur $]a, b[$) et on a, pour tout $c \in]a, b[$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ou que f n'est pas intégrable sur $]a, b[$.

Dans le cas convergent on a aussi la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to a^+} \left(\lim_{y \to b^-} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right) = \lim_{y \to b^-} \left(\lim_{x \to a^+} \int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

Exemple **:** $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est doublement impropre et diverge.

Notation : si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $a < b$, on pose : $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Terminons par une dernière généralisation.

Définition 7 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle privé d'un nombre fini de points

Si f est continue sur $]a_1, a_2[\cup]a_2, a_3[\cup \cdots \cup]a_{p-1}, a_p[$, on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge lorsque les intégrales $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$. Dans ce cas on pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 Propriétés fondamentales des intégrales généralisées

Ce sont les mêmes que celles de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

2.1 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées

On se donne $(a, b, c) \in \overline{R}^3$.

Théorème 8 Relation de Chasles pour les intégrales généralisées
On a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

dès qu'au moins deux de ces intégrales convergent, la troisième étant nécessairement convergente.
Si on sait qu'une de ces intégrales diverge et une deuxième converge, alors la troisième diverge.
Si on sait que deux divergent, on ne peut rien dire sur la troisième.

Insistons sur le fait qu'on ne suppose pas que $a < c < b$.

Si f est continue sur $[a, b[$ et $[c, b[$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont impropre en b et de même nature. La nature d'une intégrale généralisée ne dépend donc que de la borne en laquelle elle est impropre. Là encore on peut faire un parallèle avec les séries (la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes de la somme).

***Exemple* :** $\int_0^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge, puisqu'on a vu que $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

2.2 Linéarité des intégrales généralisées

On se donne $(a, b) \in \overline{R}^2$.

Théorème 9 Linéarité des intégrales généralisées
Si λ, μ sont deux nombres réels, alors :

$$\int_a^b \big(\lambda.f(t) + \mu.g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu.\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

dès qu'au moins deux de ces intégrales convergent, la troisième étant nécessairement convergente.
Si on sait qu'une de ces intégrales diverge et une deuxième converge, alors la troisième diverge.
Si on sait que deux divergent, on ne peut rien dire sur la troisième.

⚠ Par exemple on ne peut pas écrire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$.

Corollaire 10 Linéarité des intégrales généralisées

L'ensemble $\mathscr{E}$ des fonctions f définies et continues sur $[a,b[$ telles que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
De plus l'application :

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathscr{E}$.

On a les mêmes résultats en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

2.3 Positivité des intégrales convergentes

Théorème 11 Positivité (stricte) des intégrales convergentes

1. Positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ (resp. $]a,b]$ ou $]a,b[$) tel que $\boxed{a \leq b}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$
2. Stricte positivité : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ tel que $\boxed{a < b}$. Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow \forall t \in [a,b[,\ f(t) = 0 \quad \text{(ie } f \text{ est l'application nulle sur } [a,b[)$$
On a le même résultat avec $]a,b]$ ou $]a,b[$.
3. Stricte positivité (contraposée) : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b[$ tel que $\boxed{a < b}$. On suppose que f est différente de l'application nulle sur $[a,b[$:
$$\exists t_0 \in [a,b[/ \ f(t_0) \neq 0$$
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a alors :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$$
On a le même résultat avec $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Que se passe-t-il si $b < a$? Réponse : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq 0$.

On retiendra donc que pour appliquer la positivité des intégrales généralisées, il faut vérifier que les « bornes sont dans le bon sens » ET que l'intégrale en jeu est convergente.

2.4 Croissance des intégrales convergentes

Théorème 12 Croissance des intégrales convergentes
Soient f, g sont deux fonctions continues, d'intégrales convergentes sur $[a, b[$ tel que $\boxed{a \leq b}$.
On suppose que :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t)$$

Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Encore une fois, il ne faudra pas oublier de vérifier que « les bornes sont dans le bon sens » ET que les intégrales en jeu sont convergentes.

2.5 Calcul des intégrales généralisées

Les techniques sont essentiellement les mêmes que celles utilisées pour le calcul de l'intégrale sur un segment.

2.5.1 Intégration par parties

⚠ Pour l'intégration par parties, aucun résultat n'est au programme pour les intégrales généralisées. Il faut donc systématiquement repasser à l'intégrale sur un segment, puis passer à la limite pour obtenir une formule avec des intégrales généralisées.

Exemple **:** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.

2.5.2 Changement de variables

⚠ Pour le changement de variable, on peut appliquer la même méthode. On peut aussi utiliser le théorème suivant dont les hypothèses sont plus restrictives (on suppose en plus le changement de variable bijectif et strictement monotone).

Théorème 13 Changement de variables dans une intégrale généralisée
Si f est continue sur $[a, b[$ et si φ est une bijection strictement croissante de $[a, b[$ sur $[\alpha, \beta[$ (resp. bijection strictement décroissante de $[a, b[$ sur $]\beta, \alpha]$), alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}t\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature, et en cas de convergence elles sont égales.

On a le même type de résultat en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Exemple **:** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Corollaire 14 Cas d'une fonction paire/impaire

1. Fonction paire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$$
car $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Fonction impaire. Si f est continue sur $]-a,a[$ alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou encore si et seulement si $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et on a :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
car $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour des exemples, voir la section sur les lois normales.

3 Nature d'une intégrale généralisée d'une fonction positive

Comme pour les séries, l'étude des fonctions positives va nous donner plusieurs critères pour étudier la nature d'une intégrale généralisée.

3.1 Utilisation des intégrales partielles

Rappelons que si f est continue sur $[a,b[$ la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[a,b[$ de dérivée égale à f.

Théorème 15 Utilisation des intégrales partielles

Si f est continue et positive sur $[a,b[$ alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Dans ce cas le plus petit majorant est $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On a le même type de résultat en remplaçant $[a,b[$ par $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Exemple **:** $\displaystyle\int_0^1 \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \mathrm{d}t$ converge.

Exemple **:** Si les bornes a et b sont finies, et si f est continue, positive, et majorée sur $[a,b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ Avec des bornes infinies, on peut avoir f continue positive majorée et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ divergente : considérer par exemple la fonction constante égale à 1 et l'intervalle $[1,+\infty[$.

3.2 Critères de comparaison des fonctions positives

Théorème 16 Comparaison par inégalité
Si f et g sont continues $[a,b[$ et vérifient $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et dans ce cas : $\displaystyle 0 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
D'autre part, par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

⚠ Ne pas confondre avec la propriété de croissances des intégrales généralisées, dans laquelle on suppose dès le départ la convergence des deux intégrales.

<u>Rédaction</u> : On rédige de la manière suivante : on a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
⚠ ATTENTION, la rédaction suivante est fausse :
on a $\forall t \in [a,b[,\ 0 \leq f(t) \leq g(t)$, donc $\displaystyle 0 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le théorème comparaison par inégalité pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
En effet, on ne peut pas utiliser la notation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ dans un calcul tant que la convergence n'a pas été justifiée.

Exemple **:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

***Exemple*:** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \mathrm{d}t$ converge.

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} \mathrm{d}t$ diverge.

Théorème 17 Comparaison par négligeabilité
Si f et g sont continues sur $[a, b[$, **positives au voisinage de b** et vérifient $f(t) \underset{t\to b}{=} o(g(t))$ alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

***Exemple*:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18 Comparaison par équivalence
Si f et g sont continues sur $[a, b[$ et vérifient $f(t) \underset{t\to b}{\sim} g(t)$, avec g **de signe constant au voisinage de b**, alors :

$$\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \Longleftrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

D'autre part, par contraposée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longleftrightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \text{ diverge}$$

***Exemple*:** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+t}}\right) \mathrm{d}t$ diverge.

On a le même type de résultats en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ ou $]a, b[$.

3.3 Convergence absolue

Définition 19 Convergence absolue
Si f est continue sur $[a, b[$, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

On est ainsi ramené à une fonction positive.

On peut donner la même définition en remplaçant $[a, b[$ par $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Théorème 20 Convergence absolue implique convergence
Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Démonstration : Remarquer que $f(t) = |f(t)| - \big(|f(t)| - f(t)\big)$.

CQFD □

***Exemple* :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge.

⚠ La réciproque du théorème est fausse : nous verrons en TD que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Corollaire 21 Inégalité triangulaire pour les intégrales généralisées
Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

4 Intégrales de références

4.1 Intégrales de Riemann

Théorème 22 Intégrales de Riemann en $+\infty$
Pour tout $a > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Dans ce cas la convergence est absolue.

***Exemple* :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge.

On en déduit un critère très utile pour étudier la nature d'une intégrale. Malheureusement il ne figure pas au programme officiel, il faut donc le redémontrer à chaque fois en invoquant le critère de comparaison par négligeabilité pour les fonctions positives.

Corollaire 23 Règle du $t^\alpha f(t)$ en $+\infty$
On suppose f **positive au voisinage de** $+\infty$.
- S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est d'intégrale convergente au voisinage de $+\infty$.
- S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas d'intégrale convergente au voisinage de $+\infty$.

***Exemple* :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)\mathrm{e}^{-t}}{t^5}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 24 Intégrales de Riemann en a
Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b > a$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
Dans ce cas la convergence est absolue.
En particulier, l'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et la convergence est absolue.

***Exemple* :** $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^3}$ diverge et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge.

Corollaire 25 Règle du $t^\alpha f(t)$ en 0
On suppose f **positive au voisinage de** 0.
- S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est d'intégrale convergente au voisinage de 0.
- S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas d'intégrale convergente au voisinage de 0.

***Exemple* :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

⚠ On peut retenir que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à -1. Mais ce résultat n'est pas au programme, il faut donc être capable de le redémontrer à chaque fois.

4.2 Intégrales utiles en probabilités

4.2.1 Lois exponentielles

Théorème 26 Densité d'une loi exponentielle
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\lambda > 0$.
Dans ce cas, elle est égale à $\dfrac{1}{\lambda}$.

Théorème 27 Moments d'une loi exponentielle
Si $\lambda > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il ne faut pas connaître sa valeur, mais retenir qu'elle se calcule avec n intégrations par parties (où on dérive t^n).

4.2.2 Lois normales

Théorème 28 Densité d'une loi normale
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$. Elle est appelée intégrale de Gauss.

***Exemple*:** Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Théorème 29 Moments d'une loi exponentielle
L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si n est impair elle est nulle. Si n est pair, elle se calcule par récurrence à l'aide d'intégrations par parties.

***Exemple*:** Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

4.3 Méthodologie pour étudier la nature d'une intégrale généralisée

• On commence par définir la fonction à intégrer. On précise soigneusement ses ensembles de définition et de continuité.

• Identifier la (resp. les) borne(s) en laquelle (resp. lesquelles) l'intégrale est impropre. Dans le cas d'une intégrale impropre aux deux bornes, couper l'intégrale en deux et faire deux études.

• Dans le cas d'une borne finie : à l'aide d'un calcul de limite, déterminer si la fonction se prolonge par continuité (fausse impropreté).

• Si la fonction change de signe, considérer la valeur absolue de cette fonction.

• Chercher un équivalent simple.

• Si cela ne suffit pas, tester la règle du $t^\alpha f(t)$.

• Dans les cas plus complexes, modifier l'intégrale à étudier à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variables.

• Dans de rares cas, on sait déterminer une primitive de la fonction à intégrer, il suffit alors de calculer la limite des intégrales partielles .

Noter que seules les deux dernières méthodes permettent aussi de calculer la valeur de l'intégrale étudiée (en cas de convergence).

5 Exercices

Exercice 1 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\int_x^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2 Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
5. $\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$
6. $\int_0^{1} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}t$
7. $\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\arctan(t^2)\,\mathrm{d}t$
8. $\int_0^{1} \frac{\tan(\sqrt{t})}{\ln\left(\cos(\sqrt{t})\right)}\,\mathrm{d}t$
9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$
11. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
12. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
13. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
14. $\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
15. $\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$
16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin(t)\right)\mathrm{d}t$
17. $\int_0^{1} \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{\sqrt{t}(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t$
18. $\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ où $P\in\mathbb{R}[X]$
19. $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$

Exercice 3 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$: $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$ (*remarquer que* $1=(1+t^2)-t^2$)
4. $\int_0^{1} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$. On cherchera $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $\frac{1}{1+t^3}=\frac{a}{t+1}+\frac{bt+c}{t^2-t+1}$.

Exercice 4 On considère l'intégrale :

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

1. Justifier la convergence de I.
2. Factoriser le polynôme X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. À l'aide d'une changement de variable, montrer que $I=\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$.
4. En développant $\int_0^{+\infty}\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^4+1}\mathrm{d}t$, calculer I.

Exercice 5 Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. Montrer que les intégrales de Bertrand $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$). *On pourra procéder directement ou se ramener à la question précédente par changement de variable.*
3. Que dire de $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$?

Exercice 6

1. Montrer la convergence de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
2. Montrer que la fonction sin induit une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, et que la bijection réciproque arcsin est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée $\arcsin'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.
3. Si f est une fonction continue sur $[-1,1]$, que dire de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$?

Exercice 7 (La fonction Gamma d'Euler) La fonction Γ d'Euler est définie par la formule $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de Γ est l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Vérifier que, pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$. Calculer aussi la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 8 (Intégrale de Dirichlet) On propose de montrer que l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et de calculer sa valeur.

1. (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer qu'elle est absolument convergente.
   (b) En découpant $\mathbb{R}^+$ en sous-intervalles du type $[k\pi,(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, montrer qu'elle ne converge pas absolument.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin(t)}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}$.
   (a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et calculer I_0.
   (b) Si φ est une fonction C^1 sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin\big((2n+1)t\big) = 0$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$.
   (d) Conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3. Vérifier que $I_0 = \sqrt{\pi}$.
4. Déterminer une expression de I_{2n+1} et I_{2n} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire la valeur des intégrales $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 (Fonction définie par une intégrale impropre)

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$ converge.

   On définit alors la fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$.
2. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty$ et déterminer $f'(x)$, pour $x > 0$.
3. (a) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-e^{-t^2}}{t}\,dt$ a une limite finie à droite en 0.

   (b) Vérifier que : $\forall x > 0$, $g(x) = -\ln(x) - f(x) + f(1)$.

   (c) En déduire que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.

Exercice 11 (Contre-exemple) On considère la fonction nulle sauf sur les intervalles centrés en $n \in \mathbb{N}$, de largeur $\dfrac{1}{2^n}$ où la fonction est une dent de scie de hauteur 1 :

$$\forall x \in \left[n - \frac{1}{2^{n+1}}, n\right],\quad f(x) = 1+2^{n+1}(x-n) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[n, n + \frac{1}{2^{n+1}}\right],\quad f(x) = 1+2^{n+1}(n-x)$$

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge absolument et que f n'est pas de limite nulle en $+\infty$.