Chapitre 21

Variables aléatoires réelles à densité

1 Définitions et premières propriétés

1.1 Définition

On se donne une espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Rappelons qu'une variable aléatoire réelle X est une fonction $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $[X \leq x] = \left\{\omega \in \Omega \middle/ X(\omega) \leq x\right\}$ est dans la tribu $\mathscr{A}$.

Définition 1 Variable aléatoire réelle à densité
Soit X une variable aléatoire réelle (VAR) définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On dit que X est une variable à densité lorsque sa fonction de répartition F_X vérifie :
(i) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
(ii) F_X est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, ie qu'il existe des réels $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que F_X est C^1 sur $\mathbb{R} \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple **:** La VAR X dont la fonction de répartition est $F_X(x) = x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est une VAR à densité.

Exemple **:** Une VARD X de loi $\mathscr{B}(p)$ n'est pas à densité.

En fait on a un résultat plus général : **une variable aléatoire discrète n'est jamais une variable aléatoire à densité**, puisque la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est discontinue en au moins un point (plus précisément en tout $x \in \mathbb{R}$, tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$).

Il vient naturellement la question suivante : étant une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, à quelle condition est-elle la fonction de répartition d'une VAR à densité X ? La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2 Caractérisation d'une fonction de répartition d'une VAR à densité
Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Alors F est la fonction de répartition d'une VAR à densité si, et seulement si, elle vérifie les propriétés suivantes :
(i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$;
(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
(iii) F est continue sur $\mathbb{R}$;
(iv) F est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Exemple **:** La fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2}\mathbb{1}[-1,0[+ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\mathbb{1}[0,1] + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}$ est la fonction de répartition d'une VAR à densité X.

1.2 Densités

Définition 3 Fonction densité
Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F_x C^1 sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$.. On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une densité de X, lorsque :
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq 0$
(ii) f est égale à F'_X sur $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$ privé d'un nombre fini de points.

⚠ En particulier, avec les mêmes notations, la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$f(x) = \begin{cases} F'_X(x) & \text{si } x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\} \\ 0 & \text{si } x\in\{x_1,\dots,x_n\}\end{cases}$ est une densité de X.
Aux points $\{x_1,\dots,x_n\}$, on choisi arbitrairement que f prend la valeur 0, mais on aurait pu choisir toute autre valeur.
On peut aussi choisir d'autre valeurs abritraires prises f en un nombre fini de points de $\mathbb{R}\backslash\{x_1,\dots,x_n\}$, mais ceci n'a pas vraiment d'intéret en pratique.

⚠ Une VAR à densité X a donc une **infinité de densités** ; mais **elles sont toutes égales à la dérivée de la fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points**.

Exemple **:** Soit X une VAR de fonction de répartition F définie par $F(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{2}\mathbb{1}[-1,0[+ \dfrac{1+\sqrt{x}}{2}\mathbb{1}[0,1] + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}$. Alors X est à densité et une densité de X est donnée par la fonction :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{4\sqrt{|x|}}\mathbb{1}_{[-1,1]} \end{array}$$

La fonction de répartition étant supposée C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, les densités héritent d'une certaine régularité, précis ée dans la proposition suivante.

Proposition 4 Régularité d'une densité
Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une densité d'une VAR X, alors f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Une densité caractérise la fonction de répartition et donc la loi de la variable aléatoire, comme le précise le théorème suivant.

Théorème 5 Une densité caractérise la fonction de répartition
Soit X une VAR à densité et f_X une densité de X. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

où il est sous-entendu que l'intégrale converge.

Démonstration : Fixons $x \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe un nombre fini de points $a_1 < \cdots < a_p$ tels que f_x est continue sur $]-\infty, x[\setminus\{a_1, \ldots, a_p\}$ et est égale à F_X' sur cet ensemble.
Soit $i \in [\![1, p-1]\!]$. Pour tout segment $[u, v]$ inclus dans $]a_i, a_{i+1}[$, f_x est continue sur $[u, v]$ et :

$$\int_u^v f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(v) - F_X(u)$$

Comme F_X est continue sur $\mathbb{R}$, cette intégrale a une limite quand $u \to a_i$ et $v \to a_{i+1}$, égale à $F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$. Ceci prouve que $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(a_{i+1}) - F_X(a_i)$$

De même si on prend $[u, v]$ dans $]-\infty, a_1[$ et si on fait tendre $u \to -\infty$ et $v \to a_1$, on obtient que $\displaystyle\int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(a_1) - \lim_{u \to -\infty} \mathbb{F}_X(u) = F_X(a_1) - 0 = F_X(a_1)$$

Toujours de manière analogue, on montre que $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = F_X(x) - F_X(a_p)$.
Finalement, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{a_1} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_1}^{a_2} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \cdots + \int_{a_{p-1}}^{a_p} f_X(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a_p}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \\
&= F_X(a_1) + F_X(a_2) - F_X(a_1) + \cdots + F_X(a_p) - F_X(a_{p-1}) + F_X(x) - F_X(a_p) = F_X(x)
\end{aligned}$$

CQFD □

Corollaire 6 Une densité caractérise la loi
Si X est une VAR à densité et f_X une densité de X, alors pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ on a :

$$\mathbb{P}(X \in I) = \int_I f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \mathbb{P}(X = x) = 0 \\
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t \\
\forall x \in \mathbb{R}, \qquad & \mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ On connaît donc la loi de X dès qu'on connaît une densité f_X.

Le fait que $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout réel x, donne encore une différence fondamentale avec les VAR discrètes. On ne calcule plus la probabilité que X prenne une valeur donnée (car elle est toujours nulle), mais la probabilité que X prenne une valeur appartenant à un certain intervalle.

Nous avons vu qu'une fonction densité est une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Une fonction densité a aussi la propriété suivante.

Proposition 7 Intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ d'une fonction densité
Si f_X est une densité d'une VAR à densité X, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Démonstration : Cela découle du simple fait que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$$

CQFD □

Réciproquement, on peut se demander à quelle condition une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction densité d'une VAR à densité X ? Nous allons voir que les fonctions densités sont caractérisées par les trois propriétés énoncées précédemment.

Théorème 8 Caractérisation des fonctions densités
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$. Alors f est une densité d'une VAR à densité X si, et seulement si, elle vérifie les conditions :
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points ;
(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et est égale à 1.
Dans ce cas la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On va appliquer le théorème 2 qui garantira que F est la fonction de répartition d'une VAR à densité X, puis vérifier que f est bien une densité de cette VAR X.
• La positivité de f donne facilement la croissance de F.
• Notons $a_1 < \cdots < a_n$ les points de discontinuité de f. On pose aussi $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Fixons $i \in [\![0, n]\!]$ et $c_i \in]a_i, a_{i+1}[$. On a pour $x \in]a_i, a_{i+1}[$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le premier terme est une constante, et le deuxième est l'expression d'une fonction de classe C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ de dérivée f (puisque f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. On en déduit que F est C^1 sur $]a_i, a_{i+1}[$ de dérivée f.
À ce stade on a donc montré que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points, et qu'en dehors de ces points sa dérivée est f.
• F est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ (car dérivable). Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $x \in]a_i, a_{i+1}[$, on a :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et comme $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, on a :

$$\lim_{x \to a_i^+} F(x) = \int_{-\infty}^{c_i} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c_i}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t = F(a_i)$$

donc F est continue à droite en a_i. La continuité à gauche s'obtient de la même manière.
On a donc F croissante, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. F est donc, d'après le théorème 2, la fonction de répartition d'une VAR à densité X. De plus f est positive et est égale à F' sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points : c'est donc une densité de X.

CQFD □

Exemple **:** f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$ est une densité d'une VAR X.

Exemple **:** Déterminer la valeur du réel a pour que la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{a}{\sqrt{t-1}}\mathbb{1}_{]1,2]}(t)$ soit une densité d'une VAR X.

On voit sur ces exemples qu'on ne cherchera pas à préciser la VAR X, et encore moins l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ sur lequel elle est définie.

1.3 Interprétation des fonctions densités

Supposons qu'on est représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une densité f d'une VAR X. Pour tout $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ tels que $a < b$, la probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ est égale à l'aire de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(0x)$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

Il existe une autre interprétation d'une fonction densité f. On a vu qu'en tout point a où la fonction de répartition F est dérivable, on a $f(a) = F'(a)$. On en déduit que pour h très proche de 0, la probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq a+h)$ est approximativement égale à $f(a).h$.

Nous allons voir que les intervalles sur lesquels une densité est nulle, renseignent sur les valeurs prises par la variable aléatoire.

On rappelle que si A est une partie de $\mathbb{R}$ et X une VAR, alors on dit que X est presque sûrement à valeurs dans A lorsque : $\mathbb{P}(X \in A) = 1$.

Théorème 9 Valeurs prises par une VAR à densité
Soient $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$, et une X une VAR à densité de fonction de répartition F_x et de densité f_X. On a équivalence de :
(i) X est p.s. à valeurs dans $[a,b]$;
(ii) f_X est nulle sur $]-\infty, a[$ et sur $]b, +\infty[$ (sauf éventuellement en un nombre fini de points) ;
(iii) F_X est nulle sur $]-\infty, a]$ et égale à 1 sur $[b, +\infty[$.

Pour une VAR à densité, on peut aussi dire que X est p.s. à valeurs dans $]a,b]$, ou $[a,b[$, ou $]a,b[$.

On peut remarquer que le fait que $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ est en fait valable pour toute VAR.

Exemple **:** Si X est une VAR de densité f définie par $f(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}\mathbb{1}_{]1,2]}(t)$, alors X est p.s. à valeurs dans $[1,2]$. De plus, sa fonction de répartition F_X est nulle sur $]-\infty, 1]$ et égale à 1 sur $[2, +\infty[$.

1.4 Blian sur les fonctions de répartitions et fonctions densités

Il ne faut pas confondre ces fonctions. Nous rappelons leurs principales propriétés dans le tableau suivant.

	Fonction de répartition F_X	**Densité f_X**
Régularité	C^0 sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points	C^0 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points
Monotonie	croissante sur $\mathbb{R}$	Néant
Limites	$\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)=1$	Néant
Encadrements	$\forall x\in\mathbb{R},\ 0\leq F_X(x)\leq 1$	$\forall x\in\mathbb{R},\ f_X(x)\geq 0$
Intégrale sur $\mathbb{R}$	Néant	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t=1$
Formules	$F_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t$	$f_X(x)=F_X'(x)$ si F_X dérivable en x, $f_X(x)=$ une autre valeur sinon

Terminons par un rappel des principales méthodes.

Rédaction : Comment montrer qu'une VAR X est à densité ?
- On calcule $F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- On montre qu'elle est C^1 sauf en un nombre fini de points $x_1,\ldots,x_n$.
- On vérifie que F_x est C^0 à gauche et à droite aux points $x_1,\ldots,x_n$; on sait alors qu'elle est C^0 sur $\mathbb{R}$.

Rédaction : Si on sait que X est à densité, comment calculer une densité de X ?
- On calcule $F_X(x)=\mathbb{P}(X\leq x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ (si cela n'a pas déjà été fait).
- En tout $x\in\mathbb{R}$, où F_X est dérivable on pose $f_X(x)=F_X'(x)$. Aux autres points, on prend n'importe quelle valeur : par exemple on peut prolonger f_X par continuité (si cela est possible).

On sait alors que la fonction f_X est une densité de X.

La fonction de répartition joue donc un rôle central dans l'étude des VAR à densité.

1.5 Transfert de loi

Soit $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$ un espace probabilisé.

On considère une VAR $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ de densité f_X et une fonction $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que $X(\Omega)\subseteq\mathscr{D}_f$. On a alors le schéma de composition :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{D}_f \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
\Omega \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "f\circ X"'] &
\end{tikzcd}$$

On admettra que l'application $Y=\varphi\circ X$ est aussi une VAR sur $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$. On la note plus simplement $Y=\varphi(X)$.

Connaissant une densité f_X de X et l'expression de la fonction φ, nous souhaiterions déterminer la loi de la VAR $Y = \varphi(X)$.

⚠ Comme nous le verrons sur les exemples, il est possible que Y ne soit plus une VAR à densité (dans ce cas ce sera une VARD conformément au programme).

On commence par déterminer les valeurs prises par Y, c'est-à-dire l'ensemble $Y(\Omega)$.

• Si $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$ (ensemble fini), ou $Y(\Omega) = \{y_n / n \in \mathbb{N}\}$ (ensemble dénombrable), alors Y est une VARD.

***Exemple* :** X VAR à densité telle que $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$ et $Y = \lfloor X \rfloor$. Montrer que Y est une VARD et donner sa loi en fonction d'une densité f_X de X.

• Sinon, $Y(\Omega)$ sera un intervalle. Dans ce cas on cherchera si Y est à densité (en étudiant sa fonction de répartition F_Y).

***Exemple* :** On pose $Y = \mathrm{e}^X$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

***Exemple* :** On pose $Y = X^2$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

***Exemple* :** On pose $Y = |X|$. Montrer que Y est à densité et en donner une en fonction d'une densité f_X de X.

⚠ Même si φ est continue, il se peut que $Y = \varphi(X)$ ne soit pas à densité.
⚠ En général, la somme de deux VAR à densité est à densité.

***Exemple* :** Vérifier que $Y = X + |X|$ fournit un contre-exemple aux deux propriétés précédentes.

Dans le programme d'ECS figure le résultat suivant qui correspond au cas où φ est affine.

Théorème 10 Transformation affine d'une VAR à densité
Soient X une VAR à densité et f_X une densité de X. On se donne $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$.
Alors la VAR $Y = aX + b$ est à densité et une densité de Y est la fonction f_Y définie par :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

Démonstration : Distinguer les cas $a > 0$ et $a < 0$.

CQFD □

Remarquer que si $a = 0$, la VAR Y est dicrète, de loi certaine égale à b.

Ce théorème se généralise au cas où φ est un C^1 difféomorphisme (fonction C^1 dont la dérivée ne s'annule pas). L'énoncé est donner dans la section **Exercices**.

2 Espérance d'une variable aléatoire à densité

2.1 Espérance

Définition 11 Espérance d'une VAR à densité
Soit X une VAR de densité f_X. On dit que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Cette définition est correcte car elle ne dépend pas du choix de la densité f_X, puisqu'on ne change pas la valeur d'une intégrale si l'on change l'intégrande en un nombre fini de points.

La convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ signifie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|.f_X(t)\,\mathrm{d}t$. En fait, puisque f_X est positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto t f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}^+$ et négative sur $\mathbb{R}^-$. La convergence absolue n'est donc pas nécessaire, on peut se contenter de montrer la convergence.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)\,\mathrm{d}t$ est impropre en $-\infty$ et $+\infty$, et aux points de discontinuité de f_X.

Si $\mathbb{E}(X)$ existe et f_X est paire, alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = 6x(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à 1.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{x^4}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à $\dfrac{3}{2}$.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité d'une VAR X. X n'admet pas d'espérance.

Exemple **:** La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ est une densité d'une VAR X. X admet une espérance égale à 0.

Définition 12 VAR à densité centrée
Soit X une VAR à densité. On dit qu'elle est centrée lorsqu'elle admet une espérance, et lorsque cette espérance est nulle.

Exemple **:** Une VAR X de densité f, définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, est centrée.

Théorème 13 Linéarité de l'espérance
Soit X une VAR de densité f_X. Pour tous réels a et b, la VAR $aX+b$ admet aussi une espérance, donnée par :
$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = aX+b$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{y-b}{a}\right)$.

CQFD □

Corollaire 14 VAR centrée associée
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors la VAR $X-\mathbb{E}(X)$ est centrée.

Définition 15 VAR centrée associée
Soit X une VAR à densité admettant une espérance. Alors la VAR $X-\mathbb{E}(X)$ est appelée variable centrée associée à X.

2.2 Théorème de transfert pour les VAR à densité

Théorème 16 Théorème de transfert pour les VAR à densité
Soit X une VAR de densité f_X. On suppose que X est presque sûrement à valeurs dans un intervalle I (ie que f_X est nulle en dehors de I) et que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sauf en un nombre fini de points.
On suppose de plus que la variable $Y = \varphi(X)$ est aussi à densité.
Alors $Y = \varphi(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_I \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Dans ce cas :
$$\mathbb{E}\big(\varphi(X)\big) = \int_I \varphi(t) f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Nous verrons en TD que pour que Y soit à densité, il suffit de supposer que φ est un C^1-difféomorphisme de I sur $J = f(I)$ (fonction C^1 sur I dont la dérivée ne s'annule pas).

***Exemple* :** Nous avons vu que e^X est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :
$$\mathbb{E}\big(\mathrm{e}^X\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

***Exemple* :** Nous avons vu que X^2 est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :
$$\mathbb{E}\big(X^2\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple : Nous avons vu que e^X est une VAR à densité. Elle admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)\,\mathrm{d}t$ converge (l'intégrande est positive) et dans ce cas :

$$\mathbb{E}\big(|X|\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

2.3 Moments d'une VAR à densité

Proposition 17 Densité de X^r
Soit X une VAR à densité et $r \in \mathbb{N}$. Alors X^r est aussi une VAR à densité.

Définition 18 Moments d'une VAR à densité
Soient X une VAR de densité f_X et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un moment d'ordre r lorsque $\mathbb{E}\big(X^r\big)$ existe. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big)$$

Pour $r = 1$, on retrouve l'espérance de X.

Si X est une VAR de densité f_X, le théorème de transfert donne que :

$$\mathbb{E}\big(X^r\big) \text{ existe } \iff \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r . f_X(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$m_r(X) = \mathbb{E}\big(X^r\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r . f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi pour calculer les moments d'une VAR à densité X, il suffit de connaître une densité de X. Il n'est pas nécessaire de déterminer une densité des VAR X^r pour $r \in \mathbb{N}$.

Exemple : Soit X VAR de densité f définie par $f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|t|}$. Alors X admet des moments de tout ordre, et pour $r \in \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X^r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \text{ impair} \\ n! & \text{si } r \text{ pair} \end{cases}$.

Théorème 19 Existence de moments d'ordre inférieur
Soit X une VAR à densité qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$. Alors X admet des moments à tout ordre $s \in [\![0, r]\!]$.

Démonstration : On procède de même que pour les VARD.

CQFD □

Définition 20 VAR à densité bornée
Soit X une VAR à densité. On dit qu'elle est bornée lorsqu'il existe deux réels a et b, avec $a < b$, tels que X soit p.s. à valeurs dans $[a, b]$.

Proposition 21 Existence des moments pour une VAR à densité bornée
Si X est à densité et est bornée, alors elle admet des moments à tout ordre.

Théorème 22 Existence du moment centré d'ordre r
Si X est une VAR à densité qui admet un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, alors la VAR centrée $X - \mathbb{E}(X)$ est à densité et admet elle-aussi un moment d'ordre r égal à $\mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$.

Démonstration : On procède de même que pour les VARD.

CQFD □

Définition 23 Moment centré d'ordre r d'une VAR à densité
Si X est une VAR à densité admettant un moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$, on appelle moment centré d'ordre r le réel :

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^r\right]$$

2.4 Variance d'une VAR à densité

Définition 24 Variance d'une VAR à denisté
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. On appelle variance de X, notée $V(X)$ ou $\mathrm{Var}(X)$, son moment centré d'ordre 2 :

$$V(X) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right]$$

Donc $V(X)$ existe si $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ existe.

La variance sert à mesurer la dispersion quadratique de X autour de sa valeur moyenne (= son espérance).

Théorème 25 Règles de calcul de la variance
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2.

1. $V(X) > 0$;
2. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et :

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarquer que ce sont les mêmes règles de calcul que pour les VARD (mais que la variance ne peut être nulle).

Théorème 26 Formule de Koenig-Huyghens
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$$

Puisque $V(X) \geq 0$, on a $\mathbb{E}\left(X^2\right) \geq \left(\mathbb{E}(X)\right)^2$. Plus généralement, on peut montrer que si φ est une fonction numérique convexe, alors $\mathbb{E}\left(\varphi(X)\right) \geq \varphi\left(\mathbb{E}(X)\right)$ (inégalité de Jensen), mais c'est une autre histoire...
C'est cette formule qu'on utilise en pratique pour calculer la variance d'une VAR à densité.

Exemple **:** Soit X VAR de densité $f(t) = 6t(1-t)\mathbb{1}_{[1,2]}(t)$. Alors X admet une variance : $V(X) = \dfrac{1}{20}$.

Exemple **:** Soit X VAR de densité $f(t) = \dfrac{3}{t^4}\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$. Alors X admet une variance : $V(X) = \dfrac{3}{4}$.

Définition 27 Écart-type d'une VAR à densité
Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2. On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Contrairement à la variance, l'écart-type possède la même unité que X, et s'interprète donc mieux en pratique. Il sert à mesurer la dispersion de X autour de sa valeur moyenne.

Définition 28 VAR à densité centrée réduite Soit X une VAR à densité admettant un moment d'ordre 2.

1. On dit que X est une VAR à densité centrée réduite lorsque $\mathbb{E}(X) = 0$ et $V(X) = 1$.
2. On appelle VAR à densité centrée réduite associée à X la VAR : $\dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

En effet si $Y = \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$, alors Y est une VAR à densité centrée réduite.

3 Lois usuelles

Dans tout ce paragraphe X est une VAR à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Loi uniforme

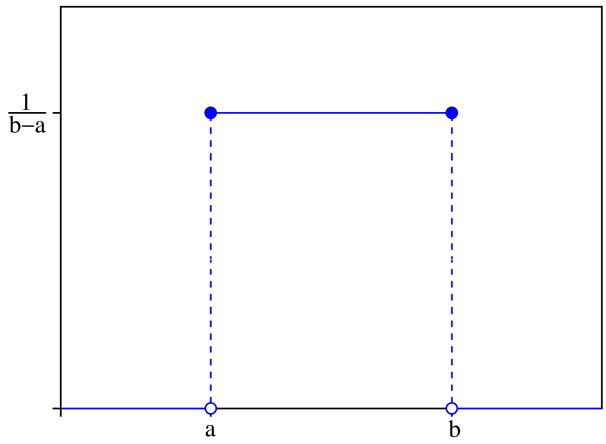
Définition 29 VAR à densité de loi uniforme
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{b-a} 1_{[a,b]}(t)$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique :

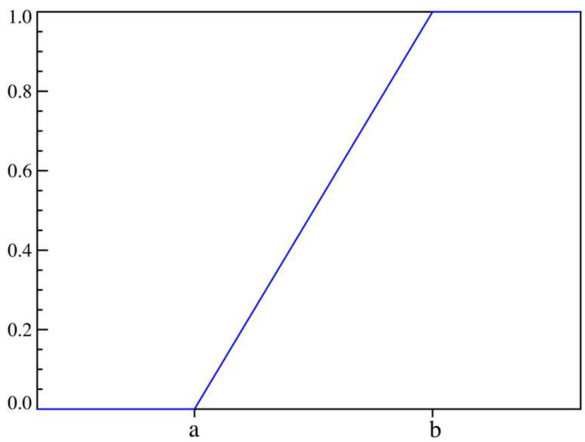


X est p.s. à valeurs dans $[a, b]$ et est donc bornée. Ainsi elle admet des moments à tous ordres.

Proposition 30 Fonction de répartition de $\mathscr{U}([a, b])$
Soit X une VAR quelconque de fonction de répartition F. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a, b])$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a} 1_{[a,b]}(x) + 1_{]b,+\infty[}(x)$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathscr{U}([a, b])$:



Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{P}(X \in I) = \dfrac{\text{longueur de } I \cap [a,b]}{\text{longueur de } [a,b]}$. Les valeurs de X sont donc « uniformément réparties dans l'intervalle $[a,b]$ ».

Théorème 31 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{U}\big([a,b]\big)$
Soit X une VAR de loi $\mathscr{U}\big([a,b]\big)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice 1 Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$.

Proposition 32 Transformation affine d'une loi uniforme
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([0,1]\big) \Longleftrightarrow a+(b-a)X \hookrightarrow \mathscr{U}\big([a,b]\big)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \dfrac{1}{|\alpha|} f\left(\dfrac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

3.2 Loi exponentielle

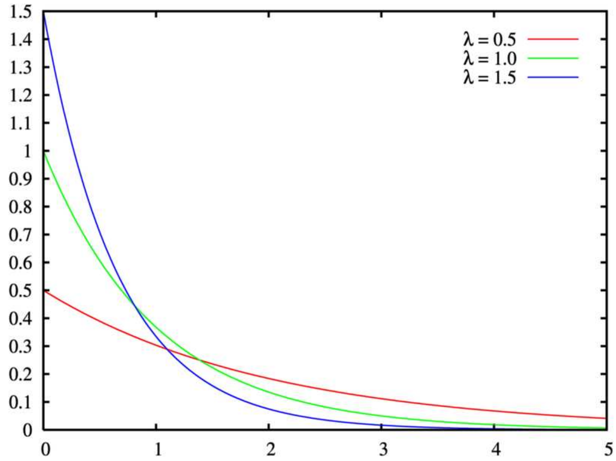
Définition 33 VAR à densité de loi exponentielle
Soit λ un réel tel que $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

On le note $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique pour différentes valeurs du paramètre λ :



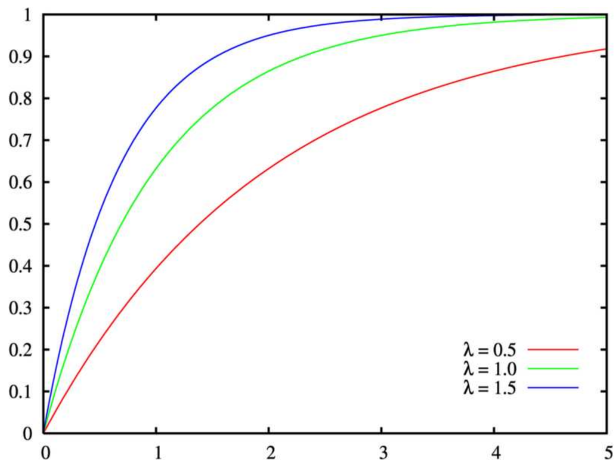
X est p.s. à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 34 Fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$
Soit X une VAR quelconque. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

On en déduit que, pour $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, et pour $x \leq 0$, $\mathbb{P}(X > x) = 1$.

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathscr{E}(\lambda)$ pour différentes valeurs du paramètre λ :



Théorème 35 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathscr{E}(\lambda)$
Soit X une VAR de loi $\mathscr{E}(\lambda)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice 2 Si $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$.

Théorème 36 Absence de mémoire de la loi exponentielle
Soit X une VAR presque sûrement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, et qui n'est pas presque sûrement nulle.
On a équivalence de :
(i) X est à densité et suit une loi exponentielle ;
(ii) X vérifie la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^+, \quad \mathbb{P}(X > x+Y) = \mathbb{P}(X > x)\mathbb{P}(X > y)$$

La loi certaine nulle vérifie aussi la propriété d'absence de mémoire, c'est pourquoi elle a été exclu dans les hypothèses.

Si $\mathbb{P}(X > x) > 0$ la propriété (ii) s'écrit : $\mathbb{P}(X > x+y|X > x) = \mathbb{P}(X > y)$. Les lois exponentielles sont donc une généralisation des lois géométriques dans le cas des VAR à densité. Elles sont utilisées pour modéliser des temps d'attente (par exemple la durée de vie d'un appareil, en négligeant les phénomènes d'usure).

Démonstration : $(i) \Longrightarrow (ii)$ Simple calcul.
$(ii) \Longrightarrow (i)$ On définit une fonction $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par $\pi(x) = \mathbb{P}(X > x)$.
Si $x \geq 0$, on a par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\pi(nx) = \pi(x)^n$.
En particulier $\pi(n) = a^n$ où on a posé $a = \pi(1) \in [0,1]$.
Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, alors $\pi(qr) = a^p = \pi(r)^q$, d'où $\pi(r) = a^{\frac{p}{q}} = a^r$.
Si $x > 0$, on l'approxime par deux suites adjacentes de rationnels, pour obtenir $\pi(x) = a^x$.
La continuité à droite de F_X en 0 donne celle de π. On a donc $\pi(0) = \lim_{x \to 0^+} a^x$. Comme $\pi(0) = 1$, on a $a > 0$.
Le fait que $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$ donne $a < 1$.
On note λ le réel strictement positif tel que $\pi(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, pour $x > 0$: $\lambda = -\ln(a)$.
Alors $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

CQFD □

Proposition 37 Transformation affine d'une loi exponentielle
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathscr{E}(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

3.3 Loi normale

3.3.1 Loi normale centrée réduite

Rappelons pour commencer que l'intégrale de Gauss $intt{-\infty}{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$.

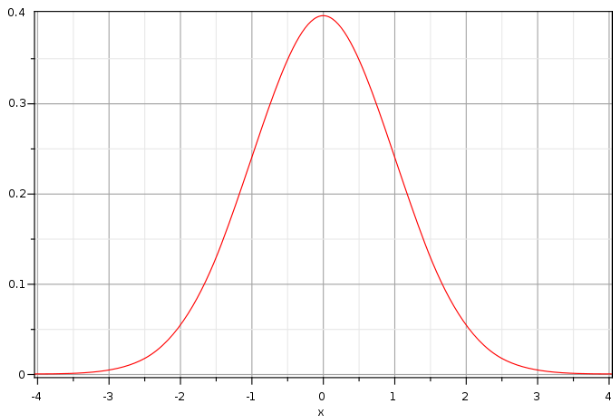
Définition 38 VAR à densité de loi normale centrée réduite
On dit que X suit la loi normale centrée réduite (ou loi de Laplace-Gauss), lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

Voici sa représentation graphique :



Proposition 39 Fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Sa fonction de répartition est la fonction $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

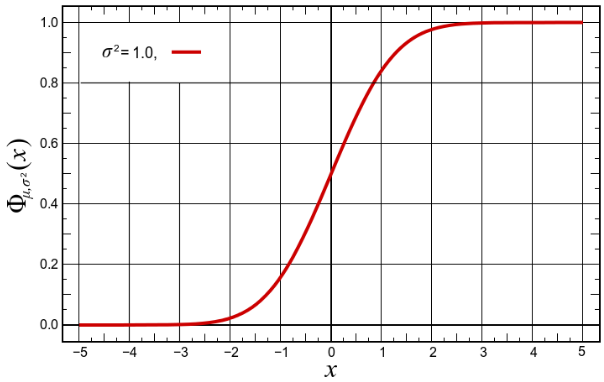
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$$

Elle vérifie $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

On ne connaît pas d'expression simple de $\Phi(x)$, mais des valeurs approchées sont tabulées.

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$:



Exercice 3 Montrer que pour $x \geq 0$: $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$ et $\mathbb{P}(|X| \geq x) = 2\big(1 - \Phi(x)\big)$.

Théorème 40 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathcal{N}(0,1)$
Soit X une VAR de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1$$

Donc si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors X est centrée et réduite, d'où le nom de « loi normale centrée réduite ».

Exercice 4 Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X^r)$ en fonction de la parité de r.

3.3.2 Loi normale : cas général

Définition 41 VAR à densité de loi normale
Soient μ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On dit que X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), lorsque X admet pour densité la fonction f définie par :

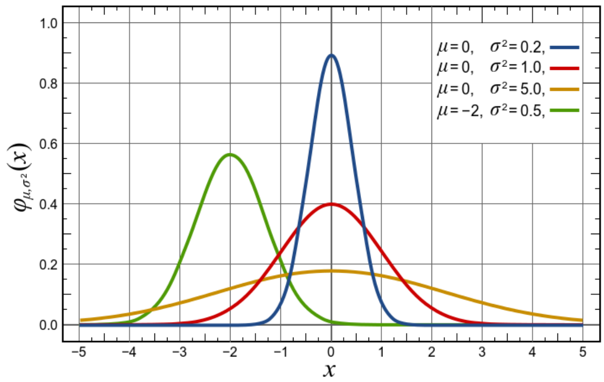
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On le note $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

La fonction f donnée dans la définition vérifie bien les conditions d'une fonction densité.

⚠ Dans certains ouvrages, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Voici la représentation graphique de la densité pour différentes valeurs des paramètres :



Proposition 42 Transformation affine d'une loi normale
Soit X une VAR quelconque. Alors :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Démonstration : On utilise le fait que $Y = \alpha X + \beta$ est aussi à densité, et qu'une de ses densités est la fonction g définie par $g(y) = \frac{1}{|\alpha|} f\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)$.

CQFD □

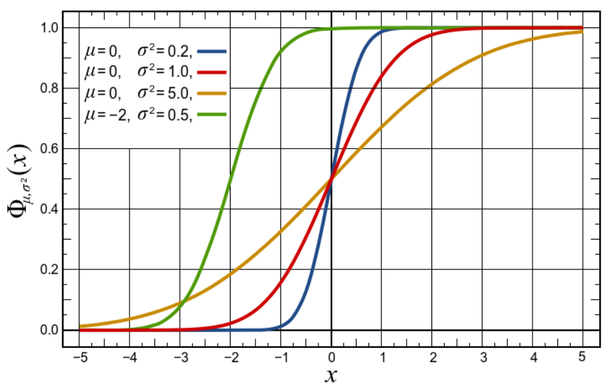
Proposition 43 Fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. On note F_X sa fonction de répartition et Φ celle d'une VAR de loi normale centrée réduite. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Voici la représentation graphique de la fonction de répartition de $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ pour différentes valeurs des paramètres :



Théorème 44 Espérance et variance d'une VAR de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
Soit X une VAR de loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Alors X admet des moments de tous les ordres.
En particulier :

$$\mathbb{E}(X)=\mu \qquad \text{et} \qquad V(X)=\sigma^2$$

Et donc $\sigma=\sigma(X)$ (écart-type de X).

Démonstration : Écrire $X=\mu Y+\sigma$ où $Y\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$ puis utiliser la formule du binôme.

CQFD □

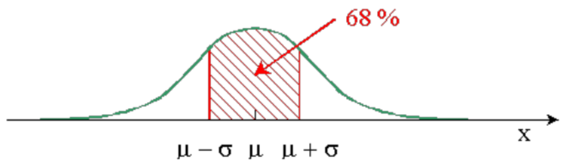
Interprétation graphique des paramètres μ et σ :

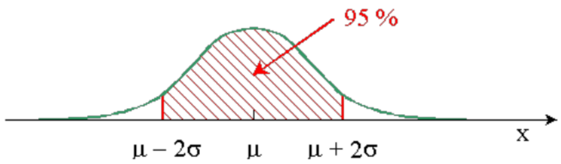
• Le paramètre μ correspond à la moyenne. Puisque le graphe de la densité est symétrique par rapport à l'axe $x=\mu$, on a $\mathbb{P}(X\geq\mu)=\mathbb{P}(X\leq\mu)=\dfrac{1}{2}$.

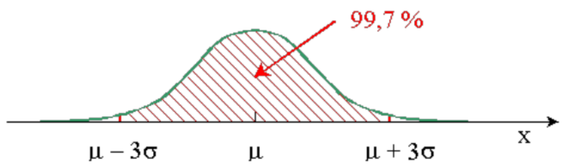
• Le paramètre σ correspond à l'écart-type. On peut aussi montrer que :

$$\mathbb{P}\big(X\in[\mu-\sigma,\mu+\sigma]\big)\simeq 0.68 \qquad \mathbb{P}\big(X\in[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]\big)\simeq 0.95 \qquad \mathbb{P}\big(X\in[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]\big)\simeq 0.997$$

La largeur de la « cloche » est donc approximativement de 6σ.







4 Exercices

Exercice 5

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([-1,2])$, vérifier que X^2 est à densité et donner en une.
2. Même question avec $|X|$.

Exercice 6 Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(X) = x^n \mathbb{1}[0,1](x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une VAR X à densité. On donnera une densité de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 7 Soit $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$.

1. (a) Montrer que $Y = \sqrt{X}$ est à densité et donner en une.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et une variance et calculer les.
2. (a) Montrer que X^2 est à densité et donner en une.
   (b) Montrer que X^3 est à densité et donner en une.

Exercice 8 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{c}{x(x+1)} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$.

1. Déterminer $c \in \mathbb{R}$ pour que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X densité f. Montrer que $Y = \dfrac{1}{X}$ est à densité en donner en une.

Exercice 9 On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$ et de $X - \lfloor X \rfloor$.

Exercice 10 Soit X une VAR de loi $\mathscr{N}(0,1)$. Montrer que X^2 est à densité et donner en une.

Exercice 11 (Simulation de loi par inversion de la fonction de répartition) Soit X une VAR à densité, de fonction de répartition F connue et supposée strictement croissante. Elle admet donc une bijection réciproque $F^{-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I = F(\mathbb{R}) \subseteq [0,1]$.
On se donne aussi U VAR de loi $\mathscr{U}([0,1])$.
Montrer que la VAR $F^{-1}(U)$ est à densité et déterminer sa fonction de répartition.
Application : comment simuler une loi $\mathscr{E}(\lambda)$?
Cette méthode se généralise au cas où F est seulement supposée croissante. Elle n'est plus bijective et il faut alors utiliser la notion d'inverse généralisée qui n'est pas au programme…

Exercice 12 Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(X) = x^n \mathbb{1}[0,1](x) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une VAR X à densité. On donnera une densité de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 13 On pose $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln t)^2\right) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité d'une variable aléatoire X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
3. Soit $Y = \ln(X)$. Comparer $\mathbb{E}(\ln X)$ et $\ln\big(\mathbb{E}(X)\big)$.

Exercice 14 On se donne X une VAR telle que la variable $Y = \ln X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

1. Exprimer la fonction de répartition F de X en fonction de μ, σ et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Π.
2. En déduire que X est une var à densité et donner une densité de X.
3. Montrer que X admet une espérance et calculer là.

Exercice 15 (Loi exponentielle bilatère) On pose : $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Donner la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
3. On pose $Y = |X|$. Montrer que Y suit une loi exponentielle dont on donnera le paramètre.

Exercice 16 (Lois Gamma et gamma) On rappelle que la fonction Γ est définie par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$$

1. (a) Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on définit la fonction f par :

   $$f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{\beta x} (\beta x)^{\alpha - 1} 1_{x>0}$$

   Montrer que f est une densité de probabilité.
   Si X est de densité f on le notera $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$. Cette loi, appelée loi « grand gamma » modélise une durée de vie avec vieillissement.

   (b) Reconnaître la loi $\Gamma(1, \beta)$.

   (c) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
2. Pour $\alpha > 0$, on dit que X suit la loi $\gamma(\alpha)$, lorsque $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, 1)$. Cette loi est appelée loi « petit gamma ».

   (a) Pour $\beta > 0$ montrer que $X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, 1) \iff \beta X \hookrightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}(X)$ et $\overrightarrow{(}\, X)$ existent et les calculer.

Exercice 17 (Processus de Poisson) Des voyageurs arrivent de façon aléatoire dans la salle des pas perdus de la gare de Lyon. On suppose que la variable aléatoire N_t égale au nombre de ces voyageurs arrivant entre les instants 0 et t ($t > 0$) suit une loi de Poisson de paramètre alt ($\alpha > 0$).

1. On note X_1 l'instant d'arrivée du premier voyageur.
   Déterminer $\mathbb{P}(X_1 > t)$ pour tout réel t. En déduire la loi de X_1, puis $\mathbb{E}(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On note X_n l'instant d'arrivée du n-ième voyageur ($n \geq 1$).

   (a) Montrer que, pour $t > 0$, $F_{X_n}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\alpha t)^k}{k!}$. En déduire une densité de X_n.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 18 (Loi Bêta)

1. (a) Soient α et β deux réels. Pour quelles valeurs de α et β, l'intégrale $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

   (b) On suppose que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Montrer que $\beta.B(\alpha+1,\beta) = \alpha.B(\alpha,\beta+1)$ et que $B(\alpha,\beta+1)+B(\alpha+1,\beta) = B(\alpha,\beta)$.
   En déduire que $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

   (a) Montrer que f est une densité de probabilité.
   Si X est une variable aléatoire de densité f, on dira que X suit la loi Bêta de paramètres (α,β).

   (b) Soit X de densité f. Montrer que Y admet une espérance et une variance et calculer les.

Exercice 19 (Loi de Pareto)

1. Soient a et α des nombres réels strictement positifs et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \alpha\dfrac{a^\alpha}{x^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)$.

   (a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
   Si X est une variable aléatoire de densité f, on dira que X suit la loi de Pareto de paramètres (α,a).

   (b) Soit X de densité f. Déterminer la fonction de répartition F de X.

   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une espérance, et calculer la dans ce cas.

   (d) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles X admet une variance, et calculer la dans ce cas.

2. (a) Soient Y de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, β un réel strictement positif et γ un réel strictement supérieur à 1.
   Déterminer la loi de la variable $Z = \beta.\gamma^Y$.

   (b) Étudier la réciproque de la propriété ainsi démontrée.

   (c) Soient Z une variable aléatoire qui suit une loi de Pareto de paramètre (α,a) et c un réel strictement positif.
   Déterminer la loi de Z^c.

Exercice 20 Soit X une VAR de densité f, et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telle que φ' ne s'annule pas sur I. Alors $Y = \varphi(X)$ est une VAR à densité, à valeurs dans $J = \varphi(I)$, et une densité de Y est la fonction g définie par :

$$\forall y \in J, \quad g(y) = \frac{1}{\left|\varphi'\big(\varphi^{-1}(y)\big)\right|}f\big(\varphi^{-1}(y)\big)$$

Exercice 21 Supposons que X suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = 1-\Phi(x) = \mathbb{P}(X \geq x)$$

La fonction s'appelle la **queue de la loi** $\mathcal{N}(0,1)$.

1. En utilisant deux intégrations par parties, montrer que, pour $x > 0$:
   (i) $Q(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
   (ii) $Q(x) \geq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \dfrac{1}{x^3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$
2. En déduire un équivalent de $Q(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 22 (Taux de panne, usure et rodage d'une machine) Une machine tombe en panne à un instant aléatoire T. On suppose que T est p.s. à valeurs positives, et est à densité. On note F sa fonction de répartition et f une de ses densités ; on suppose f nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$.
Si à l'instant $t > 0$ la panne ne s'est pas produite, le risque de panne immédiate se mesure par le **taux de panne** $h(t) = \lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{\mathbb{P}(t < T \leq t+u | T > t)}{u}$. On dit qu'il y a **usure** lorsque h croît, et **rodage** lorsque h décroît.

1. Déterminer h en fonction de F et f.
2. On pose $\Lambda(t) = \displaystyle\int_0^t h(u)\,\mathrm{d}u$. Montrer que, pour $t > 0$:

$$P(T > t) = \mathrm{e}^{-\Lambda(t)}$$

   Calculer $\mathbb{E}(\Lambda(T))$.
3. Montrer que le taux de panne de T est constant si et seulement si T suit une loi exponentielle.
4. On suppose qu'il y a usure sur $]0,+\infty[$. Montrer que, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$:

$$\mathbb{P}(T > s+t) \leq \mathbb{P}(T > s)\mathbb{P}(T > t)$$

Exercice 23 Soit X VAR de densité f et admettant un moment d'ordre 2.
Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)^2 f(x)f(y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.