Chapitre 3

Nombres complexes

1 Propriétés des nombres complexes

1.1 Construction rapide de $\mathbb{C}$

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution. On va donc construire un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, et dans lequel cette équation a des solutions.

On se place dans $\mathbb{R}^2$ munit des opérations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_1 + b_2) \text{ et } (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

De plus on identifie $a \in \mathbb{R}$ avec $(a, 0) \in \mathbb{R}^2$: $a = (a, 0)$. Alors si $i = (0, 1)$, on a $i^2 = (-1, 0) = -1$. On a donc donné une solution à l'équation $x^2 = -1$ et on peut poser :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = (a, b) / \, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

De plus on remarque que si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + ib = (a, 0) + (0, 1) \times (b, 0) = (a, 0) + (0, b) = (a, b)$, donc :

$$\mathbb{C} = \left\{ z = a + ib / \, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On a $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ et on peut démontrer que les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés nombres complexes, ceux de $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ sont appelés nombres complexes purs, et ceux de $i\mathbb{R} = \left\{ ib / \, b \in \mathbb{R} \right\}$ nombres complexes imaginaires purs.

On a les identités remarquables, pour z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:
$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 + 2 z_1 z_2$ et $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2 z_1 z_2$;
$z_1^2 - z_2^2 = (z_1 + z_2) \times (z_1 - z_2)$ et $z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + i z_2) \times (z_1 - i z_2)$;
$(z_1 + z_2)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$;
$z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2} z_2 + z_1^{n-3} z_2^2 + \cdots + z_1 z_2^{n-2} + z_2^{n-1}\right) = (z_1 - z_2) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_1^k z_2^{n-1-k}$.

1.2 Notions de base

Définition 1 Parties réelles et imaginaires
Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors le choix des réels a et b est unique. a est appelé partie réelle de z, notée $\mathscr{Re}(z)$, et b est appelée partie imaginaire de z, notée $\mathscr{Im}(z)$.
On a donc $\mathscr{Re}(z) \in \mathbb{R}$, $\mathscr{Im}(z) \in \mathbb{R}$ et $z = \mathscr{Re}(z) + i \mathscr{Im}(z)$

Proposition 2 Règles de calcul

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\mathscr{R}e(z_1+z_2) = \mathscr{R}e(z_1) + \mathscr{R}e(z_2)$ et $\mathscr{I}m(z_1+z_2) = \mathscr{I}m(z_1) + \mathscr{I}m(z_2)$
   Plus généralement : $\mathscr{R}e\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathscr{R}e(z_k)$ et $\mathscr{I}m\left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathscr{I}m(z_k)$.
2. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \mathscr{R}e(z_1) = \mathscr{R}e(z_2) \\ \mathscr{I}m(z_1) = \mathscr{I}m(z_2) \end{cases}$
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$: $\mathscr{R}e(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathscr{R}e(z_1)$ et $\mathscr{I}m(\lambda \times z_1) = \lambda \times \mathscr{I}m(z_1)$.
4. $\mathscr{R}e(z_1 z_2) = \mathscr{R}e(z_1)\,\mathscr{R}e(z_2) - \mathscr{I}m(z_1)\,\mathscr{I}m(z_2)$
   et $\mathscr{I}m(z_1 z_2) = \mathscr{R}e(z_1)\,\mathscr{I}m(z_2) + \mathscr{R}e(z_2)\,\mathscr{I}m(z_1)$.
5. $z \in \mathbb{R} \iff \mathscr{I}m(z) = 0$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \mathscr{R}e(z) = 0$.
6. Si $z \neq 0$: $\mathscr{R}e\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\mathscr{R}e(z)}{\mathscr{R}e(z)^2 + \mathscr{I}m(z)^2}$ et $\mathscr{I}m\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\dfrac{\mathscr{I}m(z)}{\mathscr{R}e(z)^2 + \mathscr{I}m(z)^2}$.

⚠ Par contre $\mathscr{R}e(z_1 \times z_2) \neq \mathscr{R}e(z_1) \times \mathscr{R}e(z_2)$, $\mathscr{I}m(z_1 \times z_2) \neq \mathscr{I}m(z_1) \times \mathscr{I}m(z_2)$ et si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\mathscr{R}e(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathscr{R}e(z)$, $\mathscr{I}m(\lambda \times z) \neq \lambda \times \mathscr{I}m(z)$.

Définition 3 Conjugué

Si $z \in \mathbb{C}$, on définit le conjugué de z : $\overline{z} = \mathscr{R}e(z) - i\,\mathscr{I}m(z)$.

On a donc : $\mathscr{R}e(\overline{z}) = \mathscr{R}e(z)$ et $\mathscr{I}m(\overline{z}) = -\mathscr{I}m(z)$.

Proposition 4 Règles de calcul

Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
2. $\mathscr{R}e(z_1) = \dfrac{1}{2}(z_1 + \overline{z_1})$ et $\mathscr{I}m(z_1) = \dfrac{1}{2i}(z_1 - \overline{z_1})$.
3. $z_1 \in \mathbb{R} \iff z_1 = \overline{z_1}$ et $z_1 \in i\mathbb{R} \iff z_1 = -\overline{z_1}$.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ et $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
   Plus généralement $\overline{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k} = \sum\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod\limits_{k=1}^{n} z_k} = \prod\limits_{k=1}^{n} \overline{z_k}$.
   De plus : si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$ et si $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z_1^n} = \overline{z_1}^n$.
5. $z \times \overline{z_1} = \mathscr{R}e(z_1)^2 + \mathscr{I}m(z_1)^2 \in \mathbb{R}^+$.

Définition 5 Module

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $|z| = \sqrt{\mathscr{R}e(z)^2 + \mathscr{I}m(z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition 6 Règles de calcul
Soient $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

1. Dans $\mathbb{R}$, valeur absolue et module coïncident.
2. $\left|\mathscr{I}m(z_1)\right| \leq |z_1)$ et $\left|\mathscr{R}e(z_1)\right| \leq |z_1|$.
3. $\left|\overline{z_1}\right| = |z_1| = |-z_1|$.
4. $|z_1| \geq 0$ et $|z_1| = 0 \Longleftrightarrow z_1 = 0$.
   De plus : $z_1 = |z_1| \Longleftrightarrow z_1 \in \mathbb{R}^+$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ donc si $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $|\lambda z_1| = \lambda |z_1|$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left|z^n\right| = |z|^n$.
6. Si $z_2 \neq 0$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

⚠ Attention : en général $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$. Par contre il faut connaître le calcul suivant :

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathscr{R}e\left(z_1\overline{z_2}\right)$$

On aussi l'encadrement suivant.

Théorème 7 Inégalité triangulaire
Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Plus généralement si $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$: $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

1.3 Rappels de trigonométrie

Proposition 8 Propriétés de symétrie

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
   $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\cos(-x) = \cos(x)$

Proposition 9 Valeurs remarquables

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Pour retrouver ces valeurs ont peut se rappeler que :
$0 = \sqrt{\frac{0}{4}}$, $\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ et $1 = \sqrt{\frac{4}{4}}$.

Proposition 10 Formules de bases

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ et $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ et $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
   $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ et $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
4. $\sin(x) = 0 \iff x = 0\ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = k\pi$
   $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z} / x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

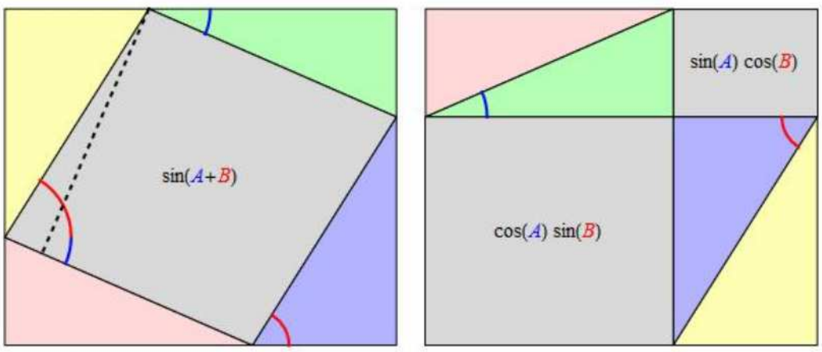
Toutes ces formules se retrouvent aisément à l'aide du cercle trigonométrique !

Proposition 11 Formules fondamentales

1. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\cos(a + b) = \cos(a) \times \cos(b) - \sin(a) \times \sin(b)$
   $\cos(a - b) = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$
   $\sin(a + b) = \sin(a) \times \cos(b) + \sin(b) \times \cos(a)$
   $\sin(a - b) = \sin(a) \times \cos(b) - \sin(b) \times \cos(a)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}$,
   $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
   $\sin(2x) = 2\sin(x) \times \cos(x)$
   donc $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ et $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

Ces formules se retrouvent à l'aide de l'exponentielle complexe.

Elles se démontrent géométriquement. Par exemple la formule d'addition pour le sinus se démontre à l'aide des figures suivantes, où les triangles sont tous d'hypothénuse de longueur égale à 1.



Proposition 12 Formules de transformation

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,$
$$\cos(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a+b)+\cos(a-b)\Big)$$
$$\sin(a)\times\sin(b) = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b)-\cos(a+b)\Big)$$
$$\sin(a)\times\cos(b) = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\Big)$$
2. $\forall (p,q) \in \mathbb{R}^2,$
$$\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p)-\cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)+\sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin(p)-\sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On passe de 1. à 2. à l'aide des formules $\begin{cases} p = a+b \\ q = a-b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{p+q}{2} \\ b = \frac{p-q}{2} \end{cases}$.

Proposition 13 Fonctions tangentes et cotangentes

1. $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle/\, k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle/\, x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]\right\}$
   $\mathscr{D}_{\text{cotan}} = \mathbb{R}\backslash\left\{k\pi \,\middle/\, k\in\mathbb{Z}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R} \,\middle/\, x\neq 0\ [\pi]\right\}$
2. $\forall x\in\mathscr{D}_{\tan},\quad \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\forall x\in\mathscr{D}_{\text{cotan}},\quad \text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$
   si $x\neq 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{cotan}(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} = -\tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
3.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan(x)$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$

4. $\forall x\in\mathbb{R}, \forall k\in\mathbb{Z},\quad \tan(x+k\pi)=\tan(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$
5. Si $a, b, a+b\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\times\tan(b)}$;
   si $a, b, a-b\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\times\tan(b)}$;
   si $a, 2a\in\mathscr{D}_{\tan}$: $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$
6. Si $\theta\neq\pi\ [2\pi]$ et si $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a les formules de l'angle moitié :
$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\quad \text{et}\quad \tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$$

1.4 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition 14 Argument
Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(0; \vec{i}, \vec{j})$. On appelle argument de z tout mesure (définie modulo 2π) de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z (ie de coordonnées $(\mathscr{Re}(z), \mathscr{Im}(z))$). On le note $\mathrm{Arg}(z)$.

Définition 15 Exponentielle complexe
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
On définit ainsi la fonction exponentielle sur $i\mathbb{R}$.

On a donc par définition $\mathscr{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \cos(\theta)$ et $\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right) = \sin(\theta)$.

Définition 16 Forme trigonométrique
Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a $z = |z| \times \Big(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z))\Big) = |z|\mathrm{e}^{i\mathrm{Arg}(z)}$.
On dit qu'on a mis le nombre complexe z sous forme trigonométrique.

On a donc : $\mathscr{Re}(z) = |z|\cos(\mathrm{Arg}(z))$ et $\mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\mathrm{Arg}(z))$.

Proposition 17 Règles de calcul pour l'argument
Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

1. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $z_1 = \underbrace{|z_1| \times \cos(\mathrm{Arg}(z_1))}_{=\mathscr{Re}(z_1)} + i \times \underbrace{|z_1| \times \sin(\mathrm{Arg}(z_1))}_{=\mathscr{Im}(z_1)}$
2. Forme trigonométrique $\longrightarrow$ Forme algébrique.
   $\cos(\mathrm{Arg}(z_1)) = \dfrac{\mathscr{Re}(z_1)}{|z_1|}$ et $\sin(\mathrm{Arg}(z_1)) = \frac{\mathscr{Im}(z_1)}{|z_1|}$
3. $z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \mathrm{Arg}(z_1) = \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$
4. $\mathrm{Arg}(\overline{z_1}) = -\mathrm{Arg}(z_1)\ [2\pi]$
5. $\mathrm{Arg}(z_1 \times z_2) = \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
6. $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg}(z_1) - \mathrm{Arg}(z_2)\ [2\pi]$
7. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{Arg}(z^n) = n \times \mathrm{Arg}(z)\ [2\pi]$

Proposition 18 Règles de calcul pour l'exponentielle complexe
Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

1. $e^{i\theta_1} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1} = \overline{e^{i\theta_1}} = \cos(\theta_1) - i \times \sin(\theta_1)$
2. $\left|e^{i\theta_1}\right| = 1$ et $\text{Arg}\left(e^{i\theta_1}\right) = \theta_1 \ [2\pi]$
3. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$ et $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$
4. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e^{in\theta_1} = \left(e^{i\theta_1}\right)^n$
5. $x \longmapsto e^{ix}$ est 2π-périodique
   donc $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, e^{i(x+2k\pi)} = e^{ix}$
6. $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Longleftrightarrow \theta_1 = \theta_2 \ [2\pi]$
   et en particulier : $e^{i\theta_1} = 1 \Longleftrightarrow \theta_1 = 0 \ [2\pi]$
7. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$. Alors l'application :
   $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$
   est non injective, mais est surjective.
8. Formules d'Euler.
   $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$
9. Formule de De Moivre.
   $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left(\cos(\theta) + i \times \sin(\theta)\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \times \sin(n\theta)$
10. Factorisation de l'angle moyen.
    $e^{ix} + e^{iy} = 2e^{i\frac{x+y}{2}} \times \cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$ et $e^{ix} - e^{iy} = 2ie^{i\frac{x+y}{2}} \times \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

Exemple **:** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, simplifier $\cos(x + n\pi)$ et $\sin(x + n\pi)$.

1.5 Applications des formules de De Moivre et d'Euler

Les formules de De Moivre et du binôme de Newton donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = \left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin^k(\theta)$$

d'où en séparant parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) &= \sum_{0 \le 2p \le n} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(\theta) \sin^{2p}(\theta) \\ &= \cos^n(\theta) - \binom{n}{2} \cos^{n-2}(\theta) \sin^2(\theta) + \binom{n}{4} \cos^{n-4}(\theta) \sin^4(\theta) - \ldots \\ \sin(n\theta) &= \sum_{0 \le 2p+1 \le n} (-1)^p \binom{n}{2p+1} \cos^{n-2p-1}(\theta) \sin^{2p+1}(\theta) \\ &= \binom{n}{1} \cos^{n-1}(\theta) \sin(\theta) - \binom{n}{3} \cos^{n-3}(\theta) \sin^3(\theta) + \ldots \end{aligned}$$

Exemple **:** $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - \cos(\theta)$ Etc...

Inversement on peut « linéariser » des expressions polynômiales en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. En effet partant de $\cos(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}}{2}$ et $\sin(\theta_1) = \dfrac{e^{i\theta_1} - e^{-i\theta_1}}{2i}$, on peut développer $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$ grâce à la formule du binôme de Newton, et obtenir des expressions en $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$.

Ces calculs sont à la base de la définition des polynômes de Tchebychev.

Exemple **:** Linéarisation de $\sin^3(x) \times \cos^2(x)$:

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) \times \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{i5x} - e^{i3x} - 2e^{ix} + 2e^{-ix} + e^{-i3x} - e^{-i5x}\right) \\
&= -\frac{1}{2^4}\left(\sin(5x) - \sin(3x) - 2\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

Ce genre de calcul prendra toute son importance en calcul intégral.

2 Équations polynômiales complexes

2.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Rappel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ notée $x \longmapsto x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.
Ainsi si $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+$: $x^n = a \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Exemple **:** $\sqrt[3]{8} = 2$.

2.1.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On va résoudre l'équation $z^n = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Dans $\mathbb{R}$, les solutions sont $z = 1$ si n impair, et $z = \pm 1$ si n pair.

Dans $\mathbb{C}$, on a le résultat suivant.

Théorème 19 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité
L'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions : $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ces nombres complexes sont appelés racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. On note U_n l'ensemble de ces nombres.
On pose $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Ce complexe est appelé racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont alors : $U_n = \left\{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\right\}$.

<u>**Démonstration**</u> **:** Comme 0 n'est pas solution, on peut supposer $z \neq 0$ et utiliser la forme trigonométrique de z : $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ (détermination principale de $\mathrm{Arg}(z)$).

Alors :

$$\begin{aligned}
z^n = 1 &\iff \left(r e^{i\theta}\right)^n = 1 \\
&\iff r^n e^{in\theta} = 1 = e^{i0} \\
&\overset{r>0}{\iff} \begin{cases} r^n = 1 & \text{même module} \\ n\theta = 0\ [2\pi] & \text{même argument} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} / \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases}
\end{aligned}$$

Mais on cherche $\theta \in [0, 2\pi[$. Il faut donc prendre $k \in \mathbb{Z}$ tel que $0 \leq \dfrac{2k\pi}{n} < 2\pi$, ie $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc : $z^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1/, z = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathscr{S} = \left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

À priori on a donc au plus n solutions. Mais si $(k, k') \in [\![0, n-1]\!]^2$:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} &\iff \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n}\ [2\pi] \\
&\iff \exists p \in \mathbb{Z} / k = k' + pn
\end{aligned}$$

or $-(n-1) \leq k - k' \leq n-1$ donne $p = 0$. Ainsi $k = k'$.

On vient de prouver que l'équation a exactement n solutions.

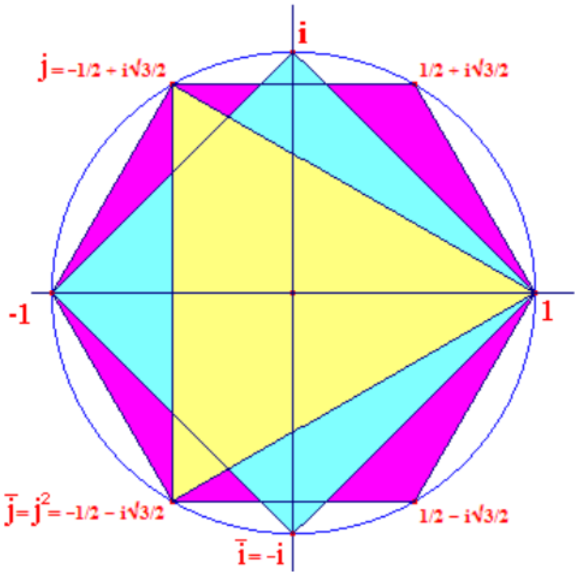
CQFD □

***Exemple* :** Pour $n = 1$, $U_1 = \{1\}$ et $\omega_1 = 1$; pour $n = 2$, $U_2 = \{-1, 1\}$ et $\omega_2 = -1$.
Pour $n = 3$, $U_3 = \{1, j, \overline{j}\}$ avec $j = \omega_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Pour $n = 4$, $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$ et $\omega_4 = i$.

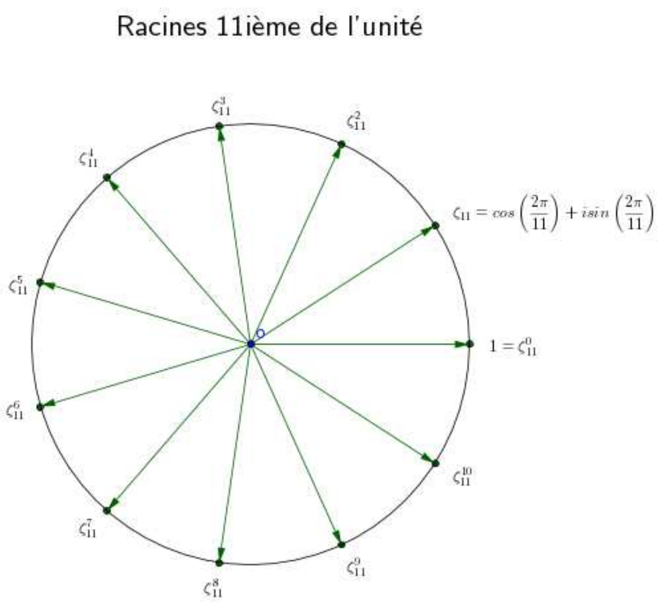
***Exemple* :** Si $n \geq 2$, la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est égale à 0.

Proposition 20 Interprétation géométrique
Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité forment les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

La figure suivante représente les racines cubiques, 4-ièmes et 6-ièmes de l'unité :



Et celle-ci les racines 11-ièmes de l'unité :



2.1.2 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On va résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Si $a = 0$, on a une unique solution : $z = 0$.

Si $a \neq 0$, on a le résultat suivant.

Théorème 21 Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe
Pour tout nombre complexe $a = \rho e^{i\alpha}$ non nul, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions appelées racines $n^{\text{ièmes}}$ de a. Elles sont de la forme $\sqrt[n]{\rho}e^{\frac{i}{n}(\alpha+2k\pi)} = z_0\omega_n^k$, $k \in [\![0, n-1]\!]$, où $z_0 = \sqrt[n]{\rho}e^{i\frac{\alpha}{n}}$ est la racine « évidente » de $z^n = a$.

Démonstration : On met a sous forme trigonométrique : $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$ et $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On remarque que l'équation $z^n = a$ a une racine « évidente » : $z_0 = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\alpha}{n}}$. Alors :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff z^n = z_0^n \\ &\iff \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{z_0} \text{ est une racine } n^{\text{ième}} \text{ de l'unité} \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, \frac{z}{z_0} = \omega_n^k \\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,/\, z = \sqrt[n]{\rho} e^{\frac{i}{n}(\alpha + 2k\pi)} \end{aligned}$$

On obtient donc au plus n solutions. Comme précédemment, on peut facilement vérifier qu'il y en a exactement n. On a donc exactement n solutions.

CQFD □

***Exemple* :** Les racines $4^{\text{ièmes}}$ de $1 - i$ sont : $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $-2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{\pi}{16}}$, $2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{7\pi}{16}}$ et $2^{\frac{1}{8}} e^{-i\frac{9\pi}{16}}$.

2.2 Équations du second degré à coefficients réels

On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $az^2 + bz + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.

⚠ Le cas a, b, c complexes n'est pas au programme.

Pour cela on introduit le **discriminant** de l'équation : $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

Théorème 22 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

1. Si $\Delta = 0$, (E) a une unique solution réelle $z = -\dfrac{b}{2a}$.
2. Si $\Delta > 0$, (E) a deux solutions réelles distinctes : $z = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, (E) a deux solutions complexes pures conjuguées : $z = \dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Théorème 23 Théorème de Viet

On note z_1 et z_2 les solutions de (E) ($z_1 = z_2$ si $\Delta = 0$).

1. On a :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \times (z - z_1) \times (z - z_2)$$
et donc : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$
2. Réciproquement si x et y sont solutions du système $\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ alors x et y sont les racines de l'équation : $z^2 - sz + p = 0$.

Exemple **:** Résoudre $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=2 \end{cases}$

Corollaire 24 Signe d'un trinôme du second degré à coefficients réels
Si $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$ alors ax^2+bx+c est « du signe de a en dehors des racines ».
   Plus précisément, si x_1 et x_2 sont les deux racines réelles de l'équation $ax^2+bx+c=0$, avec $x_1 < x_2$, alors pour $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$+$	0	$-$	0	$+$	

   et pour $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Si $\Delta \leq 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$ (donc de signe constant).
   Si $\Delta < 0$ alors ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$, **au sens strict**.
   Si $\Delta = 0$ alors ax^2+bx+c s'annule en un unique réel x_0, et est du signe de a sur $\mathbb{R}\backslash\{x_0\}$ **au sens strict**.

3 Exercices

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations trigonométriques suivantes :
$2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$; $\sin x \leq -\frac{1}{2}$; $\cos(2x)\geq 0$; $\tan x \leq 1$; $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>-1$;
$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$; $\sin^2 x+3\cos x-1<0$; $\cos(2x)-\sqrt{3}\sin(2x)=1$;
$\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 2 Déterminer les nombres complexes z tels que

$$|z|=|z-6+5i|,\quad |\overline{z}+i|=2,\quad z(2\overline{z}+1)=1,\quad |z^2|=|z|,$$
$$\frac{z+4i}{5z-3}\in\mathbb{R},\quad \mathscr{R}e\left(\frac{z-1}{z+1}\right)=0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z+i}{z-i}\right)=-\frac{\pi}{4}\ [\pi].$$

Exercice 3 Soit $\theta\in[0,2\pi]$. Déterminer module et argument de $1+e^{i\theta}$, $1-e^{i\theta}$ et $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$. Faire de même avec : $(1+i)^3$. Donner la forme algébrique de $\frac{1-4i}{1+5i}$.

Exercice 4 (Identité du parallélogramme) Montrer que :

$$\forall (z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right).$$

Interpréter géométriquement.

Exercice 5 Soient $(n,p)\in\mathbb{N}$ tel que $p\leq n$. Calculer $\sum\limits_{k=p}^{n} k$ puis $\sum\limits_{k=p}^{n} z^k$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\cos\theta_1=\cos\theta_2$, $\sin\theta_1=\sin\theta_2$, $\tan\theta_1=\tan\theta_2$.

Exercice 7 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre dans $]0,\pi[$ l'équation : $\cos(n\theta)=0$. Donner le nombre exact de solutions.

Exercice 8 Linéariser les expressions :
$\cos^6 x$; $\cos^2 x\sin^4 x$; $\sin^5 x$; $\cos^3(2x)\sin^3 x$; $\cos(2x)\cos^3 x$.

Exercice 9 Calculer les sommes : $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $\sum\limits_{k=0}^{n}\sin(kx)$ pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 10 Calculer la somme pour tout entier $n\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}sin(kb+a),$$

où a et b sont deux réels donnés.

Exercice 11 Calculer $\cos(5\alpha)$ et $\sin(5\alpha)$ en fonction respectivement de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{10}$.

Exercice 12 Simplifier les expressions $(1+j)^5$, $\frac{1}{(1+j)^4}$, $(1+j)^n$ et $\left(1+j^2\right)^n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Exercice 13 Résoudre les équations suivantes : $z^4-i=0$ et $z^3=-(2+i)^3$.

Exercice 14

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ xy & = & -1 \end{array}\right.$.

2. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $u = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $v = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$. Calculer $u + v$, uv et en déduire la valeur de u et v.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z+1)^n = i(1-z)^n$.

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Calculer : $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n$.

Exercice 17 On note $E = \{z \in \mathbb{C} / \mathscr{I}m(z) > 0\}$ et $F = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.

1. Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \in E \Rightarrow \frac{z-i}{z+i} \in F$.
2. On définit alors l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-i}{z+i} \end{array}$$

   Établir que f est bijective de E sur F. Déterminer l'application f^{-1}.
3. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct.
   (a) On note $E_1 = \{z \in E ; \mathscr{R}e(z) = 0\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_1)$ et le représenter graphiquement.
   (b) On note $E_2 = \{z \in E ; |z| = 1\}$. Déterminer l'ensemble $f(E_2)$ et le représenter graphiquement .

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. On identifie $z \in \mathbb{C}$ et le point M_z d'affixe z.
1. Quels sont les points z invariants par f ?
2. Quelle est l'image par f du cercle trigonométrique T ?
3. Quelle est l'image réciproque par f de la droite réelle ?

Exercice 19 Il s'agit de montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \iff \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$

1. Montrer que :

$$\text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \implies \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

2. Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k|$$

3. Vérifier que, pour z_1 et z_2 non nuls :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_1| \implies z_1 \text{ et } z_2 \text{ ont le même argument}$$

4. En déduire par récurrence que, pour $n \geqslant 2$:

$$\forall (z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \quad \left(\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k| \implies \text{tous les } z_k \text{ ont le même argument} \right)$$