Chapitre 4

Suites réelles

1 Propriétés générales de suites réelles

1.1 Rappels sur les propriétés de $\mathbb{R}$

1.1.1 Relation d'ordre

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$. On a donc : $x < y \Longrightarrow x \leq y$.

***Exemple* :** $2 < 3$ donc $2 \leq 3$.

Proposition 1 Règles de calcul
Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$.

1. Pour l'addition.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \in \mathbb{R},\ x_1 + z \leq y_1 + z$
   - $\left.\begin{array}{l} x_1 \leq y_1 \\ x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
   - $x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow -y_1 \leq -x_1$
2. Pour la multiplication.
   - $x_1 \leq y_1 \Longrightarrow \forall z \geq 0,\ x \times z \leq y \times z$
   - $\left.\begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq y_1 \\ 0 \leq x_2 \leq y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 \leq x_1 \times x_2 \leq y_1 \times y_2$
   - $0 < x_1 \leq y_1 \Longleftrightarrow 0 < \dfrac{1}{y_1} \leq \dfrac{1}{x_1}$

⚠ Attention : on ne peut pas **soustraire** ou **diviser** deux inégalités !

1.1.2 Valeur absolue

Définition 2 Valeur absolue
Pour tout$x \in \mathbb{R}$, on pose $|x| = \max(x, -x) = \left\{\begin{array}{l} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{array}\right.$.

Proposition 3 Règles de calcul
Soient $x,\ y \in \mathbb{R}$.

1. $-|x| \leq x \leq |x|$.
2. Si $\alpha \geq 0$: $|x| \leq \alpha \iff -\alpha \leq x \leq \alpha$.
3. $|-x| = |x|$.
4. $|x \times y| = |x| \times |y| \quad$ donc $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ \left|x^n\right| = |x|^n$.
5. Inégalité triangulaire.

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

avec égalité à droite si et seulement si x et y de même signe.
Plus généralement si $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.

1.1.3 Intervalles

Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$.

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x \leq b\}$ intervalle fermé borné = segment ;

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x < b\}$ intervalle borné ;

$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a < x \leq b\}$ intervalle borné ;

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ a < x < b\}$ intervalle ouvert borné ;

$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x\}$ intervalle fermé ;

$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} /\ a < x\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ x \leq b\}$ intervalle fermé ;

$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} /\ x < b\}$ intervalle ouvert ;

$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ intervalle ouvert <u>et</u> fermé ;

Théorème 4 Caractérisation des intervalles
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. Alors :

$$I \text{ est un intervalle } \iff \forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow [x, y] \subseteq I$$

Définition 5 Intérieur et extérieur d'un intervalle
Soit I un intervalle. On pose :
– $\overset{\circ}{I} = I$ privé de ses bornes = intérieur de I. C'est un intervalle ouvert.
– $\overline{I} = I$ union ses bornes = adhérence de I. C'est un intervalle fermé.

On a bien évidemment $\overset{\circ}{I} \subseteq I \subseteq \overline{I}$. ⚠ Attention : ne pas confondre la notation de l'adhérence avec celle du complémentaire ...

1.1.4 Partie entière

Définition 6 Partie entière
Si $x \in \mathbb{R}$, on admet qu'il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.
On le note $n = \lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$, et on l'appelle la partie entière de x.
Elle est donc caractérisée par : $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
On a aussi : $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice 1 Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

1.2 Les suites réelles

Définition 7 Suite réelle
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
L'ensemble des suites réelles est donc $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, ou encore $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

<u>Notations</u> : pour $n \in \mathbb{N}$, le réel $u(n)$ est noté u_n.
La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou (u_n), ou encore $(u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots)$ (comme une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$).
⚠ Attention : il ne faut pas confondre le réel u_n et la suite (u_n).

On peut aussi définir les suites complexes $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ mais leur étude n'est pas au programme.

Définition 8 Opérations sur les suites
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Addition. $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.
2. Multiplication par un réel. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times (u_n) = (\lambda \times u_n)$.
3. Multiplication. $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$.

Proposition 9 Règles de calcul
Les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Définition 10 Suite définie à partir d'un certain rang
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$. On appelle suite réelle définie à partir du rang n_0 toute application $u : [\![n_0, +\infty [\![\longrightarrow \mathbb{R}$. Cette suite est notée $(u_n)_{n \geq n_0}$.

***Exemple*:** $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$.

Définition 11 Propriété vraie à partir d'un certain rang
Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On dit que $P(n)$ est vraie à partir d'un certain rang (a.p.c.r.) lorsqu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

1.3 Propriétés des suites réelles

Définition 12 Suites majorée, minorées, bornées

1. On dit que (u_n) est majorée lorsqu'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
2. On dit que (u_n) est minorée lorsqu'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
3. On dit que (u_n) est bornée lorsqu'il existe deux réels m et M tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.

Théorème 13 On a :

$$(u_n) \text{ bornée} \iff (|u_n|) \text{ majorée}$$

Définition 14 Suites monotones

1. On dit que la suite (u_n) est croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est stationnaire lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.
   Ceci équivaut à ce qu'elle soit à la fois croissante et décroissante.
4. On dit que la suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang.
⚠ Attention : en général une suite n'est pas monotone, c'est-à-dire ni croissante et ni décroissante (on verra un exemple plus loin).

Définition 15 Suites strictement monotones

1. On dit que la suite (u_n) est strictement croissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}$.
2. On dit que la suite (u_n) est strictement décroissante lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > u_{n+1}$.
3. On dit que la suite (u_n) est strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Ces notions peuvent être définies à partir d'un certain rang. Pour les suites on ne s'intéresse généralement pas à la monotonie stricte, mais seulement à la monotonie au sens large.

Rédaction :

1. On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on détermine le signe de $u_{n+1} - u_n$. S'il ne dépend pas de n à partir d'un rang n_0 alors (u_n) est monotone a.p.c.r..
   Plus précisément si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ; si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour $n \geq n_0$, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
2. Si $u_n > 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ;
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0.
3. Si $u_n < 0$ a.p.c.r. alors on compare $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 :
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est décroissante à partir du rang n_0 ;
   - si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ à partir d'un rang n_0, alors (u_n) est croissante à partir du rang n_0.

***Exemple* :** Étudier la monotonie de $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2 Limite d'une suite

2.1 Suites convergentes - Suites divergentes

Définition 16 Suite convergente
On dit que la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} /\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Dans cette définition on peut remplacer $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ par $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
De plus $|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$: donc a.p.c.r. u_n est « aussi proche que l'on veut » de ℓ.
Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de ε. Parfois on le note $n_0(\varepsilon)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

***Exemple* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

⚠ Attention : la limite ne doit pas dépendre de n. Par exemple on ne peut pas dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{n}$, cela n'a aucun sens !

Théorème 17 Unicité de la limite
Si une suite converge, alors sa limite est unique.

Définition 18 Suite divergente
Lorsqu'une suite n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Définition 19 Limite infinie

1. On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ lorsque :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$$
On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim u_n = +\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ lorsque :
$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ u_n \leq A$$
On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ ou $\lim u_n = -\infty$, ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Dans cette définition on peut remplacer $u_n \geq A$ (resp. $u_n \leq A$) par $u_n > A$ (resp. $u_n < A$). Remarquez que le n_0 qui apparaît dans la définition dépend de A. Parfois on le note $n_0(A)$ pour ne pas perdre de vue cette dépendance.

***Exemple* :** $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Proposition 20 Lien entre convergence et divergence
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ ne converge pas.

Définition 21 Divergence de première ou seconde espèce
Une suite qui diverge vers $\pm\infty$ est dite divergente de première espèce.
Une suite qui n'a pas de limite est dite divergente de seconde espèce.

⚠ Attention : la plupart des suites sont divergentes de seconde espèce.

***Exemple* :** La suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (nous en verrons la preuve plus tard).

Théorème 22 Premiers termes et nature d'une suite
En modifiant un nombre fini de termes d'une suite (u_n), on ne change pas sa nature (ie le fait qu'elle soit convergente ou divergente de première ou seconde espèce). Dans le cas où la suite est convergente, on ne modifie pas non plus la valeur de sa limite.

2.2 Propriétés des suites convergentes

Lemme 23 Une suite bornée a.p.c.r. est bornée à partir du rang 0.

Théorème 24 Convergence et bornitude
Une suite convergente est bornée.

⚠ ATTENTION ! La réciproque est fausse : une suite bornée n'est en général pas convergente, comme le montre l'exemple de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Par contre, on verra qu'une suite **monotone et bornée** converge.

Théorème 25 Limite et signe
Si une suite (u_n) converge vers un réel $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$), alors $u_n > 0$ a.p.c.r. (resp. $u_n < 0$ a.p.c.r.).

Proposition 26 Quelques résultats techniques

1. (u_n) converge vers $\ell \iff (u_n - \ell)$ converge vers 0 ;
2. (u_n) converge vers $0 \iff (|u_n|)$ converge vers 0
   donc (u_n) converge vers $\ell \iff (|u_n - \ell|)$ converge vers 0

Théorème 27 Passage à la limite dans une inégalité
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r.. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et (v_n) converge vers L.
Alors $\ell \leq L$.

⚠ Attention : $\forall n \geq n_0,\ u_n < v_n$ ne donne pas $\lim u_n < \lim v_n$.
Contre-exemple : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{2}{n}$.

Corollaire 28 Localisation de la limite
Si (u_n) est à valeurs dans un intervalle I d'extrémités a et b a.p.c.r., et si (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell \in \overline{I} = [a, b]$.

2.3 L'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$

On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$.

On dit que $\lim u_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ lorsque (u_n) a une limite (finie ou infinie), ie lorsque (u_n) est convergente ou divergente de première espèce.

Définition 29 Règles de calcul

1. $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty$
   ⚠ $(-\infty) + (+\infty)$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0$ et donc $\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ n'est pas défini.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \dfrac{\pm\infty}{x} = \pm\infty$
   ⚠ $\dfrac{\pm\infty}{0}$ n'est pas défini ;
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*,\ \dfrac{x}{0^+} = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*,\ \dfrac{x}{0^-} = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $\dfrac{0}{0^\pm}$ et $\dfrac{0}{0}$ ne sont pas définis.
4. $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*,\ x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = \begin{cases} +\infty \text{ si } x > 0 \\ -\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}^*,\ x \times (-\infty) = (-\infty) \times x = \begin{cases} -\infty \text{ si } x > 0 \\ +\infty \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   ⚠ $0 \times \pm\infty$ n'est pas défini.

2.4 Théorèmes généraux sur les limites

Dans le théorème suivant, on utilise les propriétés de $\overline{R}$ définie précédemment.

Théorème 30 Limites et opérations algébriques

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\lim v_n \overset{\text{existe}}{=} L \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Valeur absolue. $\lim |u_n| \overset{\text{existe}}{=} |\ell|$
2. Addition. $\lim(u_n + v_n) \overset{\text{existe}}{=} \ell + L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $(+\infty) + (-\infty)$.
3. Multiplication par un réel. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim \alpha \times u_n = \alpha \times \lim u_n$,
   ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
4. Multiplication. $\lim(u_n \times v_n) = \ell \times L$, ⚠ sauf la forme indéterminée $0 \times \pm\infty$.
5. Quotient. Si $L \neq 0$, alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est définie a.p.c.r. et $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{L}$
   ⚠ sauf les formes indéterminées $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0^\pm}$ et $\frac{\infty}{0}$.

⚠ ATTENTION : en général $\lim(u_n - v_n) = 0$ ne donne pas $\lim u_n = \lim v_n$ ... Il faut en effet que $\lim u_n$ et $\lim v_n$ existent !

⚠ ATTENTION : ce théorème ne dit pas que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\right)^{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n}$. Par exemple, on verra que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \mathrm{e} \neq 1$.

Théorème 31 Théorème d'existence de la limite par encadrement

1. Version limite finie.
   Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (w_n) convergent vers la limite ℓ.
   Alors (v_n) converge vers ℓ.
2. Version limite infinie.
   Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ a.p.c.r., et (u_n) et (u_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (v_n) diverge vers $-\infty$).
   Alors (v_n) diverge vers $+\infty$ (resp. (u_n) diverge vers $-\infty$).

⚠ Attention : ne pas confondre avec le théorème de passage à la limite dans une inégalité. Dans le théorème d'existence de la limite par encadrement on montre l'existence de la limite de (v_n), alors que dans l'autre théorème c'est une des hypothèses de départ.

***Exemple* :** On peut montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$ ou que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}} = 0$.

Corollaire 32 Preuve d'une convergence par encadrement

Si on a deux suites réelles (u_n) et (α_n) telles que $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ a.p.c.r., et $\lim \alpha_n = 0$ alors $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} = \ell$.

Théorème 33 Composition d'une suite par une fonction
Soit (u_n) une suite réelle de limite $\boxed{\ell} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to \boxed{\ell}} f(x) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) \overset{\text{existe}}{=} \boxed{a}$.

***Exemple* :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin(x)$ n'existe pas.

2.5 Suites d'indices pairs et impairs

Définition 34 Suite extraite
Soit (u_n) une suite réelle. On appelle suite extraite de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ application strictement croissante.

***Exemple* :** (u_{n-1}), (u_{n+1}), (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n). Mais $(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ et $(u_{\lfloor 1-\cos(n) \rfloor})$ n'en sont pas.

Théorème 35 Limite des suites extraites
Si $\lim u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\lim u_{\varphi(n)} \overset{\text{existe}}{=} \ell$.

On a une réciproque dans le cas de suites extraites recouvrantes, ie que l'union des suites extraites redonnent toute la suite de départ. Le seul cas au programme est celui des suites extraites d'indices pairs et impairs.

Théorème 36 Théorème des suites extraites recouvrantes
Si (u_n) est une suite réelle et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \to +\infty} u_{2n} = \ell \ \boxed{et} \ \lim_{n \to +\infty} u_{2n+1} = \ell$$

On peut aussi montrer aisément (par simple décalage d'indice) que : $\lim u_n = \ell \iff \lim u_{n-1} = \ell \iff \lim u_{n+1} = \ell$.

***Exemple* :** Montrer que la suite $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente de seconde espèce (ie n'a pas de limite).

2.6 Bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$

Définition 37 Partie majorée, minorée, bornée
On se donne une partie A de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel M est un majorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
   Si A admet au moins un majorant, on dit que A est une partie majorée.
2. Un réel m est un minorant de A lorsque : $\forall x \in A,\ m \leq x$.
   Si A admet au moins un minorant, on dit que A est une partie minorée.
3. On dit que A est bornée lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée, c'est-à-dire qu'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x \leq M$.

Il est clair qu'un partie majorée (resp. minorée) admet une infinité de majorants (resp. de minorants).

Proposition 38 Partie bornée et valeur absolue
Si A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide : A est bornée $\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ |x| \leq M$.

On peut reformuler ce résultat ainsi : A est bornée si et seulement si $|A|$ est majorée.

Définition 39 Maximum et minimum
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Un réel b est un maximum de A lorsque $b \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un majorant de A : $\forall x \in A$, $x \leq b$. S'il existe, le maximum est unique et est noté : $b = \max A$. On l'appelle aussi le plus grand élément de A.
2. Un réel a est un minimum de A lorsque $a \in A$ $\boxed{\text{et}}$ b est un minorant de A : $\forall x \in A$, $a \leq x$. S'il existe, le minimum est unique et est noté : $a = \min A$.On l'appelle aussi le plus petit élément de A.

Définition 40 Bornes supérieure et inférieure
Soit A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide.

1. Si l'ensemble des majorants de A, noté $\mathscr{E}_A = \{M \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ x \leq M\}$, est non vide et admet un plus petit élément b, alors b est appelé borne supérieure de A, notée $\sup A$. $\sup A$ est donc le plus petit majorant de A, et en particulier A est majorée par $\sup A$: $\forall x \in A,\ x \leq \sup A$.
2. Si l'ensemble des minorants de A, noté $\mathscr{F}_A = \{m \in \mathbb{R} /\ \forall x \in A,\ m \leq x\}$, est non vide et admet un plus grand élément a, alors a est appelé borne inférieure de A, notée $\inf A$. $\inf A$ est donc le plus grand minorant de A, et en particulier A est minorée par $\inf A$: $\forall x \in A,\ \inf A \leq x$.

Proposition 41 Lien entre maximum et borne supérieure

1. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$.
2. Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf A = \min A$.

⚠ Attention : par contre une partie A peut avoir une borne supérieure sans avoir de maximum !

Théorème 42 Caractérisation de la borne supérieure
Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors :
$$b = \sup A \iff \begin{cases} b \text{ est un majorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } b. \end{cases}$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Alors $a = \inf A \iff \begin{cases} b \text{ est un minorant de } A; \\ \text{il existe une suite } (x_n) \text{ à valeurs dans } A \text{ et convergente vers } a. \end{cases}$

***Exemple* :** Étudier $\max A$ et $\sup A$ pour $A = [0,1]$ et $A = [0,1[$.

Théorème 43 Théorème fondamental de la borne supérieure

1. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors A admet une borne supérieure.
2. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, alors A admet une borne inférieure.

Proposition 44

1. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est majorée, alors A est majorée et $\sup A \leq \sup B$.
2. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subseteq B$ et B est minorée, alors A est minorée et $\inf B \leq \inf A$.

2.7 Propriétés des suites monotones

Nous allons donner deux théorèmes sur les suites monotones qui permettent de prouver la convergence d'une suite sans savoir calculer sa limite

Théorème 45 Théorème de la limite monotone
Soit (u_n) une suite réelle.

1. On suppose (u_n) croissante :
   - si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \lim u_n$;
   - si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. On suppose (u_n) décroissante :
   - si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim u_n \leq u_n$;
   - si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Retenons qu'**une suite monotone a toujours une limite** (finie ou infinie).

Définition 46 Suites adjacentes
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :
(i) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante a.p.c.r. ;
(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Sous les conditions (i) et (ii), on a $u_n \leq v_n$ a.p.c.r..

Théorème 47 Théorème des suites adjacentes
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors elles convergent vers une même limite.

***Exemple* : Tout réel est limite de deux suites adjacentes de rationnels.**
Si $x \in \mathbb{R}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$.
Ces deux suites sont à valeurs dans $\mathbb{Q}$, sont adjacentes, et convergent vers x.

3 Exemples de suites

3.1 Suites arithmétiques

Définition 48 Suite arithmétique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

Proposition 49 Formules autour des suites arithmétiques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)r$.
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à u_0.
   Si $r > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (strictement), divergente vers $+\infty$.
   Si $r < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (strictement), divergente vers $-\infty$.
3. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2} = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Exemple **:** $u_0 = 0$ et $r = 1$ donnent $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$. On retrouve les formules :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} k = \frac{(n-p+1)(n+p)}{2}$$

3.2 Suites géométriques

Définition 50 Suite géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$.

Proposition 51 Formules autour des suites géométriques

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n$; Plus généralement : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p q^{n-p}$ (si $n < p$ il faut supposer $q \neq 0$).
2. Si $r = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stationnaire égale à 0 à partir du rang 1.
   Si $q > 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   Si $q < 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \text{ ie } |q| < 1 \end{cases}$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$ n'existe pas si $q \leq -1$.
4. Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$, on a pour $q \neq 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_0 q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

   et pour $q = 1$:

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)u_0 = \text{nombre de termes} \times \text{premier terme}$$

⚠ ATTENTION ! Si (x_n) est une suite à valeurs dans $]-1,1[$, on ne peut pas dire que $\lim_{n\to+\infty}(x_n)^n = 0$. Par exemple, nous verrons à la fin du chapitre que : $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

***Exemple* :** Pour la suite $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$, vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0^{(2^n)}$. En déduire la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 52 Suite arithmético-géométrique
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique de paramètres $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Remarquons que si $a=1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b, et si $b=0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Dans la suite, on supposera que $a \neq 1$.

On va calculer le terme général u_n en fonction de n, mais cette fois la formule est trop compliquée pour être apprise, il faut donc uniquement retenir la méthode utilisée.

Méthode : on commence par déterminer le point fixe $\ell \in \mathbb{R}$ associé à la relation de récurrence. Il vérifie $\ell = a\ell + b$, donc $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Ensuite on définit une suite auxiliaire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_n - \ell$. Cette suite est alors géométrique de raison a, en effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = u_{n+1} - \ell = au_n + b - \ell = a(x_n + \ell) + b - \ell = ax_n + \underbrace{a\ell + b - \ell}_{=0} = ax_n$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = x_0 a^n = (u_0 - \ell)a^n$ puis $u_n = x_n + l = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$.

On peut alors très facilement en déduire la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 53 Suite récurrente linéaire d'ordre 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Remarquons que si $b=0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.

Définition 54 Équation caractéristique
On appelle équation caractéristique associée à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = az + b$.

Théorème 55 Calcul du terme général u_n en fonction de n
On note $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation caractéristique (E).

1. $\boxed{\text{Si } \Delta > 0}$ (E) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
2. $\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$ (E) a deux racines complexes pures conjuguées $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \big(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)\big)$.

⚠ Dans le cas d'une suite à valeurs **complexes**, on obtient :
$\boxed{\text{Si } \Delta \neq 0}$ (E) a deux racines **complexes** distinctes r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$.
$\boxed{\text{Si } \Delta = 0}$ (E) a une seule racine réelle r_0. Il existe alors un unique couple de **complexes** $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda n + \mu) r_0^n$.

⚠ Le cas d'une suite **réelle** pour laquelle $\Delta < 0$ est un cas particulier du cas d'une suite **complexe** pour laquelle $\Delta \neq 0$. Dans ce cas les deux racines r_1 et r_2 sont conjuguées et on peut donc trouver $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha r_1^n + \beta \overline{r_1}^n$. Nous allons voir comment retrouver la formule du théorème.
On note $r_1 = \rho e^{i\theta}$ sous forme trigonométrique et puisque la suite réelle on a $u_n = \overline{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or :

$$u_n = \overline{u_n} \iff \alpha \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta} = \overline{\alpha} \rho^n e^{-in\theta} + \overline{\beta} \rho^n e^{in\theta} \overset{\rho \neq 0}{\iff} \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta} = \overline{\alpha} e^{-in\theta} + \overline{\beta} e^{in\theta}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut prendre $n = 0$ et $n = 1$:

$$\alpha + \beta = \overline{\alpha} + \overline{\beta}\ (1) \quad \text{et} \quad \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = \overline{\alpha} e^{-i\theta} + \overline{\beta} e^{i\theta}\ (2)$$

Alors $e^{i\theta} \times (1) - (2)$ donne $2i\beta \sin(\theta) = 2i\overline{\alpha} \sin(\theta)$, puis $\beta = \overline{\alpha}$ car $\theta \neq 0\ [\pi]$ (en effet r_1 et r_2 sont des complexes purs). On a donc en notant $\alpha_1 = \mathscr{Re}(\alpha)$ et
$al_2 = \mathscr{Im}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \rho^n \times \left(\alpha e^{in\theta} + \overline{\alpha} e^{-in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathscr{Re}\left(\alpha e^{in\theta}\right) \\
&= 2\rho^n \times \mathscr{Re}\Big[(\alpha_1 + i\alpha_2)\big(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\big)\Big] \\
&= \rho^n \times \Big(\underbrace{2\alpha_1}_{=\lambda \in \mathbb{R}} \cos(n\theta) + \underbrace{(-2\alpha_2)}_{=\mu \in \mathbb{R}} \sin(n\theta)\Big)
\end{aligned}$$

ce qui est bien de la forme attendue.

4 Comparaison des suites

4.1 Notations de Landau

Définition 56 Suite négligeable devant une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$;
(ii) $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, et on dira que u_n est un « petit o » de v_n.

On dit parfois aussi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **prépondérante** devant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⚠ ATTENTION : la notation $o(v_n)$ seule n'a pas de sens !
Elle ne désigne pas une suite fixée, mais n'importe quelle suite négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ ne donnent pas $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (comme on peut le vérifier avec le contre-exemple $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = n^3$).

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a un critère plus simple donné dans le théorème suivant.

Théorème 57 Critère de négligeabilité
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$. Mais certaines suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'annule à partir de n'importe quel rang (prendre $v_n = 1 + (-1)^n$), donc il faut aussi apprendre à manipuler la définition générale de la négligeabilité.

Proposition 58 Règles de calcul pour « le petit o »
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. <u>Transitivité</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
2. <u>Produit</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times b_n)$.
3. <u>Somme</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ donnent $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
4. <u>Multiplication par une constante</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \times u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.
5. <u>Multiplication par une suite</u>. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ donne $u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n \times w_n)$.

Définition 59 Suite dominée par une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
(ii) $u_n = b_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, et on dira que u_n est un « grand o » de v_n.

Les remarques sur la notation $o(v_n)$ sont encore valables pour la notation $\mathcal{O}(v_n)$.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 60 Critère de domination
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n) \Longleftrightarrow \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0} \quad \text{est bornée}$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

Proposition 61 Lien entre « le petit o » et « le grand o »
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

4.2 Suites équivalentes

Définition 62 Suite équivalente à une autre suite
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$;
(ii) $u_n = \alpha_n v_n$ à partir d'un certain rang.
On le notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Proposition 63 Propriétés de la relation $\sim$
On se donne trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Transitivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ donnent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
2. Symétrie. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
3. Réflexivité. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

La propriété de symétrie donne que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc aussi dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes.

⚠ ATTENTION : ne jamais écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$. Cela n'a aucun sens, sauf dans le cas très particulier où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire égale à 0 à partir d'un certain rang.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a encore une fois un critère plus simple.

Théorème 64 Critère d'équivalence
Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0, on a :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

Ce résultat est utilisé en pratique pour prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

Théorème 65 Lien entre la relation $\sim$ et « le petit o »
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$$

On en déduit une méthode simple pour trouver une suite équivalente à une somme.

Corollaire 66 Équivalent d'une somme
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \iff u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Théorème 67 Composition d'un « petit o » par une suite équivalente
Pour trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(a_n)$.

Une suite équivalente renseigne sur le signe.

Théorème 68 Équivalent et signe
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe au sens strcit à partir d'un certain rang.

Une suite équivalente permet de calculer une limite.

Théorème 69 Équivalent et limite
Pour deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \overset{\text{existe}}{=} \ell$.
2. On a une réciproque dans le cas particulier $\ell \in \mathbb{R}^*$: si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

⚠ ATTENTION ! Par contre si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, on ne peut pas en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$.

On peut effectuer les opérations suivantes sur les suites équivalentes.

Proposition 70 Règles de calcul pour la relation $\sim$
On se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Valeur absolue. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
2. Produit. $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ donnent $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$.
3. Puissance. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ donne $u_n^p \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^p$.
   Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$: $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ (à condition que ces suites soient définies).
4. Inverse. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{v_n}$.
5. Quotient. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{a_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b_n}{v_n}$.

⚠ ATTENTION : par contre il n'est pas possible de faire les opérations suivantes.
• **Somme**
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ ne donnent pas $u_n + a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n + b_n$.
On peut considérer le contre-exemple suivant : $u_n = n^3 + n$ et $a_n = -n^3 + n^2$.
• **Composition par une fonction**
Si f est une fonction, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} f(v_n)$.
En particulier $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n}$, et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
On peut considérer les contre-exemples suivantes : $u_n = n^2 + n$, $v_n = n^2$, $f(x) = \mathrm{e}^x$ puis $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $v_n = 1$, $f(x) = \ln(x)$.
Noter aussi que $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, mais en général on n'a pas $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_{n+1}$, bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Considérer par exemple $u_n = \mathrm{e}^{-n}$.
• **Puissance dépendante de n**
$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ne donne pas $u_n^{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^{\alpha_n}$.

On verra à la fin du paragraphe que $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$. On peut en déduire le contre-exemple $u_n = 1+\frac{1}{n}$ et $\alpha_n = n$.

4.3 Comparaison des suites usuelles

On rappelle les limites usuelles suivantes :

- $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha>0 \\ 1 & \text{si } \alpha=0 \\ 0 & \text{si } \alpha<0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} (\ln n)^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta>0 \\ 1 & \text{si } \beta=0 \\ 0 & \text{si } \beta<0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{\gamma n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \gamma>0 \\ 1 & \text{si } \gamma=0 \\ 0 & \text{si } \gamma<0 \end{cases}$
- $\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>1 \\ 1 & \text{si } a=1 \\ 0 & \text{si } -1<a<1 \end{cases}$

Théorème 71 Équivalent et polynômes
Si P est une fonction polynôme de la forme $P(x) = a_q x^q + a_{q+1}x^{q+1}+\cdots+a_p x^p$, où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ avec $q\leq p$, $a_q\neq 0$ et $a_p\neq 0$.
Alors $P(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$ (plus haut degré), et $P\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_q}{n^q}$ (plus bas degré).

Théorème 72 Comparaison de n^α, $n!$ et a^n
On se donne trois réels α, β et a.

1. Si $\alpha<\beta$ alors $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\beta\right)$, ou encore $\frac{1}{n^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.
2. $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$
   Et si $a>1$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(a^n\right)$.
3. $n! = \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^n\right)$

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $a>1$: $n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$

Théorème 73 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
   Et plus généralement, pour $\alpha > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^\alpha\right)$
2. $n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^n\right)$
   Et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$
   De manière équivalente $\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$
   et plus généralement, pour $\gamma > 0$: $\mathrm{e}^{-\gamma n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$
3. Si $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\mathrm{e}^{\gamma n}\right)$.

Démonstration :
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1, 0 \leq \ln(x) \leq \sqrt{x}$.
Pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0$ on utilise l'inégalité : $\forall x \geq 1, \mathrm{e}^x \geq x^2$.

CQFD □

De manière mnémotechnique, on peut retenir que si $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$: $(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \mathrm{e}^{\gamma n}$

Théorème 74 Équivalents usuels
Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers 0.

1. $\ln(1+x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
2. $\tan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
3. $\sin(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
4. $\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $1-\cos(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x_n^2}{2}$
5. $\mathrm{e}^{x_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $\mathrm{e}^{x_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$
6. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$: $(1+x_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ et $(1+x_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha x_n$

Ces résultats sont à connaître par coeur !

***Exemple* :** On est maintenant en mesure de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

Terminons par un résultat de non existence de limite.

Théorème 75 Limite de $\cos n$, $\sin n$ et $\tan n$
Les suites $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas de limite lorsque $n \to +\infty$ (elles sont divergentes de seconde espèce).

5 Exercices

Exercice 2 Montrer que :

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$
2. $\forall (a,b) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2$, $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$
2. $(x^2+2x+1)^2 < 16$
3. $\frac{3x^2+x+1}{x^2-3x-10} > 0$
4. $(2x+1)(5-x) < (5-x)(x+4)$
5. $\frac{x}{x-2} \leqslant \frac{6}{x-1}$
6. $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1$
7. $8x - 18\sqrt{x} - 11 \geqslant 0$
8. $6 \leqslant 2x^2 + 3x - 3 \leqslant 17$
9. $\sqrt{x+1} < 2x - 3$
10. $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{4x-1}$
11. $x - 1 - \sqrt{2x^2+1} \leqslant 0$
12. $|2x-3| = 1$
13. $|4x+5| = |-x+3|$
14. $|7x-3| \geqslant \frac{1}{2}$
15. $|x-3| + |x^2-3x+2| \geqslant 2$
16. $|x-4| \leqslant |2x+1|$
17. $|x^3+x^2-1| + |x-7| + 1 \leqslant 0$
18. $2|x-1| \geqslant 3|1-x|$

Exercice 4 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Peut-on relier $\lfloor x+y \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$?
2. Comparer $\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor$. Calculer $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

Exercice 5 Soient A et B deux parties non vides et bornées.

1. Vérifier que $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$ existent et les exprimer en fonction de $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$.
2. On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Mêmes questions avec $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$. Après avoir remarqué que :

$S_n = \sum_{k=1}^{3} E(\sqrt{k}) + \sum_{k=4}^{8} E(\sqrt{k}) + \cdots + \sum_{k=(n-1)^2}^{n^2-1} E(\sqrt{k}) + n$, donner une expression simple de S_n.

Exercice 7

1. Vérifier que : $\forall x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.
2. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) = n + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right)$$

et en déduire que :

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

Exercice 8 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. On suppose que $\lim u_n = +\infty$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose que $\lim u_n = 0$ et que (v_n) est bornée. Montrer que $(u_n v_n)$ converge vers 0.

3. On suppose que $\lim u_n = +\infty$. Montrer que (u_n) n'est pas bornée.
4. On suppose que (u_n) et (v_n) sont bornées. Montrer que $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont bornées.
5. On suppose que (u_n) est bornée et ne s'annule pas. Peut-on dire que la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est bornée ?

Exercice 9 (Principe de comparaison logarithmique) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiants : $\forall n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \overset{\text{existe}}{=} \ell$, avec $0 \leqslant \ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 10 (Convergence en moyenne de Césaro) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 Étudier la monotonie des suites définies par :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - n$ 2. $u_n = \frac{n!}{2^{n+1}}$ 3. $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ 4. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

Exercice 12 Etudier la limite des suites définies par :

1. $u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$ 2. $v_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$ 3. $w_n = n^2 - n\cos n + 2$ 4. $s_n = \frac{2^n+n}{2^n}$
5. $t_n = n^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \sin(n!)$ 6. $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n-\ln(n^3)}$ 7. $y_n = \frac{\alpha^n}{n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 13 (Limite par encadrement)

1. Etudier la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

2. (a) Vérifier que : $\forall x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.
3. Etudier la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \right\rfloor}$.

Exercice 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair. En déduire la convergence de la suite $\left(\sin\left[(3+\sqrt{5})^n \pi\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 16

1. Soit $n \geqslant 1$. Montrer que l'équation : $x^n + x - 1 = 0$, admet une unique solution $x > 0$, notée x_n.
2. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 1.
3. Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
4. Montrer qu'il est impossible que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite $l < 1$.
5. Conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Exercice 17 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
Soit f la fonction définie sur $I = [1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.
2. Étudier complètement la fonction f et montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution réelle α.
3. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
4. Étudier la suite (u_n) dans les cas $u_0 > \alpha$, $u_0 < \alpha$ et $u_0 = \alpha$.

Exercice 18 (Suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$)
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On déterminera aussi ses éventuels points fixes.
2. Représenter sur le même dessin l'allure de son graphe ainsi que les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
3. On considère les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Étudier leur monotonie.
4. Déterminer leur éventuelle limite.
5. Conclure sur la limite de (u_n).

Exercice 19 (Suites récurrentes d'ordre 1)
Étudier les suites $(u_n)_n$ définies par :

1. $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right)$
3. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \frac{\sin u_n}{n+1}$ (Attention, il y a un piège !)
4. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = e^{u_n}$
5. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Exercice 20 (Suites du type $u_{n+1} = f_n(u_n)$ où f_n dépend de n)
On pose : $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 2$, $(n+1)^2 u_n = (n-1)u_{n-1} - n$.

1. Calculer les 4 premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$: $-1 \leq u_n \leq 1$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 21 (Suites récurrentes couplées)

Soient $0 < b < a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$$

1. Montrer que (u_n) et (v_n) sont bien définies et qu'elles sont strictement positives.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < u_n$.
3. Établir que (v_n) est croissante et (u_n) est décroissante.
4. (a) Vérifiez que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} - v_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - v_n)$
   (b) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Déterminer la limite des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 22 (Changements de suite)

1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n-2}{u_n+2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n > 1$, pour $n \geq 3$. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$, est bien définie.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (c) Donner u_n en fonction de n et calculer $\lim u_n$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n+1}$.
   (a) Montrer que cette suite est bien définie.
   (b) On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = \frac{1}{u_n}$. Montrer qu'elle est bien définie et donner une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis la nature de (u_n) et son éventuelle limite.

Exercice 23 (Calcul de u_n en fonction de n)

Déterminer en fonction de n le terme u_n des suites réelles suivantes :

1. $u_8 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - 3$
2. $u_5 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2}u_n$
3. $u_{11} = 30$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 1$
4. $u_4 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 2$
5. $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e}\sqrt{u_n}$
6. $u_{10} = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n$
7. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (-1)^n u_n$
8. $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = 2u_n + 3u_{n-1}$
9. $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
10. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
11. $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2u_{n+1} + 5u_n = 0$
12. $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 2,\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$
13. $u_0 = 1,\ u_1 = \mathrm{e}^4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \times (u_n)^4 = (u_{n+1})^4$
14. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = nu_{n-1} + n!$

Exercice 24 (Calculs d'équivalents)

Donner un équivalent simple et la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) définies par :

1. $u_n = n^2 - 2n$
2. $u_n = \sqrt{n} + (\ln(n))^{12} + \sin(n)$
3. $u_n = 2^n + n^2$
4. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$
5. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
6. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+1}{n^2}\right)$
7. $u_n = \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$
8. $u_n = \dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}$
9. $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$
10. $u_n = \ln(n+1) + \ln(n)$
11. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+1}{n(n+1)}\right)$

Exercice 25 (γ la constante d'Euler)

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\phi(x) = \frac{1}{x} + \ln(x) - \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \frac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1).$$

1. Étudier le signe des fonctions ϕ et ψ sur $]0,+\infty[$.
2. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{1}{n}$.
3. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 26 (Obtention d'un équivalent par encadrement)

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$.
2. En déduire la limite et un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 27 (Équivalent d'une suite définie implicitement)

Pour $n \geqslant 1$, on note (E_n) l'équation : $x - \ln(x) - n = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution supérieure ou égale à 1, notée x_n.
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Donner un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.