Chapitre 5

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout le chapitre K désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

1.1 Définitions

On fixe n et p deux entiers naturels non nuls.

Définition 1 Matrice
On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application :

$$A: \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & A[i,j] \end{array}$$

Le scalaire $A[i,j]$ est appelé coefficient de A sur la ligne i et la colonne j.
Il est aussi noté a_{ij}, et dans ce cas la matrice A est notée $((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$.
A est représentée sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c}\text{colonne } j\\ \downarrow\end{array} \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On dit aussi que A est un matrice de taille $n \times p$ ou (n,p).

Notation : L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Remarquer que $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$.

Vocabulaire :
• Si $n = 1$, on dit que $A \in \mathscr{M}_{1p}(\mathbb{K})$ est une matrice ligne.

• Si $p = 1$, on dit que $A \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ est une matrice colonne.
• Si $n = p$, $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée d'ordre n.
• La diagonale de A est la famille de ses éléments diagonaux $(a_{ii})_{1\leq i\leq \min(n,p)}$.

Définition 2 Égalité de deux matrices
Soient n, n', p, p' des entiers naturels non nuls, $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n'p'}(\mathbb{K})$.
On dit que $A = B$ lorsque $n = n'$, $p = p'$ et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad A[i,j] = B[i,j]$$

Donc deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont même taille et mêmes coefficients.

Définition 3 Matrices triangulaires
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est triangulaire supérieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

2. On dit que A est triangulaire inférieure lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

3. On dit que A est diagonale lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A[i,j] = 0$$

Une matrice triangulaire supérieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire inférieure est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice triangulaire diagonale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Notations :
- On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures d'ordre n ;
- On note $T_n^-(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées triangulaires inférieures d'ordre n ;
- On note $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales d'ordre n.

Proposition 4 Lien entre matrices diagonales et triangulaires
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est diagonale} \iff A \text{ est à la fois triangulaire supérieure et inférieure}$$

Autrement dit : $D_n(\mathbb{K}) = T_n^+(\mathbb{K}) \cap T_n^-(\mathbb{K})$.

1.2 Opérations dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

On définit l'addition de deux matrices.

Définition 5 Addition dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On définit une matrice notée $A+B = ((c_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (A+B)[i,j] = A[i,j] + B[i,j]$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 \\ 0+4 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

On définit ensuite la multiplication d'une matrice par un scalaire.

Définition 6 Multiplication par un scalaire d'une élément de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On définit une matrice notée $\lambda.A = ((d_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{ij} = \lambda \times a_{ij}$$

On a donc :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad (\lambda.A)[i,j] = \lambda \times A[i,j]$$

Exemple **:** $2.\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times 0 & 2\times 1 \\ 2\times 1 & 2\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Reste à définir l'élément neutre pour l'addition.

Définition 7 Matrice nulle

Dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, on appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note 0_{np}.
Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice 0_{nn} est notée plus simplement 0_n.

Exemple **:** $0_{24} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème 8 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Les deux opérations précédentes ont les propriétés suivantes $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\forall(A,B,C) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^3$:

• *Commutativité de l'addition :*
$A + B = B + A$
• *Associativité de l'addition*
$\left(A+B\right)+C = A+\left(B+C\right)$
• *La matrice nulle est l'« élément neutre » pour l'addition*
$0_{np} + A = A + 0_{np} = A$
• $(-1).A$ *est l'« opposée » de* A
$A + (-1).A = (-1).A + A = 0_{np}$
• *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des scalaires*
$(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$
• *Multiplication par un scalaire distributive p/r à l'addition des matrices*
$\lambda.\left(A+B\right) = \lambda.A + \lambda.B$
• *Associativité de la multiplication par un scalaire*
$\lambda.\left(\mu.A\right) = (\lambda\times\mu).A = \mu.\left(\lambda.A\right)$
• *Le scalaire* 1 *est l'« élément neutre » pour la multiplication par un scalaire*
$1.A = A$

Nous dirons plus tard dans l'année que ces propriéts font de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ un « $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est 0_{np} ». Intuitivement, on constate que ces règles de calcul sont les mêmes que celles apprises au lycée pour les vecteurs du plan (ou de l'espace).

Dorénavant la matrice $(-1).A$ sera notée plus simplement $-A$.

À partir des règles de calcul précédentes, on obtient les règles suivantes.

Corollaire 9 Règles de calcul dans l'espace $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$

Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(A, B) \in \left(\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$, on a :

1. $\lambda.\left(A - B\right) = \lambda.A - \lambda.B$;
2. $\lambda.0_{np} = 0_{np}$;
3. $(\lambda - \mu).A = \lambda.A - \mu.A$;
4. $0.A = 0_{np}$;
5. $(-\lambda).\left(-A\right) = \lambda.A$;
6. *Intégrité externe*
   $\lambda.A = 0_{np} \iff \lambda = 0$ ou $A = 0_{np}$;
   $\lambda.A = \mu.A \iff A = 0_{np}$ ou $\lambda = \mu$;
   $\lambda.A = \lambda.B \iff \lambda = 0$ ou $A = B$.

⚠ Ne pas négliger la propriété d'intégrité externe qui est fondamentale dans la simplification des calculs ou la résolution d'équation.

1.3 Matrices élémentaires

Définition 10 Matrices élémentaires

Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$.

On note E_{ij} la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j qui est égal à 1 :

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \text{colonne } j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

On a donc $\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!]$, $E_{ij}[k, l] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour deux entiers naturels i et j, on introduit le symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a donc $E_{ij}[k, \ell] = \delta_{ik} \times \delta_{j\ell}$.

***Exemple* :** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a quatre matrices élémentaires :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus tard que ces matrices jouent un rôle très particulier dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Produit matriciel

2.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Si $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix} \in \mathscr{M}p1(\mathbb{K})$, on définit le produit $A\times X \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{K})$ par :

$$A\times X = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{p} a_{1k}\times x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}\times x_k\\ \vdots\\ \sum\limits_{k=1}^{p} a_{nk}\times x_k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } i\\ \\ \\ \end{matrix}$$

ie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$(AX)[i,1] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times x_k$$

2.2 Cas général : produit de deux matrices

Soient n, p et q des entiers naturels non nuls.

On définit le produit de $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ par $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ ainsi :
• on note $C_1, \dots, C_q$ les matrices colonnes égales aux colonnes de B,
• la matrice $A\times B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$ est la matrice dont les colonnes sont les matrices colonnes $A\times C_1$, $\dots$, $A\times C_q$.

⚠ Nous ne définissons donc le produit $A\times B$ que dans le cas où le nombre de **colonnes** de A est égal au nombre de **lignes** de B.
Dans les autres cas le produit $A\times B$ n'est pas possible.

Théorème 11 Formule du produit matriciel
Soient $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\le i\le p\\1\le j\le q}} \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On note $A\times B = ((c_{ij}))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}} \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K})$.
On a alors :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]\times[\![1,q]\!],\quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\times b_{kj}$$

Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad (A \times B)[i,j] = \sum_{k=1}^{p} A[i,k] \times B[k,j]$$

⚠ ATTENTION ! Le produit matriciel ne se fait pas coefficient par coefficient (contrairement à l'addition) : $(A \times B)[i,j] \neq A[i,j] \times B[i,j]$.

Démonstration : En effet la j-ième colonne de $A \times B$ est donnée par :

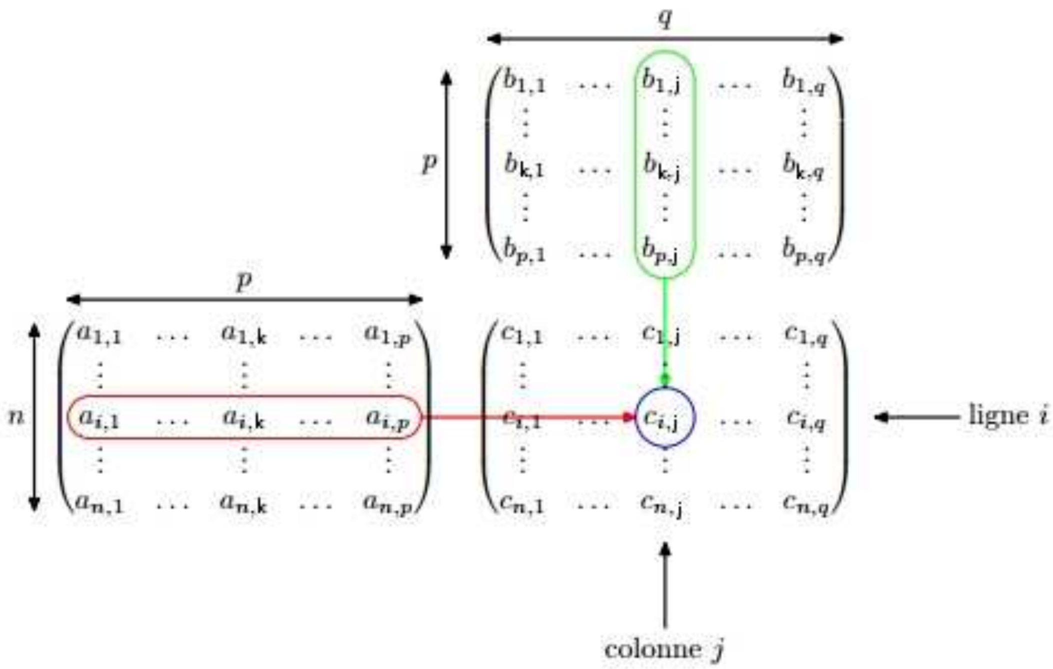
$$A \times C_q = A \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \times b_{kj} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk} \times b_{kj} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \quad \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array}$$

CQFD □

Proposition 12 Lignes de la matrice $A \times B$
On note $L_1, \ldots, L_n$ les matrices lignes égales aux lignes de A. Alors la i-ième ligne de la matrice $A \times B$ est égale à $L_i \times B$.

Comment poser le produit matriciel ?

Le coefficient c_{ij} situé ligne i colonne j se calcule en suivant la ligne i de la matrice A et la colonne j de la matrice B. Une disposition astucieuse des matrices permet de visualiser ce calcul.



Cette figure permet aussi de comprendre pourquoi il est nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $AB = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

⚠ ATTENTION : même si les deux produits AB et BA existent (ce qui est rarement le cas), on voit que $AB \neq BA$ en général. Le produit matriciel **n'est donc pas commutatif**.

Exemple **:** Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2$ on a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$.

⚠ ATTENTION : si $AB = 0_{nq}$, on ne peut pas dire que $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$. Le produit matriciel **n'est pas intègre**.
Plus généralement l'égalité $AB = AC$ ne donne pas $B = C$, même si $A \neq 0_{np}$.
Par contre si $A = 0_{np}$ ou $B = 0_{pq}$, on a bien évidemment $AB = 0_{nq}$.

Définissons maintenant l'élément neutre pour le produit matriciel.

Définition 13 Matrice identité
On note I_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui sont égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Autrement dit : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ I_n[i,j] = \delta_{ij}$.

Théorème 14 Règles de calcul pour le produit matriciel

1. **Associativité :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{qr}(\mathbb{K})$:
$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$
2. **Distributivité à droite :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $(B, C) \in \left(\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})\right)^2$:
$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$
3. **Distributivité à gauche :** Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $C \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$:
$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$
4. **Lien entre produit matriciel et produit par un scalaire :**
Si $(A, B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:
$$\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$$
5. **Élément neutre :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times I_p = I_n \times A = A$$
6. **Matrice nulle :** Si $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:
$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q} \quad \text{et} \quad 0_{m,n} \times A = 0_{m,p}$$

⚠ ATTENTION : rappelons une dernière dois que le produit matriciel est non commutatif et non intègre.

2.3 Produit matriciel et matrices carrées

Appliquons les résultats précédents dans le cas $n = p$: l'addition deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donne encore un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et la multiplication d'un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par un scalaire donne aussi un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. À ces deux opérations s'ajoute le produit matriciel, qui permet de multiplier deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et qui donne un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que ces trois opérations sont **internes**). L'élément neutre pour le produit matriciel est la matrice I_n :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times I_n = I_n \times A = A$$
Ce produit est non commutatif et non intègre.

On peut remarquer que la matrice I_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda.I_n$ commute aussi avec toutes les matrices car $(\lambda.I_n)A = A(\lambda.I_n) = \lambda.A$ (on peut aussi démontrer que ce sont les seules matrices carrées qui commutent avec toutes les autres mais c'est une autre histoire).

Les matrices carrées de la forme $\lambda.I_n = \text{Diag}(\lambda, \dots, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ sont appelées **matrices scalaires**.

Définition 15 Puissances d'une matrice carrée
Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$ on définit A^p par récurrence : $A^0 = I_n$ et $A^p = A \times A^{p-1}$.
Si $p \geq 1$, on a donc $A^p = \underbrace{A \times A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ fois}}$.

⚠ ATTENTION : bien évidemment, on ne peut pas dire que $\left(A^p\right)[i,j] = \left(A[i,j]\right)^p$! Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ (-1)^2 & 0^2 \end{pmatrix}$$

Proposition 16 Règles de calculs des puissances
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$ et $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

1. $\left(A^p\right)^q = \left(A^q\right)^p = A^{pq}$
2. $A^p \times A^q = A^q \times A^p = A^{p+q}$
3. Si A et B commutent : $(AB)^p) = A^p B^p$;
   sinon $(AB)^p = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{p \text{ fois}}$

Théorème 17 Cas de matrices triangulaires/diagonales
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$.Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right)^2$

1. Si $(A,B) \in \left(T_n^+(\mathbb{K})\right)^2$ alors : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)[i,i] = A[i,i] \times B[i,i]$. Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & & & \\ 0 & \mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & & \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$$

   et donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\left(A^p\right)[i,i] = \left(A[i,i]\right)^p$, ie :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \lambda_2 & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & & \\ 0 & \lambda_2^p & \star & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

2. On a les mêmes résultats avec des matrices triangulaires inférieures.
3. En particulier, si A et B sont deux matrices diagonales telles que $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$, alors :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = BA \end{aligned}$$

et pour tout $p \in \mathbb{N}$: $A^p = \left(\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\right)^p = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^p,\dots,\lambda_n^p\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

Corollaire 18 Produit de matrices triangulaires/diagonales

1. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) donne une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieures), autrement dit le produit matriciel laisse stable $T_n^+(\mathbb{K})$ (resp. $T_n^-(\mathbb{K})$).
2. Le produit de deux matrices diagonales donne une matrice diagonale, autrement dit le produit matriciel laisse stable $D_n(\mathbb{K})$.
   De plus, deux matrices diagonales commutent toujours entre elles.

⚠En général, une matrice diagonale ne commute pas avec une matrice quelconque.

De même que pour les nombres réels ou complexes, on peut établir une formule du binôme.

Théorème 19 Formule du binôme de Newton, version matrice
Soient $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ tel que A et B commutent, ie $AB = BA$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.A^k \times B^{n-k} = (B+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.B^k \times A^{n-k}$$

Si A et B commutent, on a donc : $(A-B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}.A^k \times B^{n-k}$.

⚠ ATTENTION : ce résultat est faux si $AB \neq BA$.
Par exemple, on a : $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2.AB + B^2$.

***Exemple* :** On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2.4 Matrices carrées inversibles

Définition 20 Matrice inversible
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible (à gauche et à droite) lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Proposition 21 Unicité de l'inverse
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Alors il y a unicité de la matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Définition 22 Inverse d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle inverse de A l'unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.
On la note A^{-1}.

⚠ ATTENTION : A^{-1} n'existe pas toujours. De plus, il ne faut pas la noter $\dfrac{1}{A}$.

***Exemple* :** I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.

***Exemple* :** 0_n est non inversible.

***Exemple* :** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

***Exemple*:** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = 0_2$ et n'est donc pas inversible.
Plus généralement on dit qu'une matrice $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0_n$; une telle matrice n'est pas inversible.

***Exemple*:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + 2A - 3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Notation : On note $Gl_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n.
$Gl_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire d'ordre n sur $\mathbb{K}$**.

Théorème 23 Règles de calcul de l'inverse
Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\lambda.A$ est inversible et $(\lambda.A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}.A^{-1}$.
4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, A^p est inversible et $\left(A^p\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$.

⚠ ATTENTION ! En général la matrice $A + B$ n'est plus inversible. Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = -A$.

Définition 24 Puissances négatives d'une matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. On pose :
• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$;
• pour tout $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$, $A^n = \underbrace{\left(A^{-1}\right) \times \left(A^{-1}\right) \times \cdots \times \left(A^{-1}\right)}_{-n \text{ fois}}$

Proposition 25 Règles de calcul des puissances négatives
Si $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$, on a : $\left(A^n\right)^p = A^{np} = \left(A^p\right)^n$ et $A^n \times A^p = A^{n+p} = A^p \times A^n$ et $\left(A^{-1}\right)^n = A^{-n}$.

Théorème 26 Inversibilité à gauche ou à droite d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors on a équivalence de :
(i) A est inversible ;
(ii) A est inversible à gauche ;
(iii) A est inversible à droite.

Autrement dit si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles, $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Exemple **:** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2+2A-3I_n = 0_n$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

Proposition 27 Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = ad - bc$$

On a alors :

$$A \text{ est inversible} \iff \det(A) \neq 0$$

et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Démonstration : Remarquer que $A^2 - (a+d).A + (ad-bc).I_2 = 0_2$.

CQFD □

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ donne $A^{-1} = \frac{i}{3}\begin{pmatrix} -i & -i \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Transposition

3.1 Premières propriétés

Définition 28 Transposée d'une matrice

Soit $A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A, la matrice $B = ((b_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad b_{ij} = a_{ji}$$

Cette matrice B est notée ${}^tA$.

Autrement dit :

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad \left({}^tA\right)[i,j] = A[j,i]$$

Exemple **:** ${}^t\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les colonnes deviennent les lignes, et réciproquement.

Théorème 29 Règles de calcul de la transposée
Soient $(A,B) \in \left(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})\right)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$
2. ${}^t\left({}^tA\right) = A$
3. ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$ et donc $\forall q \in \mathbb{N}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.
4. Si $n = p$: A est inversible si, et seulement si, ${}^tA$ l'est. Dans ce cas ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$. Donc $\forall q \in \mathbb{Z}$, ${}^t\left(A^q\right) = \left({}^tA\right)^q$.

Proposition 30 Transposée de matrices triangulaires/diagonales

1. Si $A \in T_n^+(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^-(\mathbb{K})$. De même, si $A \in T_n^-(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in T_n^+(\mathbb{K})$.
2. Si D est diagonale alors ${}^tB$ aussi, puisque ${}^tB = B$.

3.2 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 31 Matrices symétriques/antisymétriques
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que M est symétrique lorsque ${}^tM = M$, ie lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = M[j,i]$$

2. On dit que M est antisymétrique lorsque ${}^tM = -M$, ie lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad M[i,j] = -M[j,i]$$

Si M est antisymétrique, on a : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $M[i,i] = 0$. Donc une matrice antisymétrique a tous ses coefficients diagonaux égaux à 0.

Exemple **:** I_n est symétrique. 0_n est à la fois symétrique et antisymétrique.

Exemple **:** Une matrice symétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et une matrice antisymétrique d'ordre 3 est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

<u>**Notations**</u> **:** on note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n, et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n.

Exemple **:** Soient A et B symétriques. Alors A et B commutent si, et seulement si, AB est symétrique.

⚠ ATTENTION ! En général, le produit de deux matrices symétriques n'est plus symétrique.
Considérer par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui donnent $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

4 Systèmes linéaires

Pour commencer, nous allons voir sur deux exemples pourquoi il est indispensable de résoudre des équations (ou système d'équations) par équivalence.

- On considère l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
  Si on multiplie par x : $x^3 + x^2 + x = 0$. Et comme $x^2 = -x - 1$, on en déduit : $x^3 = 1$, ie $x = 1$ puisque $x \in \mathbb{R}$.
  C'est absurde puisque 1 n'est pas solution de l'équation de départ !!
  Explications : on a en fait raisonné par implications et obtenu $x^2 + x + 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$. Mais $x = 1$ serait l'unique solution à condition d'avoir l'ééquivalence $x^2 + x + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Or ce n'est pas le cas ici, l'implication $x = 1 \Longrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ est fausse.
  On a donc obtenu que l'équation n'a pas de solution !
- On considère le système d'équation : $\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \\ -x + 3y = -3 & (3) \end{cases}$
  (1) + (2) donne $2x = 4$ donc $x = 2$, et (2) + (3) donne $4y = 0$ donc $y = 0$. Le système aurait donc comme unique couple solution $(2, 0)$?
  Encore une fois la réponse est non : ce n'est pas une solution.
  On a donc : $\begin{cases} x - y = 1 & (1) \\ x + y = 3 & (2) \\ -x + 3y = -3 & (3) \end{cases} \Longrightarrow (x, y) = (2, 0)$ mais la réciproque est fausse. En conclusion le système n'a aucune solution.

Que retenir de cas exemples ? Qu'il faut résoudre des équations en raisonnant par équivalence ! Si ce n'est pas possible, alors il faut garder en tête qu'on ne trouve pas que des solutions mais aussi des « candidats solutions ». Il faut alors vérifier au cas par cas si chaque « candidat solution » est bien une solution.

4.1 Définitions

On se donne deux entiers naturels non nuls n et p, ainsi que np coefficients $(a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ dans $\mathbb{K}$ que nous appellerons **coefficients du système**, et n autres coefficients $b_1, \ldots, b_n$ dans $\mathbb{K}$ qui formeront le **second membre du système**.

On considère alors le **système linéaire de n équations à p inconnues** :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{ip}x_p = b_i \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$x_1, x_2, \dots, x_p$ sont appelées **inconnues du système**. **Résoudre le système** (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathscr{S}$ de tous les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ qui sont solutions des équations de $\mathscr{S}$.

On appelle **système homogène associé**, noté (S_0), le système obtenu lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. On note $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène. Remarquez qu'on a toujours $(0, 0, \dots, 0) \in \mathscr{S}_0$, et donc $\mathscr{S}_0 \neq \emptyset$.

On dit que le système (S) est **compatible** lorsque $\mathscr{S} \neq \emptyset$, et incompatible dans le cas contraire. D'après la remarque précédente, un système homogène est toujours compatible.

Définition 32 Systèmes équivalents
Si (S) et (S') sont deux systèmes linéaires, on dit qu'ils sont équivalents lorsqu'ils ont le même ensemble de solutions : $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$.

Deux systèmes équivalents ont donc même nombre d'inconnues mais pas nécessairement le même nombre d'équations.

***Exemple*:** $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x+2y & = & 3 \end{array}\right.$ et $(S')\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 3 \\ x-y & = & 0 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right.$

Définition 33 Opérations élémentaires sur les lignes
On note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les lignes (ie les équations) du système linéaire (S). On définit alors les opérations élémentaires sur les lignes :
- échange des lignes i et j : $L_i \longleftrightarrow L_j$
- multiplication de la ligne i par un scalaire $\beta \in \mathbb{K}^*$: $L_i \leftarrow \beta.L_i$
- POUR $i \neq j$, remplacement de la ligne i par elle-même additionnée du produit de la ligne j par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$: $L_i \leftarrow L_i + \alpha.L_j$

Les deux dernières opérations regroupées donnent : $L_i \leftarrow \beta.L_i + \alpha.L_j$ avec $\beta \neq 0$ et $i \neq j$.

Théorème 34 Opérations élémentaires
Si (S') est un système linéaire obtenu par opérations élémentaires sur les lignes de (S), alors (S) et (S') sont équivalents. Autrement dit, les opérations élémentaires sur les lignes ne modifient pas l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

Définition 35 Système de Cramer
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues (donc $n = p$), qui admet une unique solution.

⚠ un système peut avoir une unique solution sans être un système de Cramer. Par exemple :

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \\ 3x+y &= 4 \end{cases}$$

Les matrices permettent de simplifier les notations. On considère la matrice des coefficients :

$$A = ((a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

la matrice colonne du second membre :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

et la matrice colonne des inconnues :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K})$$

Alors on a le résultat suivant.

Proposition 36 Écriture matricielle d'un système linéaire

$$(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \iff A\times X = B$$

4.2 Le pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est un algorithme, basé sur les opérations élémentaires sur les lignes d'un système, qui permet de déterminer l'ensemble des solutions.

On considère donc le système :

$$(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 &+& a_{12}x_2 &+& \dots &+& a_{1j}x_j &+& \dots &+& a_{1p}x_p &=& b_1 \\ a_{21}x_1 &+& a_{22}x_2 &+& \dots &+& a_{2j}x_j &+& \dots &+& a_{2p}x_p &=& b_2 \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 &+& a_{i2}x_2 &+& \dots &+& a_{ij}x_j &+& \dots &+& a_{ip}x_p &=& b_i \\ \vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 &+& a_{n2}x_2 &+& \dots &+& a_{nj}x_j &+& \dots &+& a_{np}x_p &=& b_n \end{cases}$$

$\boxed{\text{CAS 1}}$ Tous les coefficients du système sont nuls : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = 0$.

$\boxed{\text{CAS 1.1}}$ $b_1 = \dots = b_n = 0$. Dans ce cas le système a une infinité de solutions : $\mathscr{S} = \mathbb{K}^p$. FIN

$\boxed{\text{CAS 1.2}}$ $\exists i \in [\![1,n]\!] /\ b_i \neq 0$. Dans ce cas le système est incompatible : $\mathscr{S} = \emptyset$. FIN

$\boxed{\text{CAS 2}}$ Au moins un des coefficients du système est nul : $\exists (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \neq 0$.

Dans ce cas on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_i$. On obtient un nouveau système linéaire qui, pour simplifier, sera noté comme celui de départ :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

avec cette fois $a_{1j} \neq 0$.

Ensuite on renumérote les inconnues de manière à permuter x_1 et x_j. Dans le nouveau système, on a $a_{11} \neq 0$. Ce coefficient sera notre pivot ; on l'utilise pour faire disparaître l'inconnue x_1 de tous les autres équations grâce aux opérations :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1, \qquad \text{avec} \quad i \in [\![2,n]\!]$$

On a alors le système équivalent à (S) :

$$\left\{\begin{array}{cc|ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
\hline
 & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
 & & \vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

On recommence alors le processus avec le sous-sytème :

$$(S_1) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
a_{32}x_2 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i2}x_2 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{CAS 2.1}}$ Tous les coefficients de $\mathscr{S}_1$ sont nuls. Dans ce cas, on arrête l'algorithme. FIN

$\boxed{\text{CAS 2.2}}$ On se ramène à un système équivalent à (S_1) où $a_{22} \neq 0$. Ensuite, en utilisant ce coefficient comme pivot, on fait disparaître x_2 des autres lignes de (S_1). On obtient alors que

(S) est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{ccc|cccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + \; a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + \; a_{1p}x_p = b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + \; a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + \; a_{2p}x_p = b_2 \\
\hline
 & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3j}x_j & + & \dots & + \; a_{3p}x_p = b_3 \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots \qquad \vdots \\
 & & & a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + \; a_{ip}x_p = b_i \\
 & & & \vdots & & & & & & & \vdots \qquad \vdots \\
 & & & a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + \; a_{np}x_p = b_n
\end{array}\right.$$

Et on recommence avec le sous-système :

$$(S_2)\quad\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_3 \\
a_{43}x_3 & + & \dots & + & a_{4j}x_j & + & \dots & + & a_{4p}x_p & = & b_4 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i3}x_3 & + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n3}x_3 & + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Etc…

On arrête l'algorithme lorsqu'on obtient un sous-système dont tous les coefficients sont nuls :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

ou lorsqu'on a utilisé chaque inconnue comme pivot :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_{p+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint le cas précédent avec $r = p$), ou encore lorsqu'il ne reste plus de lignes dans le dernier sous-sytème :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3n}x_n & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{nn}x_n} & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

(ce qui rejoint encore le cas d'avant avec $r = n$).

On est certain que l'algorithme se termine en un nombre fini d'étapes puisque le système de départ n'a qu'un nombre fini d'équations (donc de lignes).

Dans tous les cas on a donc obtenu :

$$(S) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & + & \dots & + & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

où l'entier naturel r vérifie $1 \leq r \leq \min(n, p)$ ($r = 0$ si le système de départ avait tous ses coefficients nuls, mais ce cas n'a aucun intérêt). De plus, les coefficients diagonaux sont non nuls : $a_{ii} \neq 0$ si $i \in [\![1, r]\!]$.

On dit que (S) a été mis **sous forme réduite de Gauss**.

4.3 Rang et résolution d'un système linéaire

4.3.1 Résolution des systèmes linéaires

On va maintenant résoudre dans le cas général le système linéaire (S). Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, on a :

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{\begin{array}{ccccccccccccccc}
\boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
 & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

et il est donc équivalent de résoudre le système linéaire (S').

On obtient premièrement que le système est compatible si et seulement si $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$. Ces lignes du système seront donc appelés **conditions de compatibilité**. Supposons désormais qu'elles sont vérifiées ; les dernières lignes du système sont donc de la forme $0 = 0$ et peuvent être omises :

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{\begin{array}{cccccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3r}x_r & + & \dots & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \end{array}\right.$$

On a alors deux cas à envisager.

$\boxed{\text{CAS 1}}$ $r = p$ (donc $p \leq n$).

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{\begin{array}{cccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1,p-1}x_{p-1} & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2,p-1}x_{p-1} & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \boxed{a_{33}x_3} & + & \dots & + & a_{3,p-1}x_{p-1} & + & a_{3p}x_p & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \\ & & & & & & & & \boxed{a_{p-1,p-1}x_{p-1}} & + & a_{pp}x_p & = & b_{p-1} \\ & & & & & & & & & & \boxed{a_{pp}x_p} & = & b_p \end{array}\right.$$

Dans ce cas la dernière ligne donne une unique valeur de x_p, l'avant dernière une unique valeur de x_{p-1}, ..., la première une unique valeur de x_1. (S) **a donc une unique solution**.

$\boxed{\text{CAS 2}}$ $r < p$.

$$(S) \Longleftrightarrow (S') \left\{\begin{array}{cccccccccccccc} \boxed{a_{11}x_1} & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & a_{1,r+1}x_{1,r+1} & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ & & \boxed{a_{22}x_2} & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & a_{2,r+1}x_{2,r+1} & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \boxed{a_{rr}x_r} & + & a_{r,r+1}x_{r,r+1} & + & \dots & + & a_{rp}x_p & = & b_r \end{array}\right.$$

Dans cas les $p-r$ inconnues $x_{r+1}, \dots, x_p$ peuvent prendre n'importe quelle valeur. On les appelle les **inconnues libres ou arbitraires**. Une fois cette valeur fixée, les autres inconnues $x_1, \dots, x_p$ peuvent prendre une unique valeur. (S) **a donc une infinité de solutions**.

4.3.2 Rang d'un système linéaire

Définition 37 Rang d'un système linéaire
L'entier naturel r obtenu avec l'algorithme du pivot de Gauss est unique (on l'admet). Il est appelé rang du système, noté $\mathrm{rg}(S)$.

Proposition 38 Rang d'un système linéaire
On a $0 \leq \mathrm{rg}(S) \leq \min(n, p)$.
Et : $\mathrm{rg}(S) = 0$ si et seulement si tous les coefficients de (S) sont nuls.

Théorème 39 Solutions d'un système linéaire
Un système linéaire (S) peut avoir : aucune solution, ou une unique solution, ou encore une infinité de solutions.
S'il est compatible, alors il a une unique solution si et seulement si $\mathrm{rg}(S) = p$ (et alors $p \leq n$).
Dans le cas contraire on a $\mathrm{rg}(S) < p$ et (S) a une infinité de solutions.

Retenir aussi que :
– pour avoir une unique solution, il faut donc au moins autant d'équations que d'inconnues ;
– dans le cas d'une infinité de solutions, le nombre d'inconnues libres est $p - \mathrm{rg}(S)$.

Corollaire 40 Rang et systèmes de Cramer
Si le système linéaire (S) a n équations à n inconnues (donc $n = p$), alors :
(S) est de Cramer si et seulement si $\mathrm{rg}(S) = n$.

4.3.3 Rang et systèmes linéaires échelonnés

Définition 41 Système linéaire échelonné
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est échelonné lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) si le premier terme non nul de la ligne i est en position j, soit la $(i+1)^{\text{ième}}$ est nulle, soit le premier terme non nul de la $(i+1)^{\text{ième}}$ ligne est en position k avec $k > j$.
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a au moins une inconnue en moins « sur la gauche ».

Exemple : $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ est échelonné,

mais $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & z & - & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ ne l'est pas.

Définition 42 Système linéaire triangulaire
Soit (S) un système linéaire. On dit qu'il est triangulaire lorsque :
(i) si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles ;
(ii) le premier terme non nul de la ligne i est en position i (ie sur la diagonale).
Autrement dit : d'une ligne à l'autre il y a exactement une inconnue en moins « sur la gauche ».

L'algorithme du pivot de Gauss donne un système linéaire triangulaire.

Proposition 43 Lien entre triangulaire et échelonné
Un système linéaire triangulaire est échelonné.
La réciproque est fausse.

Exemple **:** $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 3x & + & 8y & + & 5z & + & 4t & = & 0 \\ & & y & & & + & 2t & = & 7 \\ & & & & 2z & + & 6t & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$ est triangulaire donc échelonné,

et $\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & 3y & & & + & t & = & 1 \\ & & & & 3z & + & 5t & = & 0 \\ & & & & & & 7t & = & 3 \end{array}\right.$ est échelonné mais non triangulaire.

On peut remarquer que, quitte à permuter les inconnues, tout système échelonné se mettre sous forme triangulaire.

Théorème 44 Rang d'un système linéaire échelonné
Si (S) est un système linéaire échelonné, alors $\mathrm{rg}(S)$ est égale au nombre de lignes non nulles.

4.4 Matrices inversibles et systèmes linéaires

Théorème 45 Inversibilité et systèmes linéaires
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{ est inversible } \Longleftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \ \forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2, \quad \left[AX = Y \Longleftrightarrow X = BY\right]$$

et dans ce cas $B = A^{-1}$ (donc si elle existe, B est unique).

Application : calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On cherche à résoudre le système linéaire $AX = Y$ avec $(X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})\right)^2$.

On a deux alternatives possibles :
• Le système n'est pas de Cramer (ie il n'a pas une unique solution). Dans ce cas A **n'est pas inversible**.
• Le système est de Cramer. Dans ce cas A **est inversible** et l'unique solution est $X = A^{-1}Y$. On peut donc lire sur l'écriture des solutions les coefficients de A^{-1}.

Exemple **:** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 4 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$.

On en déduit un critère très simple d'inversibilité d'une matrice triangulaire.

Corollaire 46 Inversibilité d'une matrice triangulaire
Soit T une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'oredre n. Alors :

T est inversible $\Longleftrightarrow$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls $\Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,n]\!],\ T[i,i] \neq 0$

L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) est elle-même triangulaire supérieure (resp. inférieure), mais ce résultat n'est pas au programme.

Dans le cas d'une matrice diagonale, on sait aussi facilement calculer son inverse.

Corollaire 47 Inversibilité et puissances d'une matrice diagonale
Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale d'ordre n. Alors :

D est inversible $\iff$ tous ses coefficients diagonaux sont non nuls $\iff \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i \neq 0$

Dans ce cas :

$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix}$$

On en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$: $A^p = \left(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right)^p = \mathrm{Diag}\left(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p\right)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$

5 Exercices

Exercice 1 Calculer les produits de matrices suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

Exercice 2 (Polynôme annulateur et inversibilité) Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Vérifer que $A^2 - A - 2I_2 = 0_2$, puis en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 3 (Calcul de puissances par conjecture) Déterminer A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (Calcul de puissances par récurrence) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 (Calcul de puissances avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. <u>Méthode 1</u> : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. <u>Méthode 2</u> : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 (Calcul de puissances avec la formule du binôme matricielle)

1. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = 0$, puis calculer B^n pour tout $n \geq 3$.
2. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A+I_3)(A-2I_3)$. En déduire l'existence et le calcul de A^{-1}.
2. Soient $B = \frac{1}{3}(A+I_3)$ et $C = -\frac{1}{3}(A-2I_3)$. Déterminer B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. Cette expression est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 8 Déterminer le rang puis résoudre les systèmes linéaires d'inconnues réelles suivants :

1) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ 4x + y + z = 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + 3y - z = 2 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 4x - y - z = 3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = 2 \\ x - y - z - t = 3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 = 0 \end{cases}$

Exercice 9 Inverser les matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 10 Soit $A = ((a_{ij}))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A, notée $\mathrm{Tr}(A)$, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

1. Montrer que : $\forall (A,B,\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \times \mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda.A) = \lambda \times \mathrm{Tr}(A)$.
2. Montrer que : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
   En déduire que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in Gl_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{Tr}(A)$.
3. Peut-on trouver deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $AB - BA = I_n$?

Exercice 11

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors : A et M commutent si et seulement si M est diagonale.
2. Montrer que les seules matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres sont les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.