Chapitre 6

Espaces probabilisés finis

1 Vocabulaire et axiomatique des probabilités

1.1 L'univers

On considère une expérience aléatoire (= expérience dont le résultat ne peut pas être prédit ou calculé à l'avance).

On désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles de cette expérience aléatoire.

Ω est appelé **univers** ou encore **espace des possibles**, **espace des réalisations** ou **espace des observations**. Les éléments $\omega \in \Omega$ sont appelés **observations** ou **réalisations** de l'expérience aléatoire.

Dans ce chapitre, on se limitera toujours au cas où Ω est un **ensemble fini**, c-est-à-dire qu'on ne considèrera que des expériences aléatoires ne donnant qu'un nombre fini de résultats différents.

Exemple **:** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un chiffre entre 1 et 6 qui représente le chiffre obtenu en lançant le dé.

Exemple **:** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\} \times \{1;2;3;4;5;6\} = [\![1,6]\!]^2$. Un élément $\omega \in \Omega$ est un couple (ω_1, ω_2) où ω_1 représente le chiffre obtenue avec le premier dé, et ω_2 le chiffre obtenu avec le second.

Exemple **:** On lance 1 fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}$ ou $\Omega = \{0,1\}$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ».

Exemple **:** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance n fois une pièce : $\Omega = \{P, F\}^n$ ou $\Omega = \{0,1\}^n$ avec la convention que « 1 » représente « pile », et « 0 » représente « face ». Un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des résultats obtenus aux n lancers. Par exemple pour 6 lancers, on peut avoir $\omega = (P, P, F, P, F, P)$ qui se note aussi $\omega = (1,1,0,1,0,1)$.

Exemple **:** Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$.

• On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule, dans une urne de N boules : $\Omega = [\![1,N]\!]^n$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,2,6,4,3,5)$ pour 7 tirages avec remise dans une urne de 6 boules.

• On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule, dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des arrangements de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des n-uplets $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in [\![1,N]\!]^n$ dont les composantes sont deux à deux distinctes. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega$ est un n-uplet qui représente la liste des numéros tirés.

Par exemple $\omega = (6,2,3)$ pour 3 tirages sans remise dans une urne de 10 boules.

• On effectue 1 tirage de n boules prises **simultanément** dans une urne de N boules (dans ce cas $n \leq N$) : Ω = ensemble des combinaisons de n éléments de $[\![1,N]\!]$ = ensemble des parties $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \subseteq [\![1,N]\!]$. Encore une fois ceci sous-entend qu'on a numéroté les N boules de 1 à N ; un élément $\omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\} \in \Omega$ est une partie qui représente les numéros tirés.

Par exemple $\omega = \{6,2,3\}$ pour 1 tirage de 3 boules prises simultanément dans une urne de 10 boules.

***Exemple* :** On mélange une jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$. Ceci sous-entend qu'on a numéroté les cartes de 1 à n en fonction de leur position initiale. Pour la carte numéro i, l'entier $\omega(i)$ représente sa position après la permutation ω.

Par contre, on n'étudiera pas dans ce chapitre le cas d'une infinité de lancers d'une pièce (pourtant très instructif !)…

1.2 Évènements

Intuitivement, un évènement A est défini par une phrase qui peut être vraie ou fausse selon le résultat de l'expérience aléatoire.

***Exemple* :** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$.

A = « obtenir un 6 » donne la partie de Ω : $A = \{6\}$

B = « obtenir un nombre pair » donne la partie de Ω : $B = \{2;4;6\}$

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = [\![1,6]\!]^2$.

A = « obtenir un double 6 » donne la partie de Ω : $A = \{(6,6)\}$

B = « obtenir un double » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} B &= \{(i,i) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\} \end{aligned}$$

C = « obtenir au moins un 6 » donne la partie de Ω :

$$\begin{aligned} C &= \{(i,6) \,/\, i \in [\![1,6]\!]\} \cup \{(6,j) \,/\, j \in [\![1,6]\!]\} \\ &= \{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5)\} \end{aligned}$$

***Exemple* :** On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \,/\, \omega \text{ bijective}\}$.

A = « la première carte se retrouve dans la première moitié du paquet » donne la partie de Ω :

$$A = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,\big/\, \omega(1) = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor\right\}$$

Pour $i \in [\![1,r]\!]$ fixé, B_i = « la carte numéro i n'a pas changé de place » donne la partie de Ω :

$$B = \left\{\omega : [\![1,n \longrightarrow [\![1,n]\!] \text{ bijective} \,\big/\, \omega(i) = i\right\}$$

On voit sur ces exemples qu'un évènement A est nécessairement **une partie de** Ω, ie que $A \in \mathscr{P}(\Omega)$.

Si on note $\mathscr{F}$ l'**ensemble de tous les évènements** qu'on peut associer à l'expérience aléatoire, alors $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

On admettra que sous l'hypothèse que Ω est fini, l'ensemble des évènements est $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, ie que toutes les parties de Ω sont des évènements : on pourra donc calculer leur probabilité. Dans le cas d'un univers infini, certaines parties de Ω ne pourront pas être considérées comme des évènements ; nous ne développerons pas ce point dans ce chapitre.

Vocabulaire :

• On dit que l'**observation** $\omega \in \Omega$ **réalise l'évènement** A lorsque $\omega \in A$. Inversement, si $\omega \notin A$, on dit que l'observation ω **ne réalise pas** A.
• L'évènement $\emptyset$ est appelé **évènement impossible**.
• L'évènement Ω est appelé **évènement certain**.

Il est clair qu'aucune observation ne réalise l'évènement impossible $\emptyset$, et que toutes les observations réalisent l'évènement certain Ω.

Définition 1 Évènements élémentaires
On appelle évènements élémentaires les singletons de Ω, ie les évènements de la forme $\{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$.

Une remarque importante : tout évènement A est réunion d'évènements élémentaires. En effet, on a :

$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

1.3 Opérations sur les évènements

Définition 2 Opérations sur les évènements
Soient A et B deux évènement, c'est-à-dire $(A, B) \in \mathscr{F}^2$.

1. Contraire. L'évènement $\complement_\Omega A = \overline{A}$ est appelé contraire de A.
   Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in \overline{A} \iff \omega \notin A$
   Autrement dit : $\overline{A}$ est réalisé $\iff$ A n'est pas réalisé
2. Union. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \cup B \iff \omega \in A$ ou $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cup B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{ou}}$ B est réalisé
3. Intersection. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \cap B \iff \omega \in A$ et $\omega \in B$
   Autrement dit : $A \cap B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé $\boxed{\text{et}}$ B est réalisé
4. Différence. Pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \backslash B \iff \omega \in A$ et $\omega \notin B$
   Autrement dit : $A \backslash B$ est réalisé $\iff$ A est réalisé et B n'est pas réalisé
5. Implication. $A \subseteq B$ signifie que, pour tout $\omega \in \Omega : \omega \in A \Longrightarrow \omega \in B$
   Autrement dit : A est réalisé $\Longrightarrow$ B est réalisé

On peut aussi remarquer que la différence symétrique $A \Delta B$ permet de définir un « ou » exclusif.

Rappels : Si A, B et C sont des évènements :

$$A \backslash B \subseteq A \qquad A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \Omega = A$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Généralisation pour $(A_i)_{i \in I}$ famille d'évènements :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \qquad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$
$$B \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i) \qquad B \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (B \cup A_i)$$

- L'évènement $\bigcup_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « au moins un des A_i est réalisé ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} A_i$ correspond à l'évènement « tous les A_i sont réalisés ».
- L'évènement $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ correspond à l'évènement « aucun des A_i n'est réalisé ».

Définition 3 Évènements incompatibles
Deux évènements A et B sont dits incompatibles lorsqu'ils sont disjoints, ie lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Intuitivement, A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent pas se produire simultanément.
***Exemple* :** Lorsqu'on lance un dé à 6 faces : les évènements A = « obtenir un chiffre pair » et B = « obtenir un chiffre impair » sont incompatibles.

Définition 4 Espace probabilisable
Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où Ω est l'univers et $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements.

1.4 Système complet d'évènements

Définition 5 Système complet d'évènements
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements de Ω. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements (= s.c.e.) lorsque :
(i) les $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles :

$$\forall (i, j) \in I^2, \quad i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$
(iii) $\forall i \in I, \quad A_i \neq \emptyset$

Les propriétés (i) et (ii) définissent **une partition** de Ω. Un système complet d'évènements est donc un cas particulier de partition.

Intuitivement, un s.c.e. correspond à une disjonction des cas, suivant le résultat de l'expérience aléatoire.

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces. On définit les évènements A = « obtenir deux chiffres pairs », B = « obtenir deux chiffres impairs » et C = « obtenir un chiffre pair et un chiffre impair ».
Alors (A, B, C) est un s.c.e..

***Exemple* :** Si $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq \Omega$, alors $\left(A, \overline{A}\right)$ s.c.e..

Proposition 6 Décomposition d'un évènement sur un s.c.e.
Tout évènement se décompose sur un s.c.e. $(A_i)_{i \in I}$ en une union d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\forall B \in \mathscr{P}(\Omega), \quad B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$$

et les $\left(B \cap A_i\right)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles.

2 Probabilité sur un espace probabilisable

2.1 Probabilités

Définition 7 Probabilité
On appelle probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ toute application $\mathbb{P} : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ telle que :
(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
(ii) $\mathbb{P}$ est additive ie $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$:

$$(A_1, \ldots, A_n) \text{ 2 à 2 incompatibles} \Longrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Si A est un évènement, alors le réel $\mathbb{P}(A)$ est appelé probabilité de l'évènement A.

Définition 8 Espace probabilisé
Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ où Ω est l'univers, $\mathscr{P}(\Omega)$ est la tribu des évènements et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.

Théorème 9 Propriétés d'une probabilité
Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors :
(iii) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$;
On se donne deux évènements A et B :
(iv) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$;
(v) $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et donc si $B \subseteq A$, alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$;
(vi) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;
(vii) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Dans le cas d'une union finie d'évènements, avec un nombre quelconque de termes, et sans hypothèse d'incompatibilité, on a les deux résultats suivants.

Théorème 10 Inégalité de Boole
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$$

Mais la plupart du temps le membre de droite est supérieur à 1, ce n'est pas très intéressant en pratique. On peut aussi utiliser la formule exacte suivante, mais les calculs sont lourds.

Théorème 11 Formule du crible
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout famille finie $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{F}^n$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right)\right)$$

Exemple **:** On mélange n cartes et on note $A =$ « aucune carte ne retrouve sa position initiale ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

C'est aussi la probabilité qu'une permutation aléatoire de n éléments soit un dérangement.

Exemple **:** p personnes entre dans l'ascenseur d'un immeuble de n étages (sans compter le RDC) et descendent chacune à un des n étages. On note $A =$ « À chaque étage au moins une des personnes est descendue ». Alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^p$$

C'est aussi la probabilité qu'une application aléatoire de $[\![1, p]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$ soit une surjection.

2.2 Construction de probabilités

Pour définir une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathscr{P}(\Omega)$, il faut se donner $\mathbb{P}(A)$ pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, ce qui n'est pas toujours possible. On va démontrer qu'il suffit de définir $\mathbb{P}$ sur les évènements élémentaires.

On note $n = \#\Omega$ et $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$.

Théorème 12 Probabilité sur un univers fini

1. Soit $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ avec Ω fini. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on pose $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$. Alors les réels $p_1, \ldots, p_n$ sont dans $[0,1]$ et vérifient $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproque. On se donne des réels $p_1, \ldots, p_n$ vérifiant :
   • ils sont positifs ;
   • $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
   Alors il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}\big(\{\omega_i\}\big)$.
   Et donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i \in [0,1]$.

C'est le deuxième point que nous utiliserons pour définir une probabilité dans le cas d'un univers fini. Cette probabilité $\mathbb{P}$ vérifie :

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Par exemple, si $A = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, alors : $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_5 + p_6$.

En pratique, il suffit donc de connaître la probabilité des évènements élémentaires, pour être capable de calculer la probabilité de n'importe quel évènement.

***Exemple* :** On lance un dé à 6 faces : $\Omega = [\![1,6]\!]$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit une probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ par :

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}; \quad p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$$

ce qui modélise un dé **truqué**.
On a alors $\mathbb{P}($ « Chiffre pair » $) = \dfrac{7}{12}$.

***Exemple* :** On reprend le même espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{F})$ et on définit une autre probabilité $\mathbb{Q}$ par :

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q_6 = \frac{1}{6}$$

ce qui modélise un dé **équilibré**.
On a alors $\mathbb{Q}($ « Chiffre pair » $) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

On voit sur ces deux exemples qu'on effectue la même expérience aléatoire : lancer un dé à 6 faces. Le choix de la probabilité permet de traduire le fait que le dé est **équilibré** ou **truqué**, c'est-à-dire de choisir la probabilité des évènements élémentaires.

Définition 13 Équiprobabilité
Lorsque Ω est fini on note $n = \#\Omega$. L'unique probabilité définie par :

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \frac{1}{n}$$

est appelée probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$.
Pour tout évènement A, on a :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

3 Probabilités conditionnelles

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

3.1 Définition

Intuitivement : si on lance un dé cubique, équilibré, on devine que sachant que le chiffre obtenu est pair, la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 5 est égale à $\frac{2}{3}$.
D'autre part, si on introduit les évènements A = « obtenir un chiffre inférieur ou égal à 5 », B = « obtenir un chiffre pair ».
Comme on est en situation d'équiprobabilité, on trouve $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{6}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$.
On remarque alors que $\frac{2}{3} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Cet exemple motive la définition suivante.

Définition 14 Probabilité conditionnelle
Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. $\mathbb{P}(A|B)$ est aussi notée $\mathbb{P}_B(A)$.

$\mathbb{P}_B(A)$ représente donc la probabilité de A calculée du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il dispose donc de plus d'informations qu'un observateur qui assiste à l'expérience depuis qu'elle a commencée.

⚠ ATTENTION : en général on ne peut pas comparer les valeurs de $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A|B)$, comme le montre l'exemple suivant.

***Exemple* :** On lance deux dés distinguables à 6 faces, équilibrés. On considère les évènements A = « la somme des deux chiffres obtenus est 5 », B = « le premier dé donne 3 », et C = « le premier dé donne au moins 3 ».
Alors $\mathbb{P}(A|C) < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A|B)$.

⚠ ATTENTION : il n'existe pas d'évènement (ie de partie de Ω) $A|B$ = « A sachant B ». Pour cette raison il est préférable d'utiliser la notation $\mathbb{P}_B(A)$ au lieu de la notation $\mathbb{P}(A|B)$.

Théorème 15 Propriétés de $\mathbb{P}_B$
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$.

1. Pour tout $A \in \mathscr{F}$, on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$.
2. $\mathbb{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$.
   En particulier si A_1 et A_2 sont deux évènements :

$$\mathbb{P}_B(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}_B(A_1) + \mathbb{P}_B(A_2) - \mathbb{P}_B(A_1 \cap A_2) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$$

On a donc à disposition deux méthodes pour calculer la probabilité d'un évènement non élémentaire :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$$

Ces deux formules s'appuient sur des techniques totalement différentes : la première est basée sur l'incompatibilité, la seconde sur la dépendance entre deux évènements. En pratique, il faut choisir la solution la plus simple (le fait que l'évènement soit composé de $\cup$ ou de $\cap$ n'est pas décisif puisque les lois de Morgan permettent d'inverser ces symboles).

***Exemple* :** On lance deux dés à 6 faces : calculer la probabilité d'obtenir deux nombres de la même parité.

***Exemple* :** On tire deux fois une boule, sans remise, dans un une urne composée de 6 boules blanches et 2 noires : calculer la probabilité d'obtenir deux boules blanches.

3.2 Formule des probabilités composées

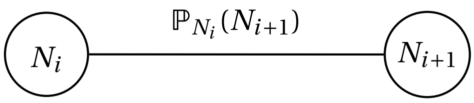
Théorème 16 Formule des probabilités composées / Formule du conditionnement multiple
Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ des évènements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k}(A_n) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right)
\end{aligned}$$

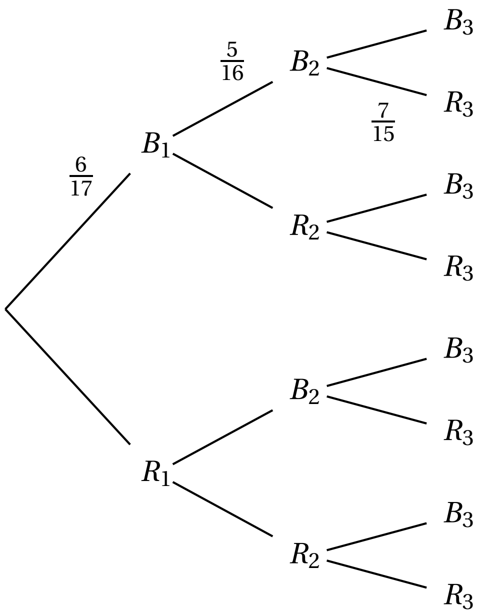
avec la convention que, pour $i = 1$: $\mathbb{P}\left(A_i \middle| \bigcap_{k=1}^{i-1} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)$.

Interprétation sur un arbre :

D'un noeud N_i à un noeud N_{i+1}, on trace une arête étiquetée par la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(N_{i+1}|N_i)$. La probabilité de la branche complète est alors obtenue en multipliant entre elles les probabilités conditionnelles placées sur les arêtes.



***Exemple* :** On considère une urne composée de 6 boules blanches et 7 boules rouges. On effectue 3 tirages successifs d'une boule sans remise. Pour $i = 1$, 2 et 3, on pose B_i = « le i-ième tirage donne une boule blanche », et on définit de même l'évènement R_i.



Alors : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(R_3) = \dfrac{6}{13} \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{11}$.

⚠ ATTENTION : il faut respecter l'ordre chronologique dans le conditionnement ! Sur l'exemple précédent on pouvait aussi écrire que : $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = \mathbb{P}(R_3) \times \mathbb{P}_{R_3}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_2 \cap R_3}(B_1)$, mais cela ne permet pas de faire le calcul !

3.3 Formule des probabilités totales

Théorème 17 Formule des probabilités totales
On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$. Pour tout évènement B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)$$

La formule des probabilités totales est très utile lorsqu'on effectue une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction des cas, suivant le résultat de la première étape.

Complément : On dit que qu'une famille d'évènements $(A_i)_{i\in I}$ est un **système quasi-complet d'évènements** (ou une partition de Ω) lorsque :
(i) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$
(ii) les $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux incompatibles.
La différence avec un s.c.e. est qu'on peut avoir $\mathbb{P}(A_i) = 0$ pour certaines valeurs de l'indice i. Pour ces valeurs $\mathbb{P}_{A_i}(B)$ n'existe pas …mais on a tout de même la formule suivante :

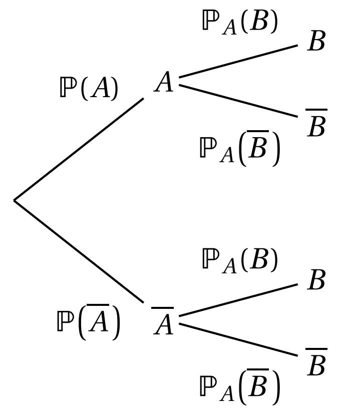
$$\forall B \in \mathscr{F}, \quad \mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

En pratique, l'intérêt de cette généralisation réside dans le fait qu'on ne peut pas toujours vérifier que $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$, et dans ce cas on se contente d'un système quasi-complet d'évènements.

Interprétation sur un arbre :

Sur un arbre à deux générations, on multiplie les probabilités le long d'une branche et on additionne les branches qui réalisent l'évènement considéré.

Par exemple avec un s.c.e. à deux évènements $\left(A, \overline{A}\right)$:

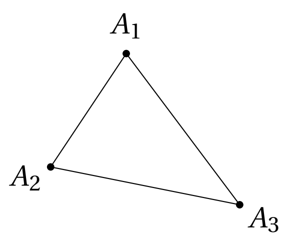


On lit sur l'arbre la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$$

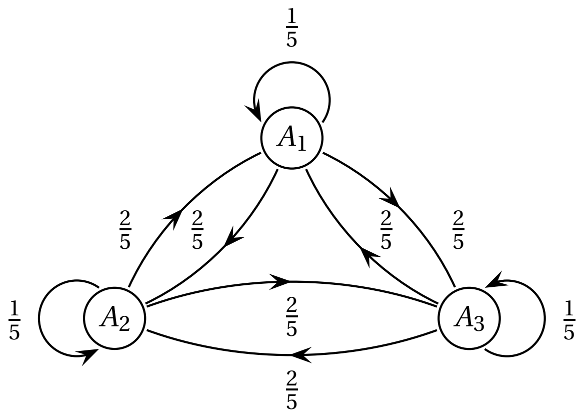
***Exemple* :** On dispose de deux pièces : l'une honnête, l'autre truquée avec deux faces pile. On choisit une pièce au hasard et on la lance. Alors $\mathbb{P}(\text{« obtenir pile »}) = \dfrac{3}{4}$.

***Exemple* : Chaîne de Markov**. On considère un point qui se déplace sur les sommets d'un triangle $A_1A_2A_3$:



On suppose qu'initialement le point se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante :
• si le point est en A_i alors il passe en A_j ($j \neq i$) avec probabilité $\dfrac{2}{5}$ dans les deux cas ;
• le point reste en A_i avec probabilité $\dfrac{1}{5}$.

On peut résumer ceci grâce à un diagramme de transition :



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les évènements :
• U_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_1 » ;
• V_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_2 » ;
• W_n = « Après n déplacements le point se trouve en A_3 ».

On pose alors, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \mathbb{P}(U_n)$, $v_n = \mathbb{P}(V_n)$ et $w_n = \mathbb{P}(W_n)$.

Les conditions initiales sont $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et grâce à la formule des probabilités totales, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5} v_n + \frac{2}{5} w_n \\ \\ v_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{1}{5} v_n + \frac{2}{5} w_n \\ \\ w_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + \frac{2}{5} v_n + \frac{1}{5} w_n \end{cases}$$

On peut alors déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, grâce au calcul matriciel. En effet, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice donnée par $A = \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Le problème est donc ramené au calcul des puissances de la matrice A.

3.4 Formule de Bayes

On va essayer de relier les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_A(B)$, ce qui permettra en pratique d'inverser causes et conséquences.

Théorème 18 Formule de Bayes
On se donne un système complet d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$. Pour tout évènement B non négligeable, on a :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B) \times \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B) \times \mathbb{P}(A_k)}$$

En particulier avec un s.c.e. de la forme $\left(A, \overline{A}\right)$:

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)}$$

***Exemple* : Test d'une maladie rare.** Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie. La notice précise la qualité du test :
• lorsque le test est appliqué à une personne malade, le test est positif dans 99,8% des cas ;
• lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.ı
D'autre part, on sait qu'une personne sur 100 000 est malade.

Peut-on avoir confiance en ce test ? À priori oui, mais on est bien étonné de trouver que sachant que le test est positif, il n'y a que 0,25% de chances que la personne soit malade !

4 Indépendance

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

4.1 Indépendance de deux évènements

Définition 19 Indépendance de deux évènements
Soient A et B deux évènements.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
On le note $A \perp\!\!\!\perp B$.

Le résultat suivant donne un sens intuitif à cette définition.

Proposition 20 Lien entre indépendance et probabilité conditionnelle
Si A et B sont deux évènements avec B non négligeable : $A \perp\!\!\!\perp B$ si, et seulement si, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A)$.

En pratique, nous verrons que l'indépendance ne se démontre pas, mais fait des hypothèses de modélisation. Elle permet de simplifier les calculs.

***Exemple* :** Lorsqu'on lance plusieurs fois une pièce de monnaie, ou lorsqu'on effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne, on pourra supposer que les répétitions sont effectuées de manière indépendante.

⚠ ATTENTION : ce n'est pas si simple ! Si on lance deux fois une pièce, les évènements A = « obtenir pile au premier lancer » et B = « obtenir face au second lancer » sont indépendants, mais les évènements C = « obtenir pile » et B = « obtenir face » ne le sont pas.

⚠ ATTENTION : cette notion dépend du choix de la probabilité $\mathbb{P}$. En particulier si on a trois évènements A, B et C : on peut avoir A et B indépendants pour $\mathbb{P}$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$ sachant C (ie pour $\mathbb{P}_C$) :

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) \quad \text{mais} \quad \mathbb{P}_C(A\cap B) \neq \mathbb{P}_C(A)\times\mathbb{P}_C(B)$$

ou l'inverse : A et B indépendants pour $\mathbb{P}_C$, mais A et B non indépendants pour $\mathbb{P}$, comme le montre l'exemple suivant.

***Exemple* :** On dispose de deux pièces : un équilibrée et une truquée (deux piles). On lance un dé (non truqué) à 6 faces :
• si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
• si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée.
On note A = « obtenir pile au premier lancer de la pièce », B = « obtenir pile au second lancer de la pièce », et C = « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».
Alors $A \perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}_C$ (et pour $\mathbb{P}_{\overline{C}}$), mais $A \not\!\perp\!\!\!\perp B$ pour $\mathbb{P}$.

Proposition 21 Indépendance et contraire
Si $A \perp\!\!\!\perp B$, alors $A \perp\!\!\!\perp \overline{B}$, $\overline{A} \perp\!\!\!\perp B$ et $\overline{A} \perp\!\!\!\perp \overline{B}$.

4.2 Indépendance mutuelle

On se donne n évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Définition 22 Indépendance deux à deux
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux à deux indépendants lorsque :

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, \quad i\neq j \Longrightarrow A_i \perp\!\!\!\perp A_j$$

On a donc : $\mathbb{P}(A_1\cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\times\mathbb{P}(A_2)$. Mais par contre, on ne peut rien dire sur $\mathbb{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)$. Pour cela on a besoin d'une notion plus forte.

Définition 23 Indépendance mutuelle
On dit que A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants lorsque :

$$\forall J \subseteq [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)$$

Dans ce cas on peut dire que : $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$.

En pratique, l'hypothèse d'indépendance mutuelle fera partie des hypothèses de modélisation. Elle ne sera pas démontrée.

4.2.1 Propriétés de l'indépendance

On se donne une famille finie d'évènements $(A_1, \dots, A_n)$.

Théorème 24 Lien entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux
Si les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse. Nous verrons un contre-exemple en TD.

Théorème 25 Lemme des coalitions
On suppose que les évènements $(A_1, \dots, A_n)$ sont mutuellement indépendants.

1. Si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $B_k = A_k$ ou $\overline{A_k}$, alors les évènements $(B_1, \dots, B_n)$ sont encore mutuellement indépendants.
2. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, les $(A_k)_{k\in J}$ sont aussi mutuellement indépendants.
3. Pour toute partie $J \subseteq [\![1,n]\!]$, tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\in J}$ est indépendant de tout évènement construit à partir de $(A_k)_{k\notin J}$.

***Exemple* :** On lance 5 fois une pièce de monnaie, et on note A = « obtenir pile aux deux premiers lancers », B = « obtenir pile aux lancers numéros 3 à 5 » et C = « obtenir pile aux lancers numéros 2 à 5 ».
Alors A et B sont indépendants, mais A et C (et de même B et C) pourrait ne pas l'être.

4.3 Compléments sur la formule des probabilités totales : propriété de Markov

Elle n'est pas au programme mais la « propriété de Markov » doit être souvent utilisée, et la rédaction est assez acrobatique vu qu'on fleurte allègrement avec les limites du programme d'ECS...

Nous allons donc donner une liste d'exemples classiques qui devraient permettre de traiter la plupart de situations. Dans chaque, on est dans le cadre de répétitions mutuellement indépendantes d'une même expérience aléatoire, mais le nombre de répétitions est lui-même aléatoire (ce qui complique vraiment les choses).

• **Ruine du joueur.** Un joueur joue à un jeu d'argent : à chaque tour il gagne 1 euro avec probabilité p, ou perd 1 euro avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On voudrait calculer la probabilité qu'il termine ruiné (ou bout d'un nombre quelconque de tours), partant d'une fortune initiale de n euros ($n \in \mathbb{N}$). On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1$ puisqu'il commence ruiné.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = p.u_{n+1} + q.u_{n-1}$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement…

• **Le lion et les gazelles.** À chaque repas, un lion mange soit un zèbre avec probabilité $\frac{1}{3}$, soit une gazelle avec probabilité $\frac{2}{3}$. On suppose que les compositions des repas du lion sont indépendantes entre elles. On veut calculer la probabilité u_n que le lion mange pour la première fois deux gazelles consécutives à son $n^{\text{ième}}$ repas ($n \geq 2$).
La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+2} = \frac{1}{3}.u_{n+1} + \frac{2}{9}.u_n$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 qui s'étudie simplement…

• **Modèle de Galton-Watson.** On considère une cellule qui peut se diviser en 2 (par mitose) avec probabilité p, ou mourir avec probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$). On veut calculer la probabilité que sa lignée soit éteinte à la $(n+1)^{\text{ième}}$ génération. On note cette probabilité u_n ; notons que $u_0 = 1-p$.

La formule des probabilité totales (et la propriété de Markov qu'il ne faut pas citer puisque hors-programme) donnent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = p.u_n^2 + 1 - p$$

On est ramené à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur ces exemples l'espace probabilisé n'est pas fini (en toute rigueur), mais ils sont tout de même compréhensible dans ce chapitre puisque les évènements considérés sont inclus dans des univers finis.

5 Exercices

Calcul des probabilités :

Exercice 1 Soient A et B des événements aléatoires avec $\mathbb{P}(A) = 1/2$ et $\mathbb{P}(B) = 1/3$.

1. Donnez un encadrement de $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Déterminez $\mathbb{P}(A \cup B)$ lorsque A et B sont incompatibles puis lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$.

Exercice 2 Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathscr{P}(\Omega)$ la tribu de ses parties et la probabilité $\mathbb{P}$ définie (partiellement, x et y étant à déterminer) par $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(\{\omega_3\}) = x$ et $\mathbb{P}(\{\omega_4\}) = y$. Soit les événements $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ et $B = \{\omega_2, \omega_3\}$. Pour un événement quelconque C, on désigne son complémentaire par $\overline{C}$.
1. Combien d'événements pouvons nous considérer dans cet exemple ?
2. On donne $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{8}$. Déterminer complètement la probabilité $\mathbb{P}$.
3. Ici, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ?
4. On rappelle que la différence symétrique $A \Delta B$ peut être définie par $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Calculer $\mathbb{P}(A \Delta B | \overline{B})$, c'est-à-dire la probabilité conditionnelle de $A \Delta B$ sachant $\overline{B}$ réalisé.

Exercice 3 On considère une classe de n élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculez la probabilité que deux élèves au moins de cette classe aient leur anniversaire le même jour. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient supérieure à 0.5 ? A 0.8 ? Comment interpréter ce résultat ?
2. Calculez la probabilité qu'au moins un élève soit né le même jour que le professeur. Comparez le résultat obtenu avec le précédent.

Exercice 4 Un bibliothécaire fou permute au hasard les n livres de sa bibliothèque.

1. (a) Quelle est la probabilité que les volumes 1 et 2 de “Guerre et Paix” de Tolstoï se retrouvent côte à côte dans le bon ordre ?
   (b) Dans n'importe quel ordre ?
2. (a) Quelle est la probabilité qu'aucun livre n'ait changé de place ?
   (b) Qu'exactement un livre ait changé de place ?
   (c) Qu'exactement deux livres aient changé de place ?

Probabilités conditionnelles :

Exercice 5 On considère trois cartes : une avec les deux faces rouges, une avec les deux faces blanches, et une avec une face rouge et une face blanche. On tire une carte au hasard, on expose une face au hasard : elle est rouge.
Quelle est la probabilité que la face cachée soit blanche ? (Construisez d'abord un arbre adéquat).

Exercice 6 Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?
Ma voisine a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité pour que le plus âgé soit un garçon ?

Exercice 7 On cherche un parapluie qui avec la probabilité $p/7$ se trouve dans l'un quelconque des sept étages d'un immeuble ($0 \leq p \leq 1$).

1. Quelle est la probabilité que la parapluie se trouve dans l'immeuble ?
2. On a exploré en vain les six premiers étages. Quelle est la probabilité que le parapluie se trouve au septième étage ?

Exercice 8 Considérons une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

1. Quelle est la probabilité de la suite "blanc, blanc, rouge" si on tire 3 boules sans remise ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au total deux blanches et une rouge si on tire 3 boules sans remise ?

Exercice 9 On considère n urnes ($n \geq 1$), numérotées de 1 à n. L'urne numérotée k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires. On choisit au hasard une urne puis une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

Exercice 10 Sur Orion, les Rigolus et les Tristus cherchent à faire la paix. Heureusement, il y a trois fois plus de Rigolus que de Tristus. Pour la paix, les Rigolus sont à 60% favorables, 16% y sont opposés et 24% sont sans opinion. Par contre, pour la guerre, les Tristus sont à 68% favorables, 12% opposés et 20% sans opinion. Vous rencontrez par hasard un habitant d'Orion (on ne vous demande pas la probabilité de le rencontrer..) et vous lui demandez son opinion.
1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. S'il vous répond qu'il est favorable à la paix, quelle est la probabilité qu'il soit un Rigolus ?
3. Finalement, s'il vous répond qu'il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il soit un Tristus ?

Indépendance :

Exercice 11 On jette trois dés. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 12 On jette deux dès non-pipés, un noir et un blanc. Montrez que les évènements suivants sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants :
– «le chiffre du dè noir est pair»,
– «le chiffre du dè blanc est impair»,
– «les chiffres des deux dès ont même parité».

Exercice 13
1. On dispose d'une urne contenant 3 boules blanches numérotées de 1 à 3 et deux boules noires numérotées de 4 à 5.
   (a) On tire une à une successivement trois boules de l'urne, sans remise. Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, deux boules blanches, puis une noire ? Dans n'importe quel ordre ?
   (b) Mêmes question pour des tirages avec remise.
   (c) Calculer la probabilité d'obtenir, deux boules blanches et une noire lors d'un tirage simultané de trois boules.

1. Dans une urne, on place 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire successivement avec remise quatre boules de l'urne. On note N l'événement "obtenir une boule noire" et B l'événement "obtenir une boule blanche".
   (a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne le résultat (N, N, B, B) dans cet ordre ?
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches exactement ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche ?

Exercice 14 On dispose de 2 dès A et B. Le dé A a 4 faces rouges et 2 faces blanches. Le dé B a 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée telle que la probabilité d'obtenir "pile" soit $1/3$.
- Si on obtient "pile" on décide de jouer uniquement avec le dè A ;
- Si on obtient "face" on décide de jouer uniquement avec le dè B.

1. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au premier coup, puis au deux premiers coups. Ces deux évènements sont-ils indépendants ?
2. On a obtenu "rouge" aux deux premiers coups. Calculer la probabilité d'obtenir "rouge" au troisième coup.
3. On a obtenu "rouge" aux n premiers coups ($n \in \mathbb{N}^*$). Déterminer la probabilité p_n d'avoir utilisé le dè A.

Exercice 15 Un joueur joue à un jeu d'argent contre le casino. On suppose qu'initialement la fortune du joueur est de $a \in \mathbb{N}$ et celle du casino de $N - a$, avec $0 \leqslant a \leqslant N$ et $N \in \mathbb{N}$.
Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$.
A chaque répétition du jeu on suppose que le joueur gagne 1 euros avec probabilité p ou perd 1 euros avec probabilité $q = 1 - p$. Si on note x_n la fortune du joueur à l'issue du n^e jeu, alors :

$$x_0 = a \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 \text{ avec la probabilité } p \\ x_n - 1 \text{ avec la probabilité } q \end{cases}.$$

Le jeu s'arrête dès que x_n prend la valeur 0 (le joueur est ruiné) ou la valeur N (le casino est ruiné).

1. Soit u_a la probabilité que le joueur soit ruiné, étant initialement parti d'une fortune de a. On a en particulier $u_0 = 1$ et $u_N = 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier a tel que $1 \leq a \leq N - 1$, on a :
   $$u_a = p u_{a+1} + q u_{a-1}.$$
   (b) Vérifier que :
   $$u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$$
   Déterminer la limite de u_a lorsque $N \to +\infty$ et interpréter le résultat.
2. De même, calculer la probabilité v_a que le casino soit ruiné, le joueur étant initialement parti d'une fortune de a.
3. Calculer la somme $u_a + v_a$. En déduire la probabilité que le joueur et le casino s'affrontent indéfiniment.
4. Reprendre les calculs dans le cas $p = q = \dfrac{1}{2}$.