Chapitre 7

Généralités sur les fonctions numériques

1 Étude d'une fonction réelle d'une variable réelle

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1.1 Fonction réelle d'une variable réelle

Définition 1 Fonction réelle d'une variable réelle
On appelle fonction réelle d'une variable réelle toute application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, où A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Pour simplifier on dira que f est une fonction réelle.

⚠ ATTENTION : il faut veiller à ne pas confondre les notations f et $f(x)$. f désigne l'application et $f(x)$ désigne l'image de x. L'application f peut être aussi notée $x \longmapsto f(x)$.

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 Ensemble de définition
L'ensemble définition d'une fonction réelle f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$, noté $\mathscr{D}_f$, formé des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

Exemple **:** $f(x) = \sqrt{x}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \ln(x)$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Exemple **:** $f(x) = \mathrm{e}^x$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

Exemple **:** $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ donne $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

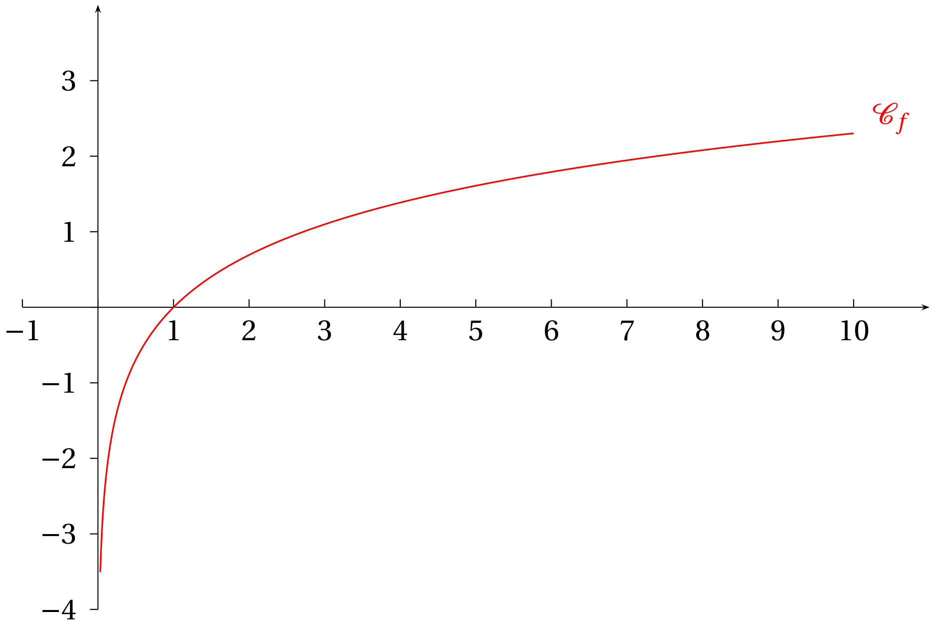
1.3 Représentation graphique de f

Définition 3 Graphe de f
Soit $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, noté G_f, défini par :

$$G_f = \{(x, f(x)) / \ x \in \mathscr{D}_f\}$$

Représenter f c'est représenter G_f dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On obtient une courbe du plan, appelée représentation graphique de f, notée $\mathscr{C}_f$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto \ln(x)$ donne $G_f = \{(x, \ln x) / \ x > 0\}$.



Définition 4 Périodicité
Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $T > 0$.
La fonction f est dite périodique de période T, ou encore T-périodique, lorsque :
(i) $\forall x \in \mathscr{D}_f, \ x + T \in \mathscr{D}_f$
(ii) $\forall x \in \mathscr{D}_f, \ f(x+T) = f(x)$.

On peut remarquer que si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée. On montre facilement que la condition (ii) entraîne que :

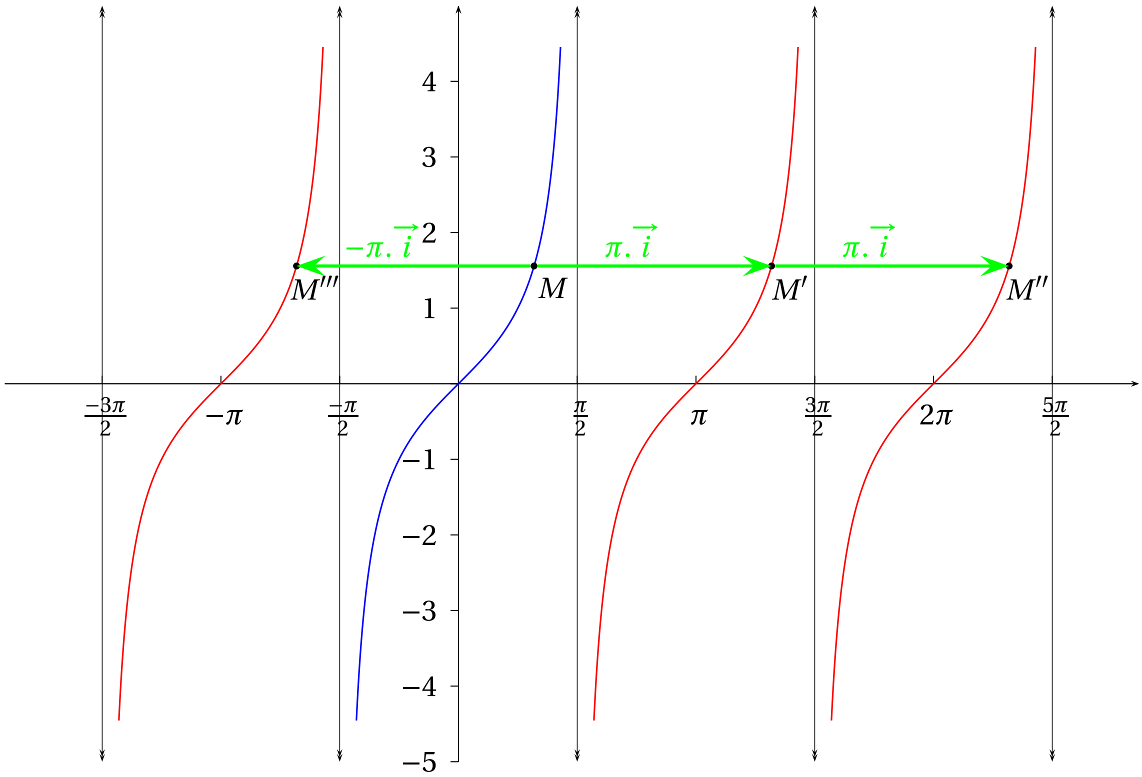
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x + kT) = f(x)$$

Exemple **:** La fonction tan est π-périodique.

Interprétation graphique Si f est T-périodique alors son graphe est invariant par toute translation de vecteur $kT.\overrightarrow{i}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Il suffit donc d'étudier f sur un intervalle de longueur T, ie du type $[a, a+T]$ avec $a \in \mathbb{R}$ (on choisit souvent $[0, T]$ ou $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$). Le reste du graphe de f se déduit ensuite par translations de vecteurs $kT.\overrightarrow{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

***Exemple* :** Pour la fonction tan.



Définition 5 Parité

Soient $f : \mathscr{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathscr{D}_f$.

1. La fonction f est dite paire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A,\ -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A,\ f(-x) = f(x)$.
2. La fonction f est dite impaire sur A lorsque :
   (i) $\forall x \in A,\ -x \in A$
   (ii) $\forall x \in A,\ f(-x) = -f(x)$.

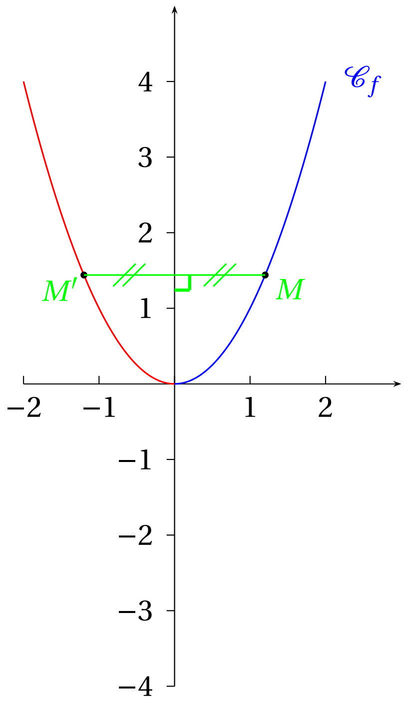
Évidemment si $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$, la condition (i) est automatiquement vérifiée.

***Exemple* :** La fonction $x \longmapsto x^2$ est paire sur $\mathbb{R}$, et $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

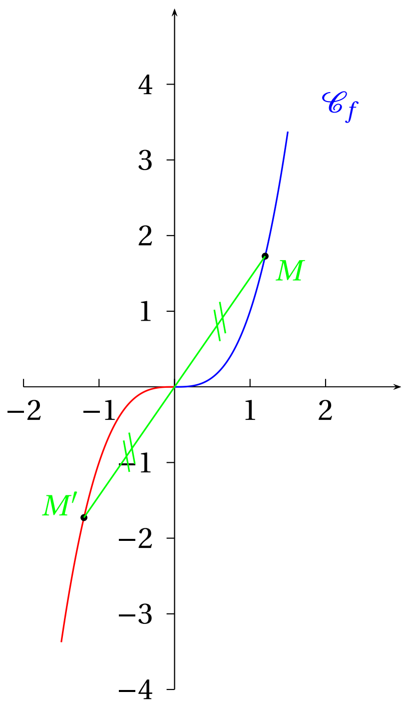
Interprétation graphique

1. Si f est paire alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(0y)$.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.
2. Si f est impaire alors son graphe est symétrique par rapport au point O.
   On peut donc restreindre l'étude à $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^+$ ou $\mathscr{D}_f \cap \mathbb{R}^-$.

***Exemple* :** Pour la fonction $x \longmapsto x^2$.



***Exemple* :** Pour la fonction $x \longmapsto x^3$.



1.4 Monotonie

Définition 6 Fonction monotone
Soit f fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1. f est croissante sur I lorsque :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y \Longrightarrow x \leq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
2. f est strictement croissante sur I lorsque :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$$
3. f est décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$
et
$$f(x) < f(y) \Longrightarrow x > y \Longrightarrow x \geq y$$
⚠ Par contre si on a seulement l'inégalité large $f(x) \leq f(y)$, alors on ne peut pas comparer x et y.
4. f est strictement décroissante sur I lorsque :
$$\forall (x, y) \in I^2, \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$
Dans ce cas :
$$x < y \Longleftrightarrow f(x) > f(y)$$
et
$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \geq f(y)$$
5. f est dite monotone sur I lorsqu'elle est croissante ou décroissante sur I.
6. f est dite strictement monotone sur I lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Exemple **:** $x \longmapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple **:** $x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$.

Exemple **:** $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

On rappelle deux théorèmes bien connus qui seront démontrés dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables.

Théorème 7 Monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. f est croissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$
2. f est décroissante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$
3. f est constante sur $I \iff \forall x \in I,\ f'(x) = 0$

Théorème 8 Stricte monotonie et signe de la dérivée
On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

1. $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement croissante sur I
2. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$ sauf éventuellement en des points « isolés » $\Longrightarrow f$ strictement décroissante sur I

⚠ ATTENTION : si f est strictement croissante sur un intervalle I, on ne peut pas dire que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$.

Exemple **:** $f : x \longmapsto x + \cos(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

1.5 Extremums d'une fonction

Définition 9 Fonction majorée/minorée/bornée
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f est majorée sur I lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \leq M$$
M est alors appelé majorant de f.
2. On dit que f est minorée sur I lorsque :
$$\exists m \in \mathbb{R} / \ \forall x \in I, \quad f(x) \geq m$$
m est alors appelé minorant de f.
3. On dit que f est bornée sur I lorsqu'elle est à la fois majorée et minorée sur I, ie lorsque :
$$\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2 / \ \forall x \in I, \quad m \leq f(x) \leq M$$

Proposition 10 Caractérisation des fonctions bornées
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ est bornée sur } I \Longleftrightarrow |f| \text{ est majorée sur } I$$

Définition 11 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum global en $x_0 \in I$, lorsque f est majorée par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

2. On dit que f admet un minimum global en $x_0 \in I$, lorsque f est minorée par $f(x_0)$:

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

3. On dit que f admet un extremum global en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum global ou un minimum global.

Définition 12 Extremum global
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

1. On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est majorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

2. On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in I$, lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que f est minorée par $f(x_0)$ sur $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$:

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

3. On dit que f admet un extremum local en $x_0 \in I$, lorsque f admet en x_0 un maximum local ou un minimum local.

Proposition 13 Un extremum global est local
Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ admet un extremum global en } x_0 \Longrightarrow f \text{ admet un extremum local en } x_0$$

Théorème 14 Condition nécessaire d'extremum local
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et telle que :
(i) f admet un extremum local en $x_0 \in I$
(ii) $x_0 \in \overset{\circ}{I}$, ie x_0 n'est pas une borne de I.
Alors $f'(x_0) = 0$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est donc horizontale.

⚠ ATTENTION : la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x^3$ en 0.

⚠ ATTENTION : l'hypothèse $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ est essentielle, comme le montre l'exemple de la fonction $x \longmapsto x$ sur $[0, 1]$.

Ce résultat donne donc des points x_0 candidats à être des extremums locaux (on les appelle **points critiques** de f : $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ et $f'(x_0) = 0$). Mais il faut ensuite vérifier point par point si on trouve bien un extremum local en ces points, puis faire une étude séparée des bornes de l'intervalle. Pour l'étude des points critiques, on peut utiliser le théorème suivant.

Théorème 15 Condition suffisante d'extremum local en un point critique
Soit f fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un point critique de f.
Si f' change de signe en x_0 alors f admet un extremum local en x_0.

En pratique il suffit de dresser le tableau de variations de f.

Exemple **:** Déterminer les extremums de la fonction $x \longmapsto -8x^3 + 2x^4 + 8x^2 - 1$.

2 Fonctions usuelles

2.1 Fonction racine n-ième

Pour $n \geq 1$, la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

On a les valeurs particulières : $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.

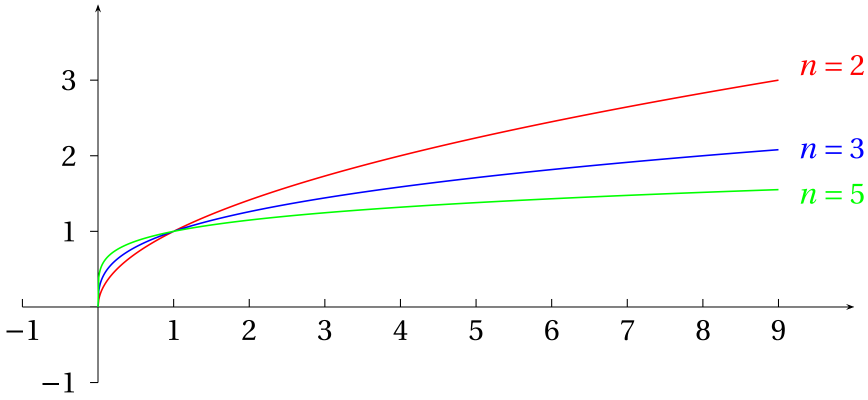
Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$ et dérivable seulement sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est continue mais non dérivable en 0. Sa dérivée est donnée par :

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

et en particulier pour $n = 2$:

$$\forall x > 0, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Représentation graphique :

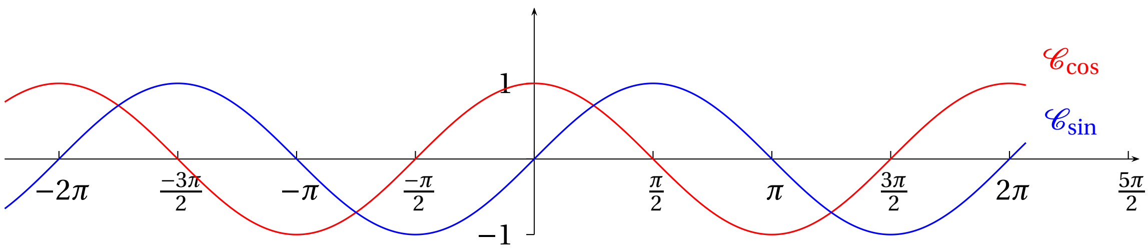


2.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions cos et sin sont dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Représentation graphique :

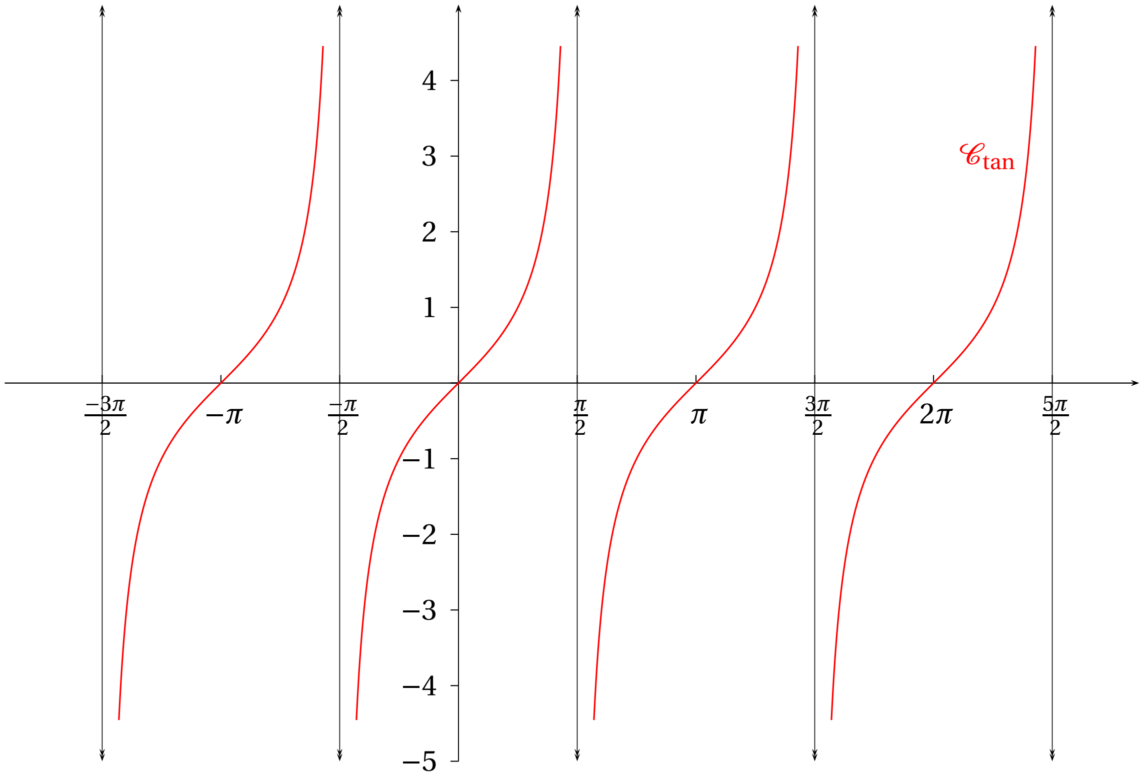


Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

La fonction tan est dérivable (donc continue) sur $\mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_{\tan}, \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :
$\lim_{x\to 0} \tan(x) = \tan(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

2.3 Fonctions logarithmes et exponentielles

La fonction exponentielle est définie comme étant l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée, et prenant la valeur 1 en 0. On la note exp ou $x \longmapsto e^x$.

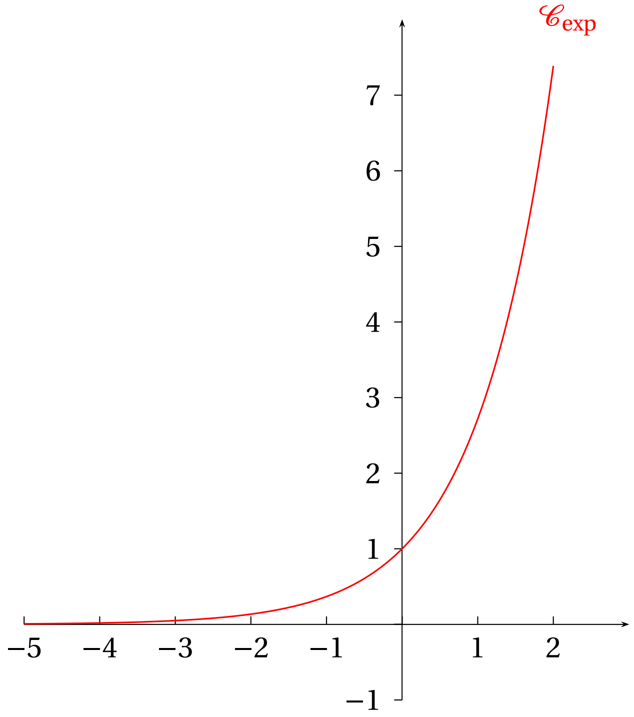
On a les propriétés suivantes.

Proposition 16 Propriétés de la fonction exponentielle

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ et donc $e^x \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $e^{a+b} = e^a \times e^b$, $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ et $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
4. Plus généralement : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exp\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{a_i}$
5. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^a\right)^n = e^{na}$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \left(e^x\right)' = e^x$

Ainsi on a $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, $e^{-1} = \frac{1}{e} \dots$

Représentation graphique :



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} x\mathrm{e}^x = 0.$

La fonction exp est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
exp	0 ↗	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection monotone, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. On note $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque. Cette fonction est appelée logarithme népérien. On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables qu'elle est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$.

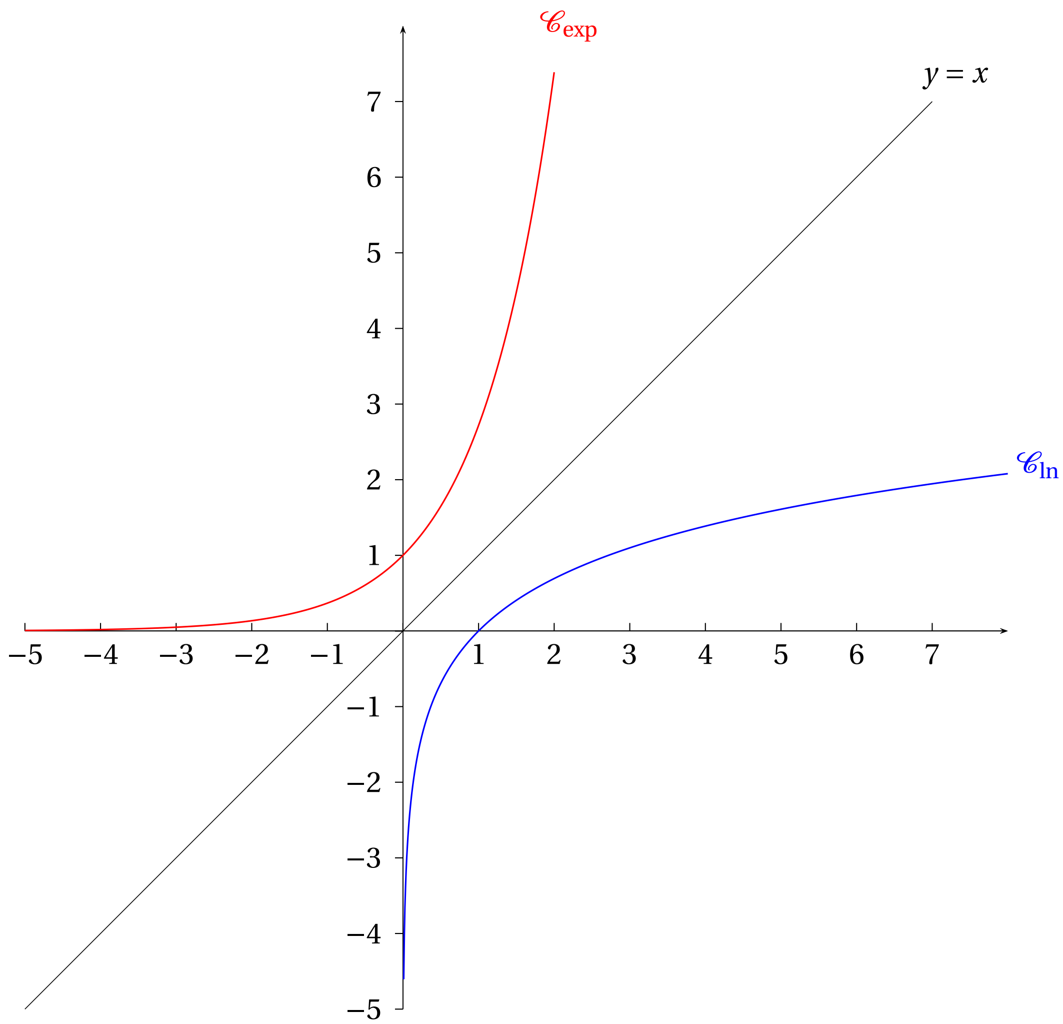
Par définition de la bijection réciproque, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(\mathrm{e}^x\right) = x$ et $\forall x > 0, \mathrm{e}^{\ln(x)} = x$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, \quad \mathrm{e}^x = y \Longleftrightarrow x = \ln y$$

Proposition 17 Propriétés de la fonction logarithme népérien

1. $\ln(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ et $\ln(x) = 1 \Longleftrightarrow x = \mathrm{e}$
2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
3. Plus généralement : $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, $\ln\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$
4. $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$
5. $\forall x > 0$, $\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$

On démontrera dans le chapitre sur les fonctions numériques dérivables que les courbes représentatives de exp et ln sont symétriques par rapport à $y = x$:



Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$.

2.4 Fonctions puissances réelles

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0 \quad x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

On peut vérifier que pour $x > 0$:
- si $n \geq 1$, $\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} = e^{n\ln(x)}$;
- si $n = 0$, $e^{n\ln(x)} = 1$;
- si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{-n \text{ termes}} = e^{n\ln(x)}$;
- si $n \geq 1$, $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.

Donc on généralise sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions puissances entières, et racines n-ièmes définies au lycée.

⚠ ATTENTION : la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est définie **au moins** sur $]0, +\infty[$. Par exemple la fonction $x \longmapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier !! De plus la formule $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$ n'est intéressante que si $\alpha \notin \mathbb{Z}$: par exemple écrire $x^2 = e^{2\ln(x)}$ n'est pas plus simple que $x^2 = x \times x$.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 18 Propriétés des fonctions puissances
On se donne $x > 0$, $y > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
1. $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$, $\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha}$ et $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$;
2. $\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta} = \left(x^\beta\right)^\alpha$;
3. $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = y^\alpha x^\alpha = (yx)^\alpha$.

On démontrera que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable (donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$), de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \left(x^\alpha\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

On en déduit qu'elle est strictement croissante si $\alpha > 0$, strictement décroissante si $\alpha < 0$ (et constante égale à 1 si $\alpha = 0$).

Il faut connaître par coeur les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ +\infty \text{ si } \alpha < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty \text{ si } \alpha > 0 \\ 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 0 \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$$

On a les tableaux de variations :

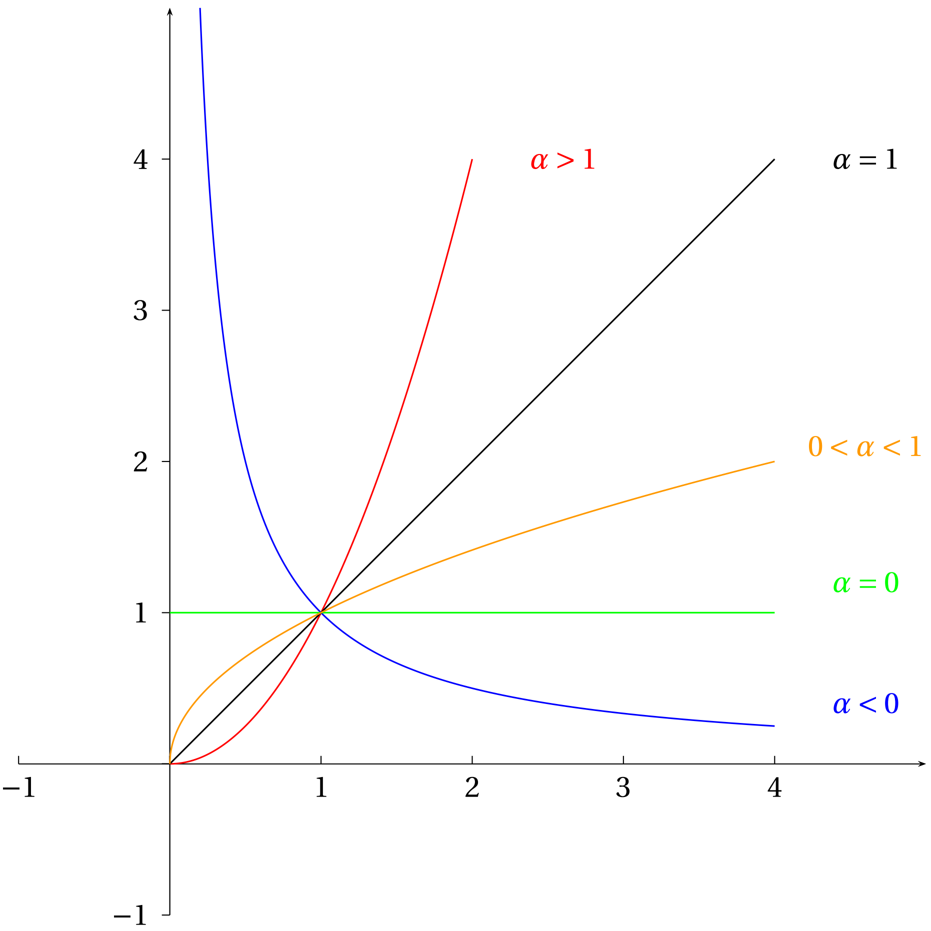
$\boxed{\text{Cas } \alpha > 0}$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$x \longmapsto x^{\alpha}$	$0 \nearrow +\infty$

$\boxed{\text{Cas } \alpha < 0}$

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$x \longmapsto x^{\alpha}$	$+\infty \searrow 0$

et les représentations graphiques (les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ seront étudiés dans le chapitre sur la dérivabilité) :



2.5 Fonctions logarithmes et exponentielles en base a

Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$, ie $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$. On définit les fonctions logarithmes et exponentielles en base a par :

$$\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad a^x = \mathrm{e}^{x\ln(a)}$$

Pour $a = \mathrm{e}$, on retrouve les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

On peut montrer qu'elles sont bijections réciproques l'une de l'autre :

$$\forall x > 0, \quad a^{\log_a(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \log_a\left(a^x\right) = x$$

***Exemple* :** $\log_2(256) = \log_2(2^8) = 8$

On utilisera principalement que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\log_{10}(10^n) = n$.

La fonction $\log_a$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$\forall x > 0, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}$$

La fonction $x \longmapsto a^x$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(a^x\right)' = \ln(a)a^x$$

2.6 Croissances comparées

Théorème 19 Croissances comparées
On se donne trois réels α, β et γ.

1. Pour $\alpha > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0^+$.
2. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-\gamma x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\gamma x}} = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^\alpha \mathrm{e}^{\gamma x} = 0^+$.
3. Pour $\gamma > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^\beta \mathrm{e}^{-\gamma x} = 0$.

De manière mnémotechnique, on peut retenir que : $\ln \ll$ puissance $\ll \exp$

3 Exercices

Exercice 1 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application croissante telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f\circ f(x)=x$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x$.

Exercice 2 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que :

1. Si f et g sont croissantes sur I alors $f+g$ est croissante sur I.
2. Si f est croissante sur I et g croissante sur J, tel que $f(I)\subset J$, alors $g\circ f$ croissante sur I.
3. Si f et g sont croissantes positives sur I alors $f\times g$ est croissante sur I.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T>0$. On suppose que f est monotone, montrer que f est constante.

Exercice 4 Soit $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ une fonction croissante. Montrer que f a au moins un point fixe. Est-ce vrai si f est décroissante ?
Indications : on pourra poser $\alpha=\sup\left\{x\in[0,1]/\ f(x)>x\right\}$.

Exercice 5 **[Fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques]**

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1. Montrer les formules suivantes, valables pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\cosh x+\sinh x=e^x;\quad \cosh x-\sinh x=e^{-x};\quad \cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$
2. Calculer, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, $\cosh(x+y)$, $\cosh(x-y)$, $\sinh(x+y)$ et $\sinh(x-y)$ en fonction de $\cosh x$, $\sinh(x)$, $\cosh y$ et $\sinh y$. En déduire des formules de transformation de sommes en produits de fonctions hyperboliques.

Exercice 6

1. Montrer que : $\forall x>-1,\quad \ln(1+x)\leq x$.
2. En déduire que pour tout $n\geqslant 2$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leq e\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 7 Soit $0<a\leq b$. On pose $f:x\in\mathbb{R}_*^+\longmapsto\frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$. Etudier la monotonie de f et en déduire que
$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)\leq(\ln 2)^2.$$

Exercice 8 Pour $x>0$ simplifier $\left(\exp\left(x^2\right)\right)^{\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)}{x}}$.

Exercice 9 Parmi les relations suivantes lesquelles sont exactes :
1) $\left(a^b\right)^c=a^{bc}$ 2) $a^ba^c=a^{bc}$ 3) $a^{2b}=\left(a^b\right)^2$
4) $(ab)^c=a^{\frac{c}{2}}b^{\frac{c}{2}}$ 5) $\left(a^b\right)^c=a^{\left(b^c\right)}$ 6) $\left(a^b\right)^c=(a^c)^b$?

Exercice 10 Résoudre les équations suivantes :
1) $e^x+e^{1-x}=e+1$ 2) $x^{\sqrt{x}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$ 3) $2^{2x}-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$.

Exercice 11 Résoudre les systèmes suivants :
a) $\begin{cases}8^x=10y\\2^x=5y\end{cases}$ *b)* $\begin{cases}e^xe^{2y}=1\\2xy=1\end{cases}$

Exercice 12 On veut déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (ii) & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y) \end{array}$$

1. Soit f une fonction solution qui n'est pas la fonction nulle.
   (a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
   (b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$, puis pour $x \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que $\forall x \geq 0,\ f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.
   (d) En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
2. Conclure.