Chapitre 9

Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 Polynôme
Une fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction polynôme (ou plus simplement un polynôme) à coefficients dans $\mathbb{K}$ lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Notations :

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$. Il est clair que $\mathbb{R}[X] \subseteq \mathbb{C}[X]$, conséquence immédiate du fait que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
• Si $k \in \mathbb{N}^*$, on note X^k la fonction polynôme $x \longmapsto x^k$.
• Le polynôme $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ se note donc plus simplement $P = P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, avec la convention $a_0 X^0 = a_0$.

Quelques polynômes particuliers :

• Le polynôme nul : $P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$, défini par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0_{\mathbb{K}}$.
• Les polynômes constants : $P(X) = a \in \mathbb{K}$, définie par $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(x) = a$.
• Un polynôme n'ayant qu'un seul (resp. deux, resp. trois) coefficient(s) non nul(s) est appelé monôme (resp. binôme, resp. trinôme).

***Exemple* :** $P(X) = \sqrt{2}$ est constant ; $Q(X) = 2X^2 + X^5$ est un binôme ; $R(X) = -X^3$ est un monôme.

Théorème 2 Unicité des coefficients
Les coefficients d'un polynôme sont uniques, ie que si on a $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

alors :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = b_k$$

Démonstration : On se ramène à : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On procède par récurrence sur n et, pour l'hérédité, on calcule $P(2x) - 2P(x)$, pour tout $x \in \mathbb{K}$.

CQFD $\square$

Corollaire 3 Unicité de l'écriture d'un polynôme non nul
Tout $P \in \mathbb{K}[X]$, tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, s'écrit de manière unique $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $\boxed{a_n \neq 0}$.

Définition 4 Degré d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est de degré n lorsqu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\boxed{a_n \neq 0_{\mathbb{K}}}$.
n est alors unique, on le note $\deg(P)$ ou $d^\circ P$.

On adopte parfois la convention $\deg(0_{\mathbb{K}[X]}) = -\infty$. Cela permet de simplifier certains résultats sur le degré.
Par exemple : P est un polynôme constant $\Longleftrightarrow$ $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $\left(P \neq 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ et } \deg(P) = 0 \right)$
devient : P est un polynôme constant $\Longleftrightarrow \deg(P) \leq 0$

Notations :

• L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{ P \in \mathbb{K}[X] \big/ \deg(P) \leq n \right\}$$

• Il est clair que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}[X]$, que $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_{n+1}[X]$ et plus généralement que, si $n \leq m$, $\mathbb{K}_n[X] \subseteq \mathbb{K}_m[X]$.
• De plus on peut remarquer que $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants.

Vocabulaire : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

• Terme dominant de P : c'est le monôme de plus haut degré, de la forme $a_n X^n$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.
• Coefficient dominant de P : c'est le coefficient du terme dominant, de la forme a_n avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0_{\mathbb{K}}$.

• Terme constant de P : c'est le coefficient de degré 0, noté a_0. Remarquer que c'est la valeur de P en 0 : $P(0) = a_0$.

Définition 5 Polynôme unitaire
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que P est unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1.

***Exemple* :** $P(X) = X^5 - 2X + 3$ est unitaire, de degré 5, de terme dominant X^5, de coefficient dominant 1 et de terme constant 3.

Définition 6 Égalité de deux polynômes
Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \iff \forall x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = Q(x)$$

Théorème 7 Égalité de deux polynômes
Soit $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$. Alors :

$$P(X) = Q(X) \iff P \text{ et } Q \text{ ont même degré et même coefficients}$$

1.2 Opérations sur les polynômes

Si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit les fonctions suivantes $P+Q$, $\lambda.P$, $P \times Q$ et $Q \circ P$ par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{K}, \quad (P+Q)(x) &= P(x) + Q(x) \\ (\lambda.P)(x) &= \lambda \times P(x) \\ (Q \circ P)(x) &= Q\big(P(x)\big) \\ (P \times Q)(x) &= P(x) \times Q(x) \end{aligned}$$

On a donc au total quatre opérations : addition, multiplication par un scalaire, composition et produit. Nous admettrons qu'elles donnent toutes un élément de $\mathbb{K}[X]$ et que les règles de calculs sont les mêmes que pour les fonction numériques.

En particulier, on a la propriété d'intégrité :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (P \times Q)(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \iff P(X) = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

et la formule du binôme :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(P(X) + Q(X)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times P(X)^k \times Q(X)^{n-k}$$

Un premier théorème donne une formule de calcul des coefficients d'un produit.

Théorème 8 Coefficients d'un produit de polynômes

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ alors :

$$(PQ)(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k \quad \text{avec} \quad c_k = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p \\ i+j=k}} a_i b_j$$

Un second théorème donne les règles de calcul du degré.

Théorème 9 Règles de calcul du degré

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $P(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$.
2. En général : $\deg(P+Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$
   et si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P+Q) = \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$.
3. $\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.
4. si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$: $\deg(Q \circ P) = \deg(Q) \times \deg(P)$.

Si $\deg(P) = \deg(Q)$, on peut avoir $\deg(P+Q) < \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$ lorsque les termes dominants s'annulent.

1.3 Parité

Définition 10 Polynôme pair/impair

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. On dit que P est pair lorsque $P(-X) = P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = P(x)$.
2. On dit que P est impair lorsque $P(-X) = -P(X)$, ie $\forall x \in \mathbb{K}$, $P(-x) = -P(x)$.

Théorème 11 Caractérisation de polynômes pairs/impairs

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. P est pair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice impair sont nuls.
2. P est impair si, et seulement si, tous ses coefficients d'indice pair sont nuls.

Exemple : $X^5 + X$ est impair et $X^8 + 4X^4 + 3X^2$ est pair. Par contre, $X^3 + X^2$ n'est ni pair, ni impair.

2 Racines d'un polynôme

2.1 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 12 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On dit que B divise A lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X)$. Dans ce cas on le note $B \mid A$; on dit que B est un diviseur de A, que A est divisible par B ou encore que A est un multiple de B.

Proposition 13 Propriétés de la relation de divisibilité
Soient $(A,B,C) \in \mathbb{K}[X]^3$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $C(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.

1. Transitivité. Si $C \mid B$ et $B \mid A$ alors $C \mid A$.
2. Réflexivité. On a $B \mid B$.
3. Antisymétrie. Si $B \mid C$ et $C \mid B$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $B = \lambda.C$.
4. Si $B \mid C$, alors $\deg(B) \leq \deg(C)$

Théorème 14 Division euclidienne des polynômes
Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $B(X) \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$.
Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ et $\deg(R) < \deg(B)$.
Q est appelé quotient et R est appelé reste de la division euclidienne de A par B.

***Exemple* :** Effectuer la division euclidienne de $2X^3 + X^2 - 2X - 1$ par $X^2 + X - 1$.

Proposition 15 Division par $X - a$
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ alors le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est $P(a)$.

Définition 16 Polynômes irréductibles
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit irréductible lorsqu'il est non constant et lorsque ses seuls diviseurs sont les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, ainsi que les polynômes constants non nuls.

Proposition 17 Caractérisation des polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$
Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible lorsqu'il est non constant et ses diviseurs sont de degré O ou de dégré égal à $\deg(P)$.

2.2 Racines d'un polynôme

Définition 18 Racine d'un polynôme
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est racine de P lorsque $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.

Le théorème suivant est primordial dans la suite.

Théorème 19 Racine et divisibilité
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff X - \alpha \mid P$$

Autrement dit : $P(\alpha) = 0_{\mathbb{K}} \iff \exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - \alpha) \times Q(X)$.

On peut noter que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Corollaire 20 Cas de racines deux à deux distinctes
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ deux à deux distincts. Alors :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sont racines de } P \iff \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \mid P$$

Corollaire 21 Relation entre degré et nombre de racines
Tout polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ non nul a un nombre de racines au plus égal à son degré.
Par contraposée, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq n$ et P a au moins $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

***Exemple* :** La fonction $x \in \mathbb{R} \longmapsto e^{ix}$ n'est pas polynomiale.

Définition 22 Racines multiples
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
L'ordre de multiplicité de α pour P est le plus grand entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X-\alpha)^r \mid P$, ie l'unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $(X - \alpha)^r \mid P$ et $(X - \alpha)^{r+1} \nmid P$.
On dit alors que α est racine d'ordre r de P.

Remarquez que α racine d'ordre 0 signifie en fait que α n'est pas racine de P.

Vocabulaire :

- Si $r = 1$, on dit que α est **racine simple** de P.
- Si $r = 2$, on dit que α est **racine douple** de P.
- Si $r \geq 3$, on dit que α est **racine multiple** de P.

Proposition 23 Autre définition de l'ordre de multiplicité
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: α est racine d'ordre $r \in \mathbb{N}$ de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-\alpha)^r \times Q(X)$ et $Q(\alpha) \neq 0$.

2.3 Théorème de d'Alembert-Gauss

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 24 Théorème de d'Alembert-Gauss
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.
Par conséquent : tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ non constant a au moins une racine complexe.

Corollaire 25 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Corollaire 26 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell} (X-\alpha_i)^{r_i}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ sont deux à deux distincts, et $(r_1, \dots, r_\ell) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^\ell$ sont tels que $\sum_{i=1}^{\ell} r_i = \deg(P)$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

Exemple **:** $X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)$ dans $\mathbb{C}[X]$.

On va maintenant étudier le cas d'un polynôme à coefficients réels.

Proposition 27 Condition suffisante d'existence d'une racine réelle
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Alors P a au moins une racine réelle.

Proposition 28 Racines complexes et polynômes de $\mathbb{R}[X]$
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } P$$

Le calcul suivant sera fondamental dans la suite. Si $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$(X-\alpha)\times(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\mathscr{R}e(\alpha)X + |\alpha|^2 \in \mathbb{R}[X]$$

Corollaire 29 Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
• les polynômes de la forme $\lambda(X-\alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
• les polynômes de la forme $\lambda(X^2+\beta X+\gamma)$ avec $(\lambda,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ et $\Delta = \beta^2 - 4\gamma < 0$.

Corollaire 30 Décomposition d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en facteurs irréductibles
Tout $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit :

$$P(X) = \lambda \times \prod_{i=1}^{\ell}(X-\alpha_i)^{r_i} \times \prod_{j=1}^{h}(X^2+\beta_j X+\gamma_j)^{\nu_j}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, $(\ell,h) \in \mathbb{N}$, $(\alpha_1,\dots,\alpha_\ell,\beta_1,\dots,\beta_h,\gamma_1,\dots,\gamma_h) \in \mathbb{R}^{\ell+2h}$ et $(r_1,\dots,r_\ell,\nu_1,\dots,\nu_h) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^{\ell+h}$, avec $\forall j \in [\![1,h]\!]$, $\Delta_j = \beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$.
De plus, cette écriture est unique à l'ordre des facteurs près dans le produit.

Exemple **:** $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Formule de Taylor

3.1 Dérivée d'un polynôme

Définition 31 Dérivée d'un polynôme
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme dérivé de P, noté P' par :
• Si P est constant alors on pose $P' = 0$.
• Si $\deg(P) \geq 1$ alors on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0$.
On pose alors $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k$.

Exemple **:** $P(X) = 4X^5 + 9X + \frac{3}{2}$ donne $P'(X) = 20X^4 + 9$.

Proposition 32 Degré du polynôme dérivé
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non constant, ie si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme constant, ie si $\deg(P) \leq 0$, alors $P' = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Théorème 33 Propriétés de la dérivation
Si $(P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, on a :

$$(P \times Q)'(X) = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X)$$

et :

$$(Q \circ P)'(X) = P'(X) \times Q' \circ P(X)$$

***Exemple* :** $\left(X^2 \times P(X)\right)' = 2X \times P(X) + X^2 \times P'(X)$ et $\left(P(2X)\right)' = 2 \times P'(2X)$.

Définition 34 Dérivée d'ordres supérieurs
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence le polynôme dérivé d'ordre k de P, note $P^{(k)}$, par :

$$\begin{cases} P^{(0)} = P \\ \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)' \end{cases}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le polynôme $P^{(k)}$ désigne le polynôme P dérivé k fois.

***Exemple* :** $P(X) = 4X^5 + 9X + \dfrac{3}{2}$, $P'(X) = 20X^4 + 9$, $P''(X) = 80X^3$, $P^{(3)}(X) = 240X^2$, $P^{(4)}(X) = 480X$, $P^{(5)}(X) = 480$ et pour $k \geq 6$, $P^{(k)}(X) = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Proposition 35 Propriétés de polynôme $P^{(k)}$
Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$.

1. Si $k > \deg(P)$, alors $P^{(k)} = 0$.
2. Si $k \leq \deg(P)$ et si $P(X) = \sum_{j=0}^{\deg(P)} a_j X^j$, alors :

$$\begin{aligned} P^{(k)}(X) &= \sum_{j=k}^{\deg(P)} j(j-1) \times \cdots \times (j-k+1) \times X^{j-k} = \sum_{j=k}^{\deg(P)} \frac{j!}{(j-k)!} a_j X^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\deg(P)-k} \frac{(j+k)!}{j!} a_{j+k} X^j \end{aligned}$$

On a donc $\deg\left(P^{(k)}\right) = \deg(P) - k$ et on remarque que $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$.

3.2 Formule de Leibnitz

Théorème 36 Formule de Leibnitz
Si $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$ et $n\in\mathbb{N}$, alors :

$$(P\times Q)^{(n)}(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times P^{(k)}(X)\times Q^{(n-k)}(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times Q^{(k)}(X)\times P^{(n-k)}(X)$$

Exemple : $(P\times Q)^{(3)}(X)=P(X)\times Q^{(3)}(X)+3\times P'(X)\times Q''(X)+3\times P''(X)\times Q'(X)+P^{(3)}(X)\times Q(X)$.

Exemple : Calculer la dérivée n-ième de $X^2Q(X)$.

Exemple : Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=(X+1)^n(X-1)^n$ et $L_n=P_n^{(n)}$ (Polynômes de Legendre). Vérifier que $P_n(X)=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

3.3 Formule de Taylor et application

Théorème 37 Formule de Taylor pour les polynômes
Si $n\in\mathbb{N}$, $P\in\mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$, alors :

$$P(X)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$$

On arrive au résultat principal de ce paragraphe, qui permet de déterminer simplement l'ordre de multiplicité d'une racine.

Lemme 38 Dérivé et ordre de multiplicité
Soient $\alpha\in\mathbb{K}$, $P\imath\mathbb{K}[X]$ et $r\in\mathbb{N}^*$. Alors :

$$\alpha \text{ est racine d'ordre } r \text{ de } P \Longrightarrow \alpha \text{ est racine d'ordre } r-1 \text{ de } P'$$

Théorème 39 Calcul de l'ordre de multiplicité
Soient $\alpha\in\mathbb{K}$, $P\imath\mathbb{K}[X]$ et $r\in\mathbb{N}^*$. Alors on a équivalence de :
(i) α est racine d'ordre r de P ;
(ii) $P(\alpha)=P'(\alpha)=P''(\alpha)=\cdots=P^{(k-1)}(\alpha)=0$ et $P^{(k)}(\alpha)\neq 0$.

Exemple : Factoriser le polynôme $P(X)=X^5-3X^4+2X^3+2X^2-3X+1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ (réponse : $P(X)=(X+1)(X-1)^4$).

Exemple : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $P_n=(X+1)^n(X-1)^n$. Alors $\forall k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_n^{(k)}(1)=P_n^{(k)}(-1)=0$ et de plus $P_n^{(n)}(1)\neq 0$ et $P_n^{(n)}(-1)\neq 0$.

4 Exercices

Exercice 1 Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $X^3 - X(X-2+i)$ 2. $(X-2)^n - (X+5)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ 3. $\prod_{k=0}^{n} (2X-k)$
4. $\prod_{k=0}^{n} (X-6)^k$ 5. $\prod_{k=0}^{n} (kX-2)^{k^2}$

Exercice 2 Montrer qu'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ bornée sur $\mathbb{R}$ est nécessairement le polynôme constant.

Exercice 3 Factoriser les polynômes suivants :

1. $X^4 - X^2 + 1$, $X^8 + X^4 + 1$ et $X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 + 3X^3 - 14X^2 + 22X - 12$ dans $\mathbb{R}[X]$ sachant que $i+1$ est racine dans $\mathbb{C}$

Exercice 4 On désire prouver le résultat suivant :
« Si a, b et c sont trois complexes de module 1 vérifiant $a+b+c=1$, alors un des ces trois complexes vaut 1 ».
Supposons que a, b et c soient trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=1$.

1. Justifier l'égalité : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.
2. On considère le polynôme P défini par : $P = (X-a)(X-b)(X-c)$.
   Justifier l'existence d'une constante complexe α non nulle telle que : $P = X^3 - X^2 + \alpha X - \alpha$.
3. Conclure.

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$.
2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $P_n - P_n' = X^n$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B lorsque :

1. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = X^2 + 1$ 2. $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ et $B = (X-i)^2$
3. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-2)^2$ 4. $A = X^n + 2X - 2$ et $B = (X-3)^2$

Exercice 7 (Calcul de puissances d'une matrice avec un polynôme annulateur)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une relation entre A^3, A^2 et A.
2. <u>Méthode 1</u> : Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = a_n A + b_n A^2$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. <u>Méthode 2</u> : Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^3 - 2X^2 + X$. En déduire l'expression de A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 (Formule de Vandermonde)
Soient N_1 et N_2 deux éléments de $\mathbb{N}^*$ et $n \in [\![0, N_1+N_2]\!]$.
En considérant le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{N_1} \times (1+X)^{N_2}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}$.
Proposer une autre démonstration de cette formule en dénombrant des tirages simultanés dans une urne.

Exercice 9 (Polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts, et $n+1$ réels $y_0, y_1, \dots, y_n$.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer l'unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall j \in [\![0, n]\!], \quad \begin{cases} L_k(x_j) = 0 & \text{si } j \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$
2. En déduire que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} y_k L_k$ est l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $P(x_j) = y_j$.

Exercice 10 Soit $n \geq 2$. On pose $P = (X+1)^n - 1$.

1. Déterminer toutes les racines de P dans $\mathbb{C}$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. On note Q le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ$. En calculant $Q(0)$ de deux manières différentes, déterminer la valeur de :
$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Exercice 11 (Polynômes de Tchebychev)
On considère la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} P_0 = 1 \text{ et } P_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n \end{cases}$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.
2. Déterminer le terme constant de P_n et étudier la parité de P_n.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_n(\cos x) = \cos(nx)$.
4. En déduire les racines de P_n.
5. Donner alors une expression factorisée de $P_n(X)$.
6. À l'aide des formule d'Euler et de De Moivre donner une autre expression de $P_n(X)$.

Exercice 12 Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $z_0, z_1, \dots, z_n$ les racines $(n+1)^{\text{èmes}}$ de l'unité : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$.
On définit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, avec $a_n \neq 0$, et on pose $M = \displaystyle\max_{k\in[\![0,n]\!]} \left|P(z_k)\right|$.

1. Vérifier que : $M > 0$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (z_k)^p$ en fonction de p.
3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(z_k)\right| \leqslant (n+1)M$.
   (b) En déduire que : $|a_0| \leqslant M$.
4. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|a_k| \leqslant M$.