1

ANALYSE

Exercice 1.01.

Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{1+x^2t^2}\,dt$.

1. Montrer que φ est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives et paire.

2. a) Prouver que pour tout $(x_0, x) \in \mathbb{R}^2$,

$$\big|\varphi(x) - \varphi(x_0)\big| \leqslant \ \big|x^2 - x_0^2\big| \int_1^{\mathrm{e}} t^2 \ln t\,dt$$

b) En déduire la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

3. a) Prouver que φ est dérivable en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

b) Démontrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

4. Étudier la monotonie de φ sur $\mathbb{R}^+$.

5. a) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\varphi(x)$.

Solution

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{1+x^2t^2}$ est continue et positive sur $[1, \mathrm{e}]$ pour tout x réel. Ainsi φ est-elle définie sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$ puisque $1 < \mathrm{e}$. Elle est de manière évidente paire.

2. a) Pour tout x_0 et tout x, on a :

$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)\Big(\frac{1}{x^2t^2+1}-\frac{1}{x_0^2t^2+1}\Big)dt$$
$$\varphi(x)-\varphi(x_0)=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln(t)(x_0^2-x^2)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}dt$$
Comme $t\in[1,\mathrm{e}]$ et $(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)\geqslant 1$, on déduit :
$$\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)\big|=\Big|\int_1^{\mathrm{e}}\frac{(x_0^2-x^2)\ln(t)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}\,dt\Big|\leqslant\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\Big|x_0^2-x^2\Big|\ln(t)t^2}{(x^2t^2+1)(x_0^2t^2+1)}\,dt$$
$$\leqslant\Big|x^2-x_0^2\Big|\int_1^{\mathrm{e}}\ln(t)t^2\,dt$$
D'où : $\forall\,(x_0,x)\in\mathbb{R}^2$: $\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)\big|\leqslant\big|x^2-x_0^2\big|\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}t^2.\ln t\,dt\quad(1)$

b) Par encadrement on déduit que pour tout x_0 : $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)-\varphi(x_0)=0$, ce qui prouve que φ est continue en tout x_0 de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$.

3. a) D'après l'inégalité (1), avec $x_0=0$, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$:
$$\big|\varphi(x)-\varphi(0)\big|\leqslant|x^2|\int_1^{\mathrm{e}}t^2.\ln t\,dt\implies\big|\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\big|\leqslant|x|\int_1^{\mathrm{e}}t^2\ln t dt$$
On en déduit par encadrement que $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=0$, ce qui prouve que φ est dérivable en 0, et que $\varphi'(0)=0$.

b) Pour tout réel x strictement positif, effectuons le changement de variable affine $u=tx$ dans l'intégrale définissant $\varphi(x)$, on a alors :
$$\varphi(x)=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2+1}\,dt=\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{\ln(u/x)}{(u^2+1)x}\,du$$
$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{\ln u}{u^2+1}\,du-\frac{\ln x}{x}\int_x^{\mathrm{e}x}\frac{1}{u^2+1}du\quad(2)$$
Sous cette forme φ est clairement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et étant dérivable en 0 et paire elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. $\forall\,x\in\mathbb{R}_+,\forall\,y\in\mathbb{R}_+,\forall\,t\in[1,\mathrm{e}]$:
$$x\leqslant y\implies x^2t^2+1\leqslant y^2t^2+1\implies\frac{\ln t}{y^2t^2+1}\leqslant\frac{\ln t}{x^2t^2+1}$$
$$\implies\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{y^2t^2+1}dt\leqslant\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2+1}dt.$$
D'où $\varphi(y)\leqslant\varphi(x)$. Ce qui montre que φ est une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

5. Pour tout $x>0$, on a :
$$\Big|\varphi(x)-\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\ln t}{x^2t^2}\,dt\Big|=\Big|\int_1^{\mathrm{e}}\Big(\frac{\ln t}{x^2t^2+1}-\frac{\ln t}{x^2t^2}\Big)\,dt\Big|$$

$$= \left| \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{(x^2t^2(x^2t^2+1)} dt \right| \leqslant \frac{1}{x^4} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^4}\, dt$$

D'où : $\left| x^2\varphi(x) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^4}\, dt$

On déduit par encadrement et limite que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\varphi(x) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt = 0 \quad (3)$

La relation (3) entraîne $\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x^2} \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2} dt.$

Une intégration par parties donne : $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln t}{t^2}\, dt = \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}}$ et on conclut :

$$\varphi(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}} \times \frac{1}{x^2}$$

Exercice 1.02.

Soit r un réel positif. On s'intéresse aux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence : $u_{n+2} = u_{n+1} + r^n\, u_n$.

1. Que dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand $r = 0$?

2. Dans cette question, on suppose $r = 1$.

 a) Expliciter u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

 b) On suppose $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

 c) Existe-t-il des valeurs de u_0 et u_1 telles que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ?

3. Dans cette question, on suppose $r \geqslant 1$ et $u_0 > 0$, $u_1 > 0$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Dans cette question, on suppose $0 < r < 1$ et $u_0 > 0$, $u_1 > 0$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_1 = u_1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \big(1 + r^{n-1}\big)\, v_n$.

 a) Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

 b) Comparer u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Dans cette question, on fait varier r dans l'intervalle $[0, 1[$ et on note $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0(r) = 1, u_1(r) = 1, \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2}(r) = u_{n+1}(r) + r^n\, u_n(r).$$

On note $L(r)$ la limite de la suite $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

 a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $r \mapsto u_n(r)$ est croissante sur $[0, 1[$.

 b) En déduire que la fonction L est croissante sur $[0, 1[$.

c) Pour $r \in [0,1[$, justifier la convergence de la série de terme général $r^k u_k(r)$, et exprimer sa somme en fonction de $L(r)$.

d) Déterminer la limite de $L(r)$ quand r tend vers 1.

Solution

1. Si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\geq 1}$ est constante.

2. a) L'équation caractéristique de cette relation de récurrence est $x^2 - x - 1 = 0$ dont les racines sont $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Donc u_n est de la forme :

$$u_n = \lambda\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + \mu\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \mu\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$, d'où :

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{(\sqrt{5}-1)\,u_0 + 2u_1}{2\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{(\sqrt{5}+1)\,u_0 - 2u_1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

b) Pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, il vient :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Car $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}| < 1$.

c) La suite (u_n) converge si et seulement si $\lambda = 0$, donc si et seulement si $(\sqrt{5}-1)\,u_0 + 2u_1 = 0$; et alors (u_n) converge vers 0.

3. Par récurrence $u_n > 0$ et $u_n \geq (n-1)u_1$ pour $n \geq 1$, donc u_n tend vers $+\infty$.

4. a) Par récurrence, $v_{n+2} = v_1 \prod\limits_{k=0}^{n}\big(1+r^k\big)$ pour $n \geqslant 2$.
Comme $0 < r < 1$, on a $r^k \to 0$, donc $\ln(1+r^k) \sim r^k > 0$, et la série $\sum\limits_{k\geq 0} \ln(1+r^k)$ converge de somme notée L. Alors :

$$v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v_1 \mathrm{e}^L = V$$

b) $u_n > 0$ est clair, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puis :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \leqslant (1+r^n)u_{n+1} \leqslant u_1 \prod_{k=0}^{n}(1+r^k) = v_{n+2} \leqslant V$$

car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée croissante, donc convergente.

5. a) Par récurrence on montre que la fonction u_n est positive croissante : c'est clair pour u_0 et u_1 et si on suppose le résultat acquis aux rangs n et $n+1$, on en déduit que u_{n+2} est positive croissante comme somme et produit de fonctions positives croissantes.

b) Ainsi la fonction L est croissante par passage à la limite.

c) On utilise une somme « télescopique » :
$u_{n+2}(r) - u_1(r) = \sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+2}(r) - u_{k+1}(r)) = \sum\limits_{k=0}^{n} r^k u_k(r)$, d'où :

$$L(r) - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} r^k\, u_k(r)$$

(la série écrite est bien convergente puisque $(u_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée.)

d) On a $\forall\, n, u_n(r) \geq 1$ par croissance de $\big(u_n(r)\big)_{n\in\mathbb{N}}$; donc

$$L(r) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(r) \geqslant 1 + \sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + \frac{1}{1-r} \underset{r\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 1.03.

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 1}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge et on note F le sous-ensemble de E formé des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ pour lesquelles on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ appartient à E. Appartient-elle à F ?

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n(n+1)}}$ appartient à E et à F.

3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$.

a) Rappeler les valeurs de $E(X)$ et $V(X)$.

b) Soit $v = (v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{2^{n/2}}$. Étudier l'appartenance de v à E et à F.

c) Construire, à partir de la suite v précédente, une suite w appartenant à F.

4. a) Montrer que, si u et v sont deux suites de E, alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ est absolument convergente.

b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. F est-il un sous-espace vectoriel de E ?

6. Montrer que F est convexe, c'est-à-dire que si $u, v \in F$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $\lambda u + (1-\lambda)v \in F$.

Solution

1. On a $n^2 u_n^2 = \dfrac{1}{n^2}$, ce qui prouve que (u_n) appartient à E. En revanche, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 + \cdots > 1$.

2. On a $n^2 u_n^2 = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et, pour tout entier naturel N supérieur ou égal à 1, on a aussi :
$$\sum_{n=1}^{N} n^2 u_n^2 = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$
Ceci prouve que la suite (u_n) appartient à E et à F.

3. a) D'après le cours, on a $E(X) = V(X) = 2$.

b) On a $n^2 v_n^2 = \dfrac{n^2}{2^n}$, ce qui permet de constater que la série de terme général $n^2 v_n^2$ converge (c'est le moment d'ordre 2 de la variable X) et sa somme vaut $E(X^2) = 6$. La suite v appartient à E et pas à F.

c) En posant $w = \dfrac{v}{\sqrt{6}}$, la suite w appartient à F.

4. a) Par identité remarquable, on a : $|u_n v_n| \leqslant \dfrac{u_n^2 + v_n^2}{2}$ et on en déduit aisément que la série de terme général $n^2 |u_n v_n|$ est convergente.

b) $\star$ E est une partie non vide de l'espace des suites réelles.
$\star$ Soit u et v deux suites de E et λ réel. On a :
$$n^2 (u_n + \lambda v_n)^2 = n^2 u_n^2 + \lambda^2 n^2 v_n^2 + 2\lambda n^2 u_n v_n$$
On termine avec la question précédente.
Conclusion : E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. En reprenant la suite w de la question 3. c) qui est dans F, la suite $2w$ n'appartient pas à F, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

6. Soit $\lambda \in [0,1]$ et u et v deux suites de F. Il faut montrer que $\lambda u + (1-\lambda)v \in F$.
Après avoir remarqué la convergence des séries en jeu, il vient :
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\lambda u + (1-\lambda)v)^2 = \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n^2 + (1-\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 v_n^2 + 2\lambda(1-\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 u_n v_n$$
et :
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (\lambda u + (1-\lambda)v)^2 \leqslant \lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda) = 1$$

D'où la conclusion.

Exercice 1.04.

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle. On définit la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ en posant :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et tend vers $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Vérifier que la suite $\left(\frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini.

b) Montrer que
$$\ell \leqslant s_n \leqslant \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1}{n+1} u_0 + \frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n+1} u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

c) Montrer que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

d) Réciproquement, on suppose que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ (on pourra raisonner par l'absurde).

2. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

a) Vérifier que $v_n = \sup\{|u_k|; k \geqslant n\}$ est bien défini.

b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est décroîssante de limite nulle.

c) En déduire que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3. On suppose maintenant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite des moyennes $(s_n)_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ. Donner un exemple simple prouvant que la réciproque est fausse.

4. On considère la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ définie par récurrence en posant :

$w_0 = 1$ et $w_{n+1} = w_n + \mathrm{e}^{-w_n}$.

a) Étudier la suite $(w_n)_{n\geq 0}$.

b) Prouver que : $\lim\limits_{n\to\infty} (\mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n}) = 1$.

c) En déduire un équivalent de w_n, lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. a) Comme $\sqrt{n} \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor < \sqrt{n} + 1$, il vient
$$\frac{n - \sqrt{n} - 1}{n+1} < \frac{n - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n+1} \leqslant \frac{n - \sqrt{n}}{n+1}$$
Les membres de gauche et de droite de cette inégalité tendant vers 1, on aboutit donc bien au résultat demandé.

b) En utilisant la décroissance vers ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient :

$$\ell \leqslant s_n = \frac{u_0+\ldots+u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n+1} + \frac{u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}+\ldots+u_n}{n+1}$$
$$\leqslant \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}{n+1}u_0 + \frac{n-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n+1}u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}.$$

c) En revenant à la définition, on vérifie facilement que la suite $(u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor})_{n\geq 0}$ converge aussi vers ℓ.
Il suffit alors de passer à la limite dans l'inégalité précédente en utilisant la question 1. a) pour voir que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ.

d) Réciproquement supposons que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas vers une limite finie, alors elle tend vers $-\infty$ (puisqu'elle est décroissante). Il en est de même de la suite $(u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor})_{n\geq 0}$. L'inégalité de droite qui a été établie en 1. b) reste valable et le membre de droite tend vers $-\infty$. On en déduit alors que la suite $(s_n)_{n\geq 0}$ tend nécessairement vers $-\infty$ et on aboutit à une contradiction.
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge donc vers une limite finie ℓ' et en appliquant 1. c) on trouve que $\ell' = \ell$.

2. a) Comme la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, elle est bornée et par suite l'ensemble $\{|u_k|; k \geqslant n\}$ est non vide et majoré. D'après le cours, il admet donc une borne supérieure et v_n est bien défini.

b) Comme $\{|u_k|; k \geqslant n+1\} \subseteq \{|u_k|; k \geqslant n\}$, on a bien $v_{n+1} \leqslant v_n$.
Si $I =]-a, a[$ est un intervalle ouvert contenant 0, il n'y a qu'un nombre fini de u_n qui ne sont pas contenus dans l'intervalle $]-a/2, a/2[$, car la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, et par suite il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ en dehors de I. Avec la définition donnée en cours, on constate donc que v_n converge vers 0.

c) Par construction, on a de manière évidente $|u_n| \leqslant v_n$. Il suffit alors d'utiliser les inégalités :

$$|s_n| \leqslant \frac{|u_0|+\cdots+|u_n|}{n+1} \leqslant \frac{v_0+\cdots+v_n}{n+1}$$

et les questions 2. b) et 1. c).

3. Il suffit d'appliquer 2. c) à la suite $(u_n-\ell)_{n\geq 0}$.

4. a) Comme $w_{n+1} - w_n = \mathrm{e}^{-w_n} > 0$, on voit que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
Si elle convergeait vers une limite finie ℓ, on aurait $\ell = \ell + \mathrm{e}^{\ell}$, ce qui est absurde, elle tend donc vers $+\infty$.

b) On a $\mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n} = \mathrm{e}^{w_n}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-w_n}} - \mathrm{e}^{w_n} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-w_n}}-1}{\mathrm{e}^{-w_n}}$.

D'où : $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n}) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$

c) On utilise la question 3. en posant $u_n = \mathrm{e}^{w_{n+1}} - \mathrm{e}^{w_n}$ et on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{w_n}}{n} = 1$$

Par suite, $\lim\limits_{n\to\infty}(w_n - \ln n) = 0$ et par conséquent $w_n \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$.

Exercice 1.05.

On considère une fonction f continue, décroissante et strictement positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_n = \int_1^n f(t)\,dt \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$, définie par $w_n = v_n - u_n$, est décroissante et à termes positifs.

2. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente. Justifier l'inégalité $u_n > 0$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{v_n}{u_n}\right)_{n\geq 2}$.

3. Dans cette question, on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

a) Que peut-on dire de la série de terme général $f(k)$?

b) Donner, à l'aide d'une intégrale, un équivalent du reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ lorsque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{\int_n^{+\infty} f(t)\,dt} = 0.$$

4. Applications :

a) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution

1. Comme f est décroissante, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k).$$

Soit $n \geqslant 2$, en sommant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$v_n - f(1) \leqslant u_n = \int_1^n f(t)\,dt \leqslant v_n - f(n) \leqslant v_n$$

On a donc $w_n \geqslant 0$.
On en déduit également que :

$$w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leqslant 0$$

La suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est donc bien décroissante.

2. Soit $n \geqslant 2$, la continuité et la stricte positivité de f assurent que $u_n > 0$. Avec les inégalités trouvées en 1, on voit que $1 \leqslant \dfrac{v_n}{u_n} \leqslant 1 + \dfrac{f(1)}{u_n}$. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est divergente, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ et par suite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 1$$

3. a) La série de terme général $f(k)$ est de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$, elle est donc convergente.

b) Le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ est bien défini puisque la série converge.

Comme f est positive et $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ pour $x \in [k, k+1]$, on en déduit que :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Or $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n)$, il s'ensuit que

$$\int_n^{+\infty} f(t)\,dt - f(n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k) = R_n \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

Il résulte alors de l'hypothèse que $R_n \underset{(\infty)}{\sim} \displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

4. Comme l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, en utilisant 2. on voit que dans ce cas

$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ converge, on sait d'après 3. b) que le reste R_n est équivalent à

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\frac{1}{n} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{n}$$

Exercice 1.06.

1. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_n$ converge vers un réel ℓ tel que $\ell < 1$.
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge.

On considère la suite (f_n) définie par : $f_0 = 1, f_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

2. Montrer que la suite (f_n) est à valeurs strictement positives.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

a) Expliciter une fonction rationnelle φ telle que pour tout n de $\mathbb{N}^*, u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

b) Déterminer le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. a) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et convergentes. Déterminer leurs limites respectives.

b) En déduire que (u_n) converge vers $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. Pour tout réel x, pour lequel la série de terme général $f_n x^n$ converge, on pose $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$. On pose $R = \dfrac{1}{\Phi}$.

a) Montrer que pour tout x de $]-R, R[$, la série définissant $A(x)$ est absolument convergente.

b) On pose, pour tout x de $]-R, R[$:

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2}, A_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} x^{n+2}, A_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} x^{n+2}.$$

Exprimer $A_0(x), A_1(x)$ et $A_2(x)$ en fonction de $A(x)$ pour tout x de $]-R, R[$.

c) En déduire $A(x)$ en fonction de x pour tout x de $]-R, R[$.

<u>Solution</u>

1. Soit $\delta > 0$ tel que $\ell + \delta < 1$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, il existe n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \ell + \delta = \alpha$.
Soit $n > n_0$. On écrit :

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n_1}}{a_{n-2}} \times \cdots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \times a_{n_0} \leqslant C\alpha^{n-n_0}$$

La série de terme général α^k est géométrique de raison $0 < \alpha < 1$ et donc convergente. On termine grâce au théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. La suite $(f_n)_n$ est manifestement positive pour $n \geqslant 1$ car croissante par récurrence.

3. a) On a $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$. La fonction φ est définie par $\varphi(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car de dérivée négative.

b) La fonction φ est décroissante et $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ est croissante. Ainsi, par récurrence immédiate $u_2 > u_4$ entraîne que la suite (u_{2n}) est décroissante et $u_3 < u_5$ entraîne que la suite (u_{2n+1}) est croissante.

4. a) On montre ensuite par récurrence et par croissance de φ^2, que pour tout n :

$$0 < u_{2n-1} < u_{2n+1} < u_{2n+2} < u_{2n}$$

b) Ainsi la suite (u_{2n}) est décroissante et minorée par u_1, alors que la suite (u_{2n+1}) est croissante et majorée par u_2. Ces deux suites convergent vers un point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$ de φ^2, soit $\varphi^2(x) = x$ ou $x^2 + x - 1 = 0$ qui n'a que $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme racine positive.
Les deux sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étant convergentes vers la même limite, par exhaustion la suite (u_n) converge également vers cette limite $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

5. a) Soit $x \neq 0$: $\Big|\dfrac{f_{n+1}x^{n+1}}{f_n x^n}\Big| = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}|x| = u_n|x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi|x|$.
Par le préliminaire, la série $\sum f_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$.

b) Pour tout $x \in]-R, R[$, les séries définissant A_0, A_1 et A_2 sont absolument convergentes. On a $A_0(x) = x^2 A(x)$, $A_1(x) = xA(x) - x$ et $A_2(x) = A(x) - 1 - x$.

c) Soit $|x| < R$. On a :
$A_2(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (f_n + f_{n+1})x^{n+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^{n+2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_{n+1}x^{n+2}$. Ainsi :

$$A(x) - 1 - x = A_0(x) + A_1(x) \text{ et } A(x) = -\frac{1}{x^2 + x - 1}$$

Exercice 1.07.

On note E l'ensemble des applications u continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ converge.

1. a) Montrer que pour a et b réels, on a $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.

b) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E \times E$ par :

$$(u,v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x)v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

est un produit scalaire sur E.
On notera $||.||$ la norme associée à ce produit scalaire.
On pose, pour tout réel a et tout réel x, $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

2. Montrer que $\varphi_a \in E$ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$.

3. Montrer que $\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}, \langle \varphi_a, \varphi_b\rangle = \mathrm{e}^{\frac{(a+b)^2}{4}}$.

4. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel α, la nature de la série de terme général $v_n = ||\varphi_{\sqrt{\ln(n)}}||^{\alpha}$, pour $n \geqslant 1$.

5. Déterminer, selon les valeurs du paramètre réel β, la nature de la série de terme général $w_n = ||\varphi_{\sqrt{n}}||^{\beta}$, pour $n \geqslant 1$ et calculer sa somme S_β lorsqu'elle existe.

6. Dans le cas de la convergence de la série de la question précédente, on considère une variable aléatoire X_β à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(X_\beta = n) = \frac{w_n}{S_\beta}$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une loi de probabilité.

b) Calculer l'espérance E_β et la variance V_β de X_β.

c) Déterminer les limites respectives de E_β et V_β lorsque β tend vers $-\infty$.

Solution

1. L'application φ_a est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \big(\varphi_a(x)\big)^2\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^{2ax-x^2} = \mathrm{e}^{a^2}\mathrm{e}^{-(x-a)^2}$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-a)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \sqrt{\pi}$$

Donc φ_a est bien un élément de E, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{a^2}$.

2. On écrit $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi_a(x)\varphi_b(x) = \mathrm{e}^{(a+b)(x)} = \left(\mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}x}\right)^2$, d'où :

$\langle\varphi_a,\varphi_b\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{a+b}(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\big(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\big)^2\mathrm{e}^{-x^2}dx = \mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2}$
d'après le résultat de la question précédente.

3. $v_n = \langle\varphi_{\sqrt{\ln n}},\varphi_{\sqrt{\ln n}}\rangle^{\frac{\alpha}{2}} = \big(\mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2}\big)^{\frac{\alpha}{2}}$, pour $a = b = \sqrt{\ln n}$, d'où :

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\ln n}$$

Soit finalement $v_n = n^{\frac{\alpha}{2}}$. La série de terme général v_n est une série de Riemann et converge si et seulement si $\frac{\alpha}{2} < -1$ soit $\alpha < -2$.

4. De même, $w_n = \langle\varphi_{\sqrt{n}},\varphi_{\sqrt{n}}\rangle^{\frac{\beta}{2}} = (\mathrm{e}^{(\frac{a+b}{2})^2})^{\frac{\beta}{2}}$.

pour $a = b = \sqrt{n}$, d'où $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{n}$. Soit finalement $w_n = \big(\mathrm{e}^n\big)^{\frac{\beta}{2}} = \big(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}\big)^n$.

(w_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}$ positive, donc la série de terme général w_n converge si et seulement si $\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}} < 1$, *i.e.* $\beta < 0$.

Sa somme est alors $S_\beta = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}$.

5. Dans cette question, on suppose que la série de terme général w_n converge, donc on suppose $\beta < 0$.

a) Pour $n \geqslant 1$, $P(X = n) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n\beta}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}}(1-\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}) = \big(\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}}\big)^{n-1}(1-\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}})$.

b) On reconnaît une loi géométrique de paramètre $p = \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}} \in \,]0,1[$ et donc :

$$E_\beta = \frac{1}{p} = \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}}, V_\beta = \frac{1-p}{p^2} = (1-\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}})\mathrm{e}^{-\beta}$$

c) L'espérance E_β et la variance V_β tendent tous les deux vers $+\infty$ lorsque β tend vers $-\infty$.

Exercice 1.08.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions f appartenant à l'ensemble $\mathcal{A}$ suivant :
$\mathcal{A}$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :

- $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)+f(x-y) = 2f(x).f(y)$ (1)
- f n'est pas la fonction nulle.
- f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que $\mathcal{A}$ n'est pas vide et que toute fonction f de $\mathcal{A}$ vérifie $f(0) = 1$ et est paire.

2. On note $B = \{x \geqslant 0, f(x) = 0\}$.

a) Montrer que B admet une borne inférieure notée a vérifiant $f(a) = 0$ et $a > 0$.

b) En déduire que : $\forall\, x \in [0, a[, f(x) > 0$.

3. Dans cette question, on pose pour $r \in \mathbb{R}^+$, $\lambda(r) = \displaystyle\int_0^r f(u)\, du$.

a) Montrer successivement que :

i) il existe un réel $r > 0$ tel que $\lambda(r) > 0$

ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}\Big[\displaystyle\int_x^{x+r} f(u)\, du + \int_{x-r}^{x} f(v)\, dv\Big]$.

b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver l'existence d'une constante réelle c telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = cf(x)$.

Solution

1. $\star$ L'ensemble $\mathcal{A}$ n'est pas vide puisque la fonction cos appartient à $\mathcal{A}$.

$\star$ Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) \in \{0, 1\}$. L'hypothèse $f(0) = 0$ entraîne pour $y = 0$ dans (1) : $\forall\, x \in \mathbb{R}, 2f(x) = 2f(x).f(0) = 0$ soit f identiquement nulle, ce qui est exclu. Donc nécessairement $f(0) = 1$.

$\star$ Pour $x = 0$ on obtient : $\forall\, y \in \mathbb{R}, f(y) + f(-y) = 2f(y)$ donc f est paire.

2. a) La fonction f s'annule sur $\mathbb{R}^*$ et f est paire donc B est non vide. Ainsi B est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure $a \geqslant 0$. Comme $f(0) = 1$ on n'a pas $a = 0$ et $a > 0$.

Par définition de la borne inférieure : $\forall\, n > 0, \exists\, u_n \in B, a < u_n < a + \dfrac{1}{n}$.
On a $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et f étant continue : $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = 0$.

b) Par l'absurde : s'il existe b dans $]0; a[$ avec $f(b) \leqslant 0$, alors le théorème des valeurs intermédiaires (f est continue) nous dit qu'il existe c dans $]0, a[$ avec $f(c) = 0$. Alors c serait un élément de B tel que $c < a$, en contradiction avec la définition de la borne inférieure.

3. a) Comme f est continue, et que $f(0) = 1$, il existe $r > 0$ tel que, pour $x \in [0, r], f(x) > \frac{1}{2}$. Alors :

$$\int_0^r f(u)du > \frac{r}{2} > 0 \implies \lambda(r) > 0$$

Les fonctions étant continues sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer (1) entre 0 et r, par rapport à la variable y :

$$2f(x)\int_0^r f(y)\,dy = \int_0^r f(x+y)\,dy + \int_0^r f(x-y)\,dy$$

avec les changements de variable : $u = x + y$ et $v = x - y$, on obtient :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2\lambda(r)}\Big[\int_x^{x+r} f(u)\,du + \int_{x-r}^{x} f(v)\,dv\Big] \qquad (2)$$

b) Les fonctions $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+r} f(u)\,du$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{x-r}^{x} f(v)\,dv$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour f.

Si on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^n$, la formule (2) montre alors que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, donc par récurrence : f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c) On dérive (2) : $f'(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x+r) - f(x-r))$.

On dérive à nouveau : $f''(x) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f'(x+r) + f'(x-r))$, et on remplace :

$$\begin{cases} f'(x+r) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x+2r) - f(x)) \\ f'(x-r) = \dfrac{1}{2\lambda(r)}(f(x) - f(x-2r)) \end{cases}$$

Donc :

$f''(x) = \dfrac{1}{4\lambda^2(r)}[f(x+2r) + f(x-2r) - 2f(x)] = \dfrac{1}{4\lambda^2(r)}[2f(x)f(2r) - 2f(x)]$

ce qui entraîne :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2f(2r) - 2}{\lambda^2(r)}\, f(x) = c.f(x)$$

Exercice 1.09.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$. On note alors :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

2. a) Montrer que pour tout $x \leqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}\,du$ est convergente.

On note alors $K(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}du$.

b) Montrer que pour $|x| < 1$ et $u \geqslant 0$, on a : $\dfrac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}$.

c) En déduire que pour tout $x \in\ ]-1, 1[$, on a $xK(x) = f(x)$.

3. a) Montrer que la fonction K est continue en 0.

b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Solution

1. Pour $|x| \leqslant 1$, on a $\dfrac{|x^n|}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, ce qui donne la convergence de la série proposée.

2. a) Pour $x \leqslant 1$, $\varphi : u \to \dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

• pour $x < 1$, $\lim\limits_0 \varphi = 0$.

• pour $x = 1$, $\lim\limits_0 \varphi = 1$. Ainsi φ admet un prolongement par continuité en 0.

• au voisinage de $+\infty$, $\varphi(u) \sim u\mathrm{e}^{-u}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\varphi(u) = 0$, ce qui montre l'existence de l'intégrale proposée.

b) On écrit, pour $u > 0$: $\dfrac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}$.

car $|x\mathrm{e}^{-u}| < 1$ pour tout $u > 0$.

c) En écrivant plutôt une somme partielle :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \frac{\mathrm{e}^{-u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}} = \sum_{k=0}^{N-1} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u} + \frac{x^N \mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - x\mathrm{e}^{-u}}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
K(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - x}\, du \\
&= \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{N-1} x^k u\mathrm{e}^{-(k+1)u}\Big) du + \int_0^{+\infty} \frac{x^N u\mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - xe^{-u}} du \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} x^k \int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-(k+1)u} du + \int_0^{+\infty} R_N(u) du \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x^k}{(k+1)^2} + \int_0^{+\infty} R_N(u) du, \text{ avec } R_N(u) = \frac{x^N u\mathrm{e}^{-(N+1)u}}{1 - xe^{-u}}
\end{aligned}$$

Or : $|R_N(u)| = |x|^N \mathrm{e}^{-Nu} \Big|\dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}\Big| \leqslant \mathrm{e}^{-Nu} \Big|\dfrac{u}{\mathrm{e}^u - x}\Big|$

et comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, de limite nulle en $+\infty$ elle est bornée et il existe C tel que :

$$\Big|\int_0^{+\infty} R_N(u) du\Big| \leqslant \int_0^{+\infty} |R_N(u)| du \leqslant C \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nu} du = \frac{C}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

En passant à la limite lorsque N tend vers l'infini, il vient :

$$xK(x) = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2} = f(x)$$

3. a) Pour $x \neq 0$, $K(x) = \dfrac{f(x)}{x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{(n+1)^2}$.

Si $|x| \leqslant 1$, alors $|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}| \leqslant |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Ce qui montre que $\lim_{x\to 0} K(x) = 1$. Comme un calcul banal donne $K(0) = 1$, la fonction K est bien continue en 0.

b) Ainsi : $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$ et f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

Exercice 1.10.

Soit a un réel strictement supérieur à 1.

1. Pour tout réel $x \geqslant 0$, établir la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

On note $f_a(x)$ sa valeur, et on pose $\varphi(a) = f_a(0)$ et $g_a(x) = \displaystyle\int_0^x t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

2. a) Démontrer que $\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$.

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a+2n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

3. Pour tout nombre entier naturel n et pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$.

En déduire le signe de $t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$ selon les valeurs de n.

En déduire que, pour tout réel $t > 0$ et tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leqslant t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant S_{2q}(t).$$

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left|t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)\right| \leqslant \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}.$$

c) En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$\left|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}\right| \leqslant \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n!(2n+a+1)}.$$

Justifier l'écriture : $g_a(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}$.

Solution

1. La fonction à intégrer est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus pour tout $a > 0$, $\lim_{t \to +\infty} t^{a+2} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = 0$, ce qui assure la convergence des intégrales considérées.

2. a) On a $\varphi(a+2) = \left[-t^{a+1} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^{\to +\infty} + (a+1) \int_0^{+\infty} t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$. D'où :

$$\varphi(a+2) = (a+1)\varphi(a)$$

b) On en déduit que $\varphi(a+2n) = \left[\prod_{i=1}^{n} (a+2i-1) \right] \varphi(a)$.

De plus $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et $\varphi(1) = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^{\to +\infty} = 1$.
D'où :

$$\varphi(2n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^{n} (2i-1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

$$\varphi(2n+1) = \prod_{i=1}^{n} (2i) = 2^n n!$$

3. a) Pour tout nombre entier n et pour tout réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k+a}}{2^k k!}$$

On a, par Taylor :

$$\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^{2k}}{2^k k!} + \int_0^{\frac{t^2}{2}} \frac{(\frac{t^2}{2} - u)^n}{n!} (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{-u} \, du$$

Le signe de $t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t)$ est positif si n est impair et négatif si n est pair, d'où l'on déduit que, pour tout réel $t > 0$ et tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \leq S_{2q}(t)$$

b) On a, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left| t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t) \right| = t^a \left| \int_0^{\frac{t^2}{2}} \frac{(t^2/2 - u)^n}{n!} (-1)^{n+1} \mathrm{e}^{-u} du \right|$$

Donc :

$$\left| t^a \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} - S_n(t) \right| \leqslant \frac{t^{2n+a}}{2^n n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} du = \frac{t^{2n+a}}{2^n n!}$$

c) En intégrant entre 0 et x, on obtient que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$\left| g_a(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k! (2k+a+1)} \right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n n! (2n+a+1)}$$

Le terme de droite a pour limite 0 quand n tend vers l'infini et ce pour toute valeur de $x > 0$, on en déduit que :

$$g_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k k!(2k+a+1)}$$

Exercice 1.11.

Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

1. a) Étudier les variations de la fonction φ.

b) En déduire que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser.

Pour tout entier naturel n et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $u_n(t) = \varphi(t+n) - \varphi(n)$.
Pour tout réel t, on note $s_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(t)$.

2. a) Montrer que $u_n(t) \underset{(n\to\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-t-2n}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$, en déduire que la suite $(s_n(t))_n$ converge. On note sa limite $s(t)$.

b) Montrer que la fonction s ainsi définie est croissante.

3. a) Montrer que la série de terme général $(1 - \varphi(n))$ converge.

b) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(1 - \varphi(n))$.

c) Montrer que pour tout réel t, on a $s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$.

Solution

1. a) La fonction φ est bien définie et impaire. De plus, pour tout réel x, la fonction φ est dérivable en x et après calculs :

$$\varphi'(x) = \frac{4}{(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2} \geqslant 0$$

b) D'après la question précédente, la fonction φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(-x) = 1$.
Ainsi, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

2. a) Soit $(n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

$$u_n(t) = \varphi(t+n) - \varphi(n) = \frac{\mathrm{e}^{t+n} - \mathrm{e}^{-t-n}}{\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n}} - \frac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$$

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{(\mathrm{e}^{t+n} - \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}) - (\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n})}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{t+2n} + \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t-2n} - \mathrm{e}^{t+2n} - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t-2n}}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})} \\ &= \frac{2(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})}{(\mathrm{e}^{t+n} + \mathrm{e}^{-t-n})(\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n})} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{2(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})}{\mathrm{e}^{t+n}\mathrm{e}^n} \end{aligned}$$

$$u_n(t) \underset{(n\to\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-t-2n}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t})$$

Ainsi, la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant à partir d'un certain rang et, d'après les théorèmes de comparaison des séries, la série de terme général $u_n(t)$ converge, donc $(s_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) D'après la question 1, pour tout entier naturel n, la fonction u_n est croissante. Ainsi, la fonction s_n est croissante et, par passage à la limite dans les inégalités, la fonction s est croissante.

3. a) Pour $n \in \mathbb{N}$: $1 - \varphi(n) = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^n - \mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} = \dfrac{2\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}} \underset{(\infty)}{\sim} 2\mathrm{e}^{-2n}$.
Ainsi, $\sum(1-\varphi(n))$ converge.

b) La fonction s étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.
D'une part, comme u_n est croissante, pour tout réel t,

$$u_n(t) \leqslant 1 - \varphi(n) \implies s(t) \leqslant \sum(1-\varphi(n)) \implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \leqslant \sum(1-\varphi(n))$$

D'autre part, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $n \in [\![0, n]\!]$, le réel $u_n(t)$ étant positif pour tout réel positif t,

$$\begin{aligned} s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_n(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} (\varphi(t+n) - \varphi(n)) &\implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{N} (1-\varphi(n)) \\ &\implies \lim_{t\to+\infty} s(t) \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(n)) \end{aligned}$$

Finalement, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(n))$.

4. Soit $(n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} s_n(t+1) &= \sum_{k=0}^{n} (\varphi(t+k+1) - \varphi(k)) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi(t+k) - \sum_{k=0}^{n} \varphi(k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\varphi(t+k) - \varphi(k)) + \varphi(t+n+1) - \varphi(t) \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini :

$$s(t+1) = s(t) + 1 - \varphi(t)$$

Exercice 1.12.

Soit k un réel fixé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(kx)$$

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer a_n et b_n en fonction de n.

c) Calculer $f^{(n)}(0)$.

2. Soit (u_n) une suite de réels tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, et $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

a) si $\ell < 1$, la série de terme général u_n converge absolument.

b) si $\ell > 1$, la série de terme général u_n diverge.

3. Soit g_k la fonction définie par : $g_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} k^{a_n} \times \frac{x^n}{n!}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g_1.

b) Déterminer, selon les valeurs de k, le domaine de définition de g_k.

4. On suppose désormais que $|k| \leqslant 1$. Soit $a > 0$ un réel fixé.

a) Montrer qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leqslant M$$

b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in [-a, a]$, on pose $R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} k^{a_n} \times \frac{x^n}{n!}$.

Déterminer $\lim_{N\to\infty} |R_N(x)|$.

c) Montrer que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_k'(x) = g_k(kx)$$

Solution

1. a) On démontre la propriété par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on pose $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$. Reste à établir l'hérédité. On suppose que f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = k^{a_n} f(k^{b_n} x)$.
Par dérivation d'une fonction composée, il s'ensuit que $f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x) = k^{a_n+b_n} f(k^{b_n+1} x).$$

On pose donc $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = b_n + 1$.

b) La suite (b_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_1 = 1$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = n$.
En étudiant la suite télescopique (u_n) définie par $u_n = a_{n+1} - a_n = n$, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{n(n-1)}{2}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{(n)}(0) = k^{a_n} f(0) = k^{a_n} = k^{n(n-1)/2}$, formule qui reste valable lorsque $n = 0$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = |u_n|$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} < \ell + \varepsilon$, d'où $a_n < (\ell + \varepsilon)a_{n-1}$.
On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $K = (\ell + \varepsilon) \in]0, 1[$.
Il s'ensuit que pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 < a_n < K^{n-n_0} a_{n_0}$. On conclut grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs.

b) De même qu'à la question précédente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon > 1$. La série diverge grossièrement puisque son terme général ne tend pas vers 0.

3. a) On reconnaît que g_1 est la fonction exponentielle laquelle est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $\in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{k^{a_n} x^n}{n!}$.
Si $x = 0$, $u_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$, et $u_0(0) = 0$. Ainsi, g_k est bien définie en 0 pour toutes les valeurs de k.
Si $x \neq 0$, $(u_n(x))$ est une suite de réels tous non nuls à laquelle on applique le résultat de la question 2.

• Si $|k| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|k|^n |x|}{n+1} = 0$. Donc, la série $\sum u_n(x)$ converge et g_k est définie sur $\mathbb{R}$.

• Si $|k| > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|k|^n |x|}{n+1} = +\infty$. Donc, la série $\sum u_n(x)$ diverge et g_k est seulement définie en $x = 0$.

4. a) Par hypothèse, f est continue sur $[-a, a]$ donc bornée sur ce segment. Soit $M > 0$ un réel tel que pour tout $x \in [-a, a]$, $|f(x)| \leqslant M$. Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$|f^{(n)}(x)| = |k^{a_n} f(k^{b_n} x)| \leqslant |k^{a_n}| M \leqslant M$$

b) Pour tout $x \in [-a, a]$, on réécrit $R_N(x) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{N-1} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction f à l'ordre $N - 1$ entre les points 0 et x, on trouve

$$|R_N(x) \leqslant \frac{|x|^N}{N!} M \leqslant \frac{|a|^N}{N!} M$$

On en déduit le résultat demandé par encadrement.

c) On déduit des questions précédentes que si f est solution du problème, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in [-a, a]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{a_n} \frac{x^n}{n!} = g_k(x).$$

Ainsi, $f = g_k$. Par suite, en reprenant les hypothèses faites sur f, on déduit que g_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_k'(x) = f'(x) = f(kx) = g_k(kx)$$

Exercice 1.13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}$.

1. a) Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente. On note alors $F(x)$ sa somme.

b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

c) On note f_n' la dérivée de la fonction f_n sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(x)$ est convergente. On note alors $G(x)$ sa somme.

2. Soit φ la fonction définie par $\forall\, t > 0, \varphi(t) = \dfrac{1}{t}\cdot$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall\,(a,b) \in [n, +\infty[^2, |\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^3}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ un réel fixé. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = |f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x)|$.
Prouver la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.

3. a) Montrer qu'il existe un réel K tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $h \in \mathbb{R}^*$ vérifiant $x + h \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\Big|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\Big| \leqslant K|h|$$

b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $F' = G$.

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt \leqslant f_k(x)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \int_1^{n+1} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt$$

c) En déduire que $\forall x \geqslant 0, \ln(x+1) \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1} + \ln(x+1)$.

d) Déterminer un équivalent simple de F au voisinage de $+\infty$.

Solution

1. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$.

Si $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et la série converge.

Si $x > 0$, $f_n(x) = \dfrac{x}{n(n+x)} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ converge.

b) $F(0) = 0$.

Par télescopage $F(1) = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) = 1$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2} \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n'(x)$ est convergente.

2. a) La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ ave $\varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2}$ et $\varphi''(t) = \dfrac{2}{t^3}$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à la fonction φ entre a et b, on obtient :

$$|\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \max_{t\in[a,b]} |\frac{2}{t^3}|$$

Comme $t \in [a, b] \subset [n, +\infty[$, on a : $\max\limits_{t\in[a,b]} |\dfrac{2}{t^3}| \leqslant \dfrac{2}{n^3}$.

On en déduit l'inégalité demandée.

b) On a :

$$\begin{aligned} f_n(x+h) - f_n(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x+h} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \\ &= \varphi(n+x) - \varphi(x+h+n). \end{aligned}$$

D'autre part, $f_n'(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2} = -\varphi'(x+n)$.

On en déduit que :

$u_n = |\varphi(x+n) - \varphi(x+h+n) + h\varphi'(x+n)| = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)|$.

On applique alors l'inégalité de la question 2. a) avec $a = x+n$, $b = x+h+n \geqslant n$.

On obtient

$$u_n = |\varphi(x+n+h) - \varphi(x+n) - h\varphi'(x+n)| \leqslant \frac{h^2}{n^3} : \sum u_n \text{ converge}$$

3. a) On écrit :

$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| = |\sum\limits_{n=1}^{\infty} (f_n(x+h) - f_n(x) - hf_n'(x))| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Comme $u_n \leqslant \dfrac{h^2}{n^3}$, on en déduit que :

$$|F(x+h) - F(x) - hG(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

En divisant par $|h| > 0$ et en posant $K = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, on obtient l'inégalité demandée.

b) Par comparaison, on trouve que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = G(x)$.
Ainsi, F est dérivable en x avec $F'(x) = G(x)$.

4. a) Soit $x \geqslant 0$ un réel fixé. La fonction $g_x : t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée est $g_x'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$.
Ainsi, g_x est décroissante sur $]0,+\infty[$. D'où, pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$g_x(k+1) \leqslant g_x(t) \leqslant g_x(k)$$

i.e.

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1+x} \leqslant \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x},$$

ce qui donne $f_{k+1}(x) \leqslant \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x} \leqslant f_k(x)$.
On intègre cette relation avec t variant de k à $k+1$. On trouve alors l'inégalité demandée.

b) En sommant, pour k variant de 1 à n, l'inégalité de droite, on trouve :

$$\int_1^{n+1} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big) dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

En sommant, pour k variant de 1 à $n-1$, l'inégalité de gauche, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt$$

d'où :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \int_1^{n} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt + f_1(x) = \int_1^{n} \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\Big)\, dt + \frac{x}{1+x}$$

En mettant bout à bout, on en déduit l'inégalité demandée.

c) Les inégalités de la question précédente donnent en calculant les intégrales :

$$\ln\Big(\frac{n+1}{x+n+1}\Big) + \ln(x+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln\Big(\frac{n}{x+n}\Big) + \ln(x+1).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut.

d) On déduit de ce qui précède que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$F(x) \sim \ln(x+1) \sim \ln(x)$$

Exercice 1.14.

1. a) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que l série de terme général $\mathrm{e}^{-n\,x}$ converge. Pour $x \in D$ on note $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-nx}$.

b) Déterminer un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers la borne inférieure a de D. Déterminer la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^{+\infty} F(x)dx$.

Soit α un réel strictement positif fixé.

2. a) Déterminer l'ensemble D' des réels x tels que la série de terme général $\exp[-n^\alpha x]$ converge.

Pour $x \in D'$ on note $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp[-n^\alpha\, x]$. On admet que G est continue sur D'.

b) Étudier le sens de variation de G.

3. a) Montrer que, pour tout $x \in D'$, on a :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt \leqslant G(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt.$$

b) En déduire un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, qu'on exprimera à l'aide de la fonction G.
On pourra justifier et utiliser le changement de variable $t \mapsto x\,t^\alpha = u$.

c) Étudier la convergence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 G(x)dx$.

4. a) Déterminer la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Quelle est l'allure de la courbe représentative de G ?

Solution

1. a) C'est une série géométrique convergente si et seulement si $x > 0$, et :

$$\forall\, x \in D = \mathbb{R}_+^*, F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-x}}$$

b) On a $F(x) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

c) Ainsi I diverge.

2. a) Si $x \leqslant 0$, $\exp\big[-n^\alpha x\big]$ ne tend pas vers 0 et la série diverge ;
si $x > 0$, $n^2 \exp\big[-n^\alpha x\big] = \exp\big[-n^\alpha x + 2\ln n\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, par croissances comparées, donc la série converge (absolument). D'où :

$$D' = \mathbb{R}_+^*$$

b) $x < x' \implies \forall\, n, \exp\big[-n^\alpha x\big] > \exp\big[-n^\alpha x'\big]$, d'où la décroissance de G sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Par décroissance de $t \mapsto \exp\big[-t^\alpha x\big]$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \int_n^{n+1} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt \leqslant \exp\big[-n^\alpha\, x\big] \text{ et}$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \exp\big[-n^\alpha x\big] \leqslant \int_{n-1}^{n} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt$$

et en sommant :

$$\int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt \leqslant G(x) \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} \exp[-t^\alpha x]dt$$

b) Pour $x > 0$, $t \mapsto xt^\alpha = u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\int_0^{+\infty} \exp\big[-t^\alpha x\big]dt = \frac{1}{\alpha x^{1/\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{1/\alpha - 1} du = \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

D'où

$$G(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}}$$

c) Donc, par la règle de Riemann, J converge si et seulement si $1/\alpha < 1$, *i.e.* $\alpha > 1$ (car $\alpha > 0$).

4. a) On a : $1 = e^{0^\alpha x} \leqslant G(x) \leqslant 1 + \dfrac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha x^{1/\alpha}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$

b) On en déduit aisément l'allure de la courbe de G.

Exercice 1.15.

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 [f(t)]^n dt$ converge. On pose alors $J_n = \displaystyle\int_0^1 [f(t)]^n dt$.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$ converge.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} [f(t)]^n dt$ et $K_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} [f(t)]^n dt$.

3. Montrer que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

4. a) Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

b) Montrer que la série de terme général I_n est divergente.

Solution

1. a) Un développement limité de la fonction sinus montre que la fonction f est continue en 0.

b) Montrons que $\sin t \geq t - t^2$ sur $]0, 1]$. Pour cela on étudie $\varphi : t \mapsto \sin t - t + t^2$ sur cet intervalle.
Comme $\varphi'(t) = \cos t - 1 + 2t$, $\varphi''(t) = 2 - \sin t > 0$, φ' croît et est telle que $\varphi'(0) = 0$, donc φ est bien positive, et :

$$J_n \geq \int_0^1 (1-t)^n \, dt = \frac{1}{n+1}$$

2. $\star$ Pour $n \geqslant 2$, l'intégrale proposée est absolument convergente puisque :
$\left|\frac{\sin t}{t}\right|^n \leqslant \frac{1}{t^n}$ sur $[1, +\infty[$.
$\star$ Pour $n = 1$, la fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et une intégration par parties donne : $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin t}{t} \, dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^A + \int_1^A \frac{\cos t}{t^2} dt.$

La seconde intégrale est absolument convergente et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \frac{\cos A}{A} = 0$, d'où la convergence de l'intégrale de f.

3. La fonction f n'est pas d'intégrale absolument convergente. En effet :

$$\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(t+k\pi)|}{t+k\pi} \, dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t+k\pi} \, dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}$$

qui est la somme partielle d'une série divergente.

Seconde solution : On remarque que $|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$. Donc

$$f(t) \geqslant \frac{1}{2t} - \frac{\cos 2t}{2t}$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t}$ diverge, alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{cos 2t}{2t} dt$ converge (par intégration par parties). On conclut alors.

4. a) Pour tout $n \geqslant 1$, K_n existe puisque I_n et J_n existent. On a :

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{2p} \left(1 + \frac{\sin t}{t}\right) dt \geqslant 0$$

puisque $1 + f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$.

b) Par les questions précédentes :

$$S_{2N+1} = \sum_{p=1}^{N} (I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=3}^{N+2} \frac{1}{p}$$

ce qui montre que la série $\sum I_n$ diverge.

Exercice 1.16.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.

2. Montrer que f' est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$.

3. a) Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$.

b) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

4. a) Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante.

b) En déduire le signe de $\alpha f + f'$.

5. Montrer que pour tout réel positif t, on a : $f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Solution

1. Comme f est à valeurs positives et α est réel, pour tout réel t, $f''(t) \geqslant 0$. Ainsi, f' est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x_0) > 0$. Alors, comme $f'' \geqslant 0$, f est convexe donc la représentation graphique est au-dessus de ses tangentes et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f(x) \geqslant f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme nous avons supposé que f est majorée, on obtient une contradiction. Finalement, pour tout $x \geqslant 0, f'(x) \leqslant 0$.

3. a) D'après la question précédente, f est une fonction décroissante. Ainsi, comme f est minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite ℓ en $+\infty$.

b) Comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\ell \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$. Alors, d'après le théorème des accroissements finis appliqués à f' sur $[0, x]$, il existe $\xi \in \,]0, x[$ tel que :

$$f'(x) - f'(0) = xf''(\xi) \geqslant x\alpha^2 f(\xi) \geqslant x\alpha^2\ell$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$. Or, comme f' est majorée par 0, on obtient une contradiction et $\ell = 0$.

c) Comme f' est croissante et majorée par 0, elle admet une limite finie $\tilde{\ell}$ en 0. Supposons que $\tilde{\ell} \neq 0$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis à f sur $[0, x]$, il existe $\xi \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = xf'(\xi) \leqslant x\tilde{\ell}$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est impossible et donc $\tilde{\ell} = 0$.

4. a) On remarque que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est dérivable et sa dérivée vaut $2f'(\alpha^2 f - f'')$. Ainsi, ce produit étant positif, la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) D'après les questions précédentes, $\lim\limits_{+\infty}(\alpha^2 f^2 - f'^2) = 0$. Ainsi cette fonction est négative, et :
$\alpha^2 f^2 \leqslant f'^2 \implies \alpha|f| \leqslant |f'| \implies \alpha f \leqslant -f' \implies \alpha f + f' \leqslant 0.$

5. Soit $g : t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$. D'après la question précédente, g' est à valeurs négatives. Ainsi, g est décroissante et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(t) \leqslant f(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

Exercice 1.17.

A tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0 = a, b_0 = b, \forall\, n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

1. a) Montrer que ces suites sont ainsi bien définies et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

b) Étudier la monotonie des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune que l'on ne cherchera pas à expliciter mais que l'on notera $\mathcal{L}(a, b)$.

2. Montrer les propriétés suivantes :

a) Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$.

b) Pour tout $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $\lambda \geqslant 0$, $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda\mathcal{L}(a, b)$.

c) Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a, b) \leqslant \frac{1}{2}(a + b)$.

3. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall\, x \geqslant 0, F(x) = \mathcal{L}(1, x)$.

a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) Montrer que F est une fonction positive et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer les propriétés suivantes :

i) Pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{x} \leqslant F(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + x)$.

ii) Pour tout $x > 0$, $F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right)$.

iii) Pour tout $x > 0$, $F(x) = \sqrt{x}\, F\big(\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}\big)$.

4. a) Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Étudier la continuité et la dérivabilité de F en 1.

Solution

1. a) On commence par montrer par récurrence la propriété : « a_n et b_n existent avec $a_n \geqslant 0$ et $b_n \geqslant 0$ ».
Puis en remarquant que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n - a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} - \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} = \frac{(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2}{2} \geqslant 0$$

on obtient les inégalités demandées.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}) \geqslant 0 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$$

Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

c) $\star$ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par b_1. Donc, la suite (a_n) converge. Notons ℓ_a sa limite

$\star$ De même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par a_1. Donc, la suite (b_n) converge. Notons ℓ_b sa limite.

$\star$ En passant à la limite dans les égalités définissant (a_n) et (b_n), on trouve :

$$\ell_b = \frac{1}{2}(\ell_a + \ell_b)$$

d'où $\ell_a = \ell_b$.

2. a) Considérons les deux nouvelles suites (a'_n) et (b'_n) définies par $a'_0 = b$, $b'_0 = a$ et les mêmes relations de récurrence $(**)$. D'après ce qui précède, les suites (a'_n) et (b'_n) convergent vers une même limite appelée $\mathcal{L}(b, a)$.
Or, on montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, $a'_n = a_n$ et $b'_n = b_n$. Donc, (a'_n) et (b'_n) convergent aussi vers $\mathcal{L}(a, b)$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a)$.

b) On considère de même les deux nouvelles suites (a''_n) et (b''_n) définies par $a''_0 = \lambda a$, $b''_0 = \lambda b$ et les relations de récurrence $(**)$. D'après ce qui précède, les suites (a''_n) et (b''_n) convergent vers une même limite appelée $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b)$.
Or, on montre par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $a''_n = \lambda a_n$ et $b''_n = \lambda b_n$. Donc, (a''_n) et (b''_n) convergent aussi vers $\lambda \mathcal{L}(a, b)$.
Par unicité de la limite, on en déduit que $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b)$.

c) Pour tout $n \geqslant 1$, $a_1 \leqslant a_n \leqslant \mathcal{L}(a, b) \leqslant b_n \leqslant b_1$.
Or, $a_1 = \sqrt{ab}$ et $b_1 = \dfrac{1}{2}(a + b)$. On obtient ainsi les inégalités souhaitées.

3. a) $\star$ $F(0)$ est la limite commune $\mathcal{L}(1,0)$ aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = 0$. On montre dans ce cas que pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 0$ et $b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$. Comme $b_1 = \frac{1}{2}$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$. Les deux suites convergent donc vers 0 et $F(0) = 0$.

$\star$ $F(1)$ est la limite $\mathcal{L}(1,1)$ commune aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = 1$. L'encadrement $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ donne alors directement $F(1) = \mathcal{L}(1,1) = 1$.

b) $F(x)$ est la limite $\mathcal{L}(1,x)$ commune aux suites (a_n) et (b_n) lorsque $a = 1$ et $b = x$.
L'encadrement $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ donne $F(x) = \mathcal{L}(1,x) \geq \sqrt{x} \geqslant 0$.
Donc, F est positive sur $\mathbb{R}^+$.
Reste à prouver sa croissance.
Soit $0 \leqslant y \leqslant x$ deux réels.
Soient, d'une part, (a_n) et (b_n) les deux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = x$ et les relations de récurrence $(**)$.
Soient, d'autre part, (c_n) et (d_n) les deux suites définies par $c_0 = 1$, $d_0 = y$ et les relations de récurrence $(**)$.
On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n \leqslant a_n$ et $d_n \leqslant b_n$.
En passant à la limite, on trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, d'où $F(y) = \mathcal{L}(1,y) \leqslant \mathcal{L}(1,x) = F(x)$.

c) i) On utilise la relation « $\sqrt{ab} \leqslant \mathcal{L}(a,b) \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$ » avec $a = 1$ et $b = x$. Cela donne exactement la série d'inégalités souhaitée.

ii) On utilise cette fois la relation « $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b)$ » avec $a = 1$, $b = x$ et $\lambda = \sqrt{x}$.
On obtient $F(x) = \mathcal{L}(1,x) = x\mathcal{L}(\frac{1}{x}, 1) = x\mathcal{L}(1, \frac{1}{x}) = xF(\frac{1}{x})$.

iii) On utilise encore la relation « $\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a,b)$ » avec $a = 1$, $b = \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$ et $\lambda = \sqrt{x}$.
On trouve : $\sqrt{x}F(\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \sqrt{x}\mathcal{L}(1, \dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}) = \mathcal{L}(\sqrt{x}, \dfrac{1+x}{2})$
On considère alors, d'une part, les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 1$ $b_0 = x$ et la relation de récurrence $(**)$ et, d'autre part, les suites (a'_n) et (b'_n) définies par $a'_0 = \sqrt{x}$, $b'_0 = \dfrac{1+x}{2}$ et la relation de récurrence $(**)$.
Une récurrence montre que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a'_n$ et $b_{n+1} = b'_n$.
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}(a'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(b'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$.
D'où $\mathcal{L}(\sqrt{x}, \dfrac{1+x}{2}) = \mathcal{L}(1,x) = F(x)$.

On en déduit la relation demandée.

4. a) Comme $F(x) \geqslant \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, par minoration $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

b) Soit $T_1(x) = \dfrac{F(x)-F(1)}{x-1}$.
Avec les relations obtenues ci-dessus, on trouve :
$$\sqrt{x}-1 \leqslant F(x)-1 \leqslant \frac{x-1}{2}$$
• Si $x>1$, on obtient en divisant par $x-1>0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leqslant T_1(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

• Si $x<1$, on obtient en divisant par $x-1<0$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \geqslant T_1(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, par encadrement, $\lim\limits_{x\to 1^+} T_1(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} T_1(x) = \dfrac{1}{2}$. La fonction F est donc dérivable (et par suite continue) en 1 avec $F'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 1.18.

1. Déterminer les valeurs de x réel pour lesquelles l'intégrale
$$\int_{1/x}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$$
est convergente.
On note alors $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$.

2. Montrer que G admet un prolongement par continuité en 1.

3. Montrer que G, ainsi prolongée, est continue sur $\mathbb{R}^*$. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ et calculer $G'(x)$.

4. La fonction G, prolongée par continuité en 1, est-elle dérivable en 1 ?

5. a) Étudier les variations de G.

b) Étudier les limites de G aux bornes de son domaine de définition.

c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la représentation graphique de G admet une asymptote d'équation de la forme $y = x+\beta$ et exprimer β.

d) Montrer qu'au voisinage de $-\infty$, la représentation graphique de G admet une asymptote d'équation de la forme $y = x+\alpha$ et exprimer α.

Solution

1. G n'est pas définie en 0.
L'application $\varphi : t \mapsto \dfrac{t}{(t^3-1)^{1/3}}$ est continue sur l'intervalle $]1/x, x[$ à condition que $x \neq 0$ et $1 \notin\,]1/x, x[$. Ainsi G est-elle déjà définie sur $D =]-\infty, 0[$.

Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, le réel 1 appartient toujours à l'intervalle (ouvert) d'intégration $]1/x, x[$ mais, au voisinage de 1, $\varphi(t) \sim \psi(t) = \dfrac{C}{(t-1)^{1/3}}$, dont l'intégrale est convergente sur $]1, 3/2]$ et sur $[1/2, 1[$. L'intégrale définissant $G(x)$ est donc deux fois convergente et $G(x)$ existe

Ainsi f est-elle définie sur $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$.

2. On vient d'expliquer que $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{(t-1)^{1/3}} dt$ est convergente, tant pour $a > 1$ que pour $a < 1$ (Riemann). Donc $\displaystyle\lim_{a \to 1} \int_1^a \frac{1}{\sqrt[3]{t-1}}\, dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 1} G(x) = 0$.

3. Notons H une primitive de φ sur chaque intervalle I de D.
Pour tout $x \in I, G(x) = H(x) - H(1/x)$. Ainsi la fonction G est continue sur I. On vient de la prolonger par continuité en $x = 1$: donc G est continue sur $\mathbb{R}^*$.

On a également, pour $x \neq 0, 1$, $G'(x) = \varphi(x) + \dfrac{1}{x^2}\varphi(1/x) = \dfrac{(x^3-1)^{2/3}}{x^2}$

4. Pour $x = 1$, il suffit d'utiliser le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: ici G est continue en 1 et $\displaystyle\lim_{x \to 1} G'(x) = 0$. Donc G est dérivable en $x = 1$ et $G'(1) = 0$.

5. a) Au vu de l'expression de $G'(x)$, on a $G'(x) \geq 0$.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} \varphi(t)dt$ diverge en $+\infty$, car $\varphi(t) \sim 1$ au voisinage de $+\infty$.
Par croissance de G, il vient $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = +\infty$. De même $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} G(x) = -\infty$.
De même, lorsque x tend vers 0, $1/x$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ et les limites sont $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} G(x) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} G(x) = -\infty$.

c) On remarque que $x - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_{1/x}^x dt$. Donc

$$G(x) - x = \frac{1}{x} + \int_{1/x}^x \Big(\frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1\Big)dt$$

La fonction à intégrer est sans problème pour la borne 0 et au voisinage de $+\infty$, on écrit :
$\dfrac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1 = (1 - \dfrac{1}{t^3})^{-1/3} - 1 \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{3t^3}$, ce qui donne la convergence de l'intégrale associée pour la borne infinie.

En notant $\beta = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{(t^3-1)^{1/3}} - 1\Big)dt$, on a donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) - x = \beta$.

d) On procède de la même manière en $-\infty$, en remarquant que l'on a encore $\sqrt[3]{t^3} = t$.