3

PROBABILITÉS

Exercice 3.01.

Soient p_1 et p_2 deux réels fixés appartenant à $]0,1[$. On pose $q_1 = 1 - p_1$ et $q_2 = 1 - p_2$.

On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2. Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir Face est p_1. Lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir Face est p_2.

On effectue à l'aide de ces deux pièces une succession de lancers selon la règle suivante :

• pour la première partie, on choisit une pièce au hasard, chaque pièce ayant la même probabilité d'être choisie. On lance alors la pièce.

• Si le résultat de ce premier lancer est Face, on joue la deuxième partie avec la pièce A_1 ; sinon, on joue la deuxième partie avec la pièce A_2.

• De même, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, si on obtient Face lors de la n-ième partie, on joue la partie suivante avec la pièce A_1 ; sinon, on joue la partie suivante avec la pièce A_2.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité d'obtenir Face lors de la n-ième partie.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. a) Exprimer u_1 puis u_2 en fonction de p_1 et de p_2.

b) Déterminer deux réels a et b (à exprimer en fonction de p_1 et p_2) tels que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = au_n + b.$$

c) Donner l'expression générale de u_n en fonction de n.

d) Déterminer la limite u de la suite (u_n).

e) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que $u = \dfrac{1}{2}$.

f) On modifie les hypothèses et on suppose dans cette question seulement que $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$.
Étudier alors la suite (u_n).

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le résultat de la n-ième partie est Face et 0 si le résultat est Pile.

a) Déterminer la loi de probabilité de X_n.

b) Déterminer l'espérance de X_n.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ soient indépendants.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p_1 et p_2 pour que les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ soient indépendants.

Solution

On note F_n l'événement : «le résultat de la n-ième partie est face», A_1 l'événement : «on joue avec la pièce A_1» et A_2 l'événement : «on joue avec la pièce A_2».

1. a) On considère le système complet d'événements $\{A_1, A_2\}$, où ni A_1 ni A_2 ne sont de probabilité nulle. La formule des probabilités totales donne alors :

$$u_1 = P(F_1) = P(A_1)P_{A_1}(F_1) + P(A_2)P_{A_2}(F_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}.$$

De même, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_1, \overline{F_1}\}$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_2 = P(F_2) &= P(F_1)P_{F_1}(F_2) + P(\overline{F_1})P_{\overline{F_1}}(F_2) = u_1 p_1 + (1 - u_1)p_2 \\ &= u_1(p_1 - p_2) + p_2 = \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2. \end{aligned}$$

b) En appliquant cette fois la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{F_n, \overline{F_n}\}$, on trouve de même :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(F_{n+1}) &= P(F_n)P_{F_n}(F_{n+1}) + P(\overline{F_n})P_{\overline{F_n}}(F_{n+1}) \\ &= u_n p_1 + (1 - u_n)p_2 = (p_1 - p_2)u_n + p_2. \end{aligned}$$

On a donc $a = p_1 - p_2$ et $b = p_2$.

c) D'après la question précédente, la suite $(u_n)_n$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe $x = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \dfrac{p_2}{q_1 + p_2}$.

On a ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - x = (p_1 - p_2)(u_n - x)$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (p_1 - p_2)^{n-1}(u_1 - x) + x$$

D'où :

$$u_n = (p_1 - p_2)^n \frac{1 - p_1 - p_2}{2(1 - p_1 + p_2)} + \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$$

d) Comme $p_1 - p_2 \in]-1, 1[$. Il vient : $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$.

e) $u = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow p_1 + p_2 = 1$.

f) Si $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$, la suite $(u_n)_n$ vérifie la relation $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = -u_n + 1$, avec $u_1 = \dfrac{1}{2}$. On a alors par récurrence banale : pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{2}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre u_n, *i.e.* $X_n(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P(X_n = 1) = u_n$ et $P(X_n = 0) = 1 - u_n$.

b) L'espérance de X_n est donc u_n.

c) On a d'une part :

$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = u_1 u_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2)$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) &= P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}([X_2 = 1]) = u_1 p_1 \\ &= \frac{p_1(p_1 + p_2)}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$

$$\Longleftrightarrow \frac{p_1(p_1 + p_2)}{2} = \frac{p_1 + p_2}{2}(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2)$$

ce qui est vrai si et seulement si $p_1 + p_2 = 0$ ou $2(p_1 - p_2) = p_1^2 - p_2^2$, ce qui équivaut à $p_1 + p_2 = 0$ ou $p_1 - p_2 = 0$ ou $p_1 + p_2 = 2$.

Comme $p_1 \in]0, 1[$ et $p_2 \in]0, 1[$, seul survit le cas $p_1 = p_2$.

d) On sait que les événements A et B sont indépendants si et seulement si les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont. Ainsi, les événements $(X_1 = 0)$ et $(X_2 = 0)$ sont indépendants si et seulement si les événements $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 1)$ le sont, *i.e.* si et seulement si $p_1 = p_2$.

Exercice 3.02.

0. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2.

Déterminer la valeur qui minimise l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto E((X - x)^2)$, où E désigne l'opérateur espérance.

Dans la suite de l'exercice, on considère un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé de support Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace. Pour tout réel t, on définit l'application $P_t : \Omega \to \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega), P_t(A) = \frac{E(\mathbf{1}_A \times \mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

où $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

1. Montrer que l'on définit ainsi une probabilité sur Ω et que pour tout $\omega \in \Omega$:

$$P_t(\omega) = \frac{P(\omega)\mathrm{e}^{tX(\omega)}}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

2. a) Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P_t)$. Calculer $E_t(Y)$.

b) Que peut-on dire de $E_t(Y)$ si X et Y sont indépendantes ?

c) Dans cette question $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ et X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y = 2^X$. Calculer $E_t(Y)$.

3. On revient au cas général. A l'aide de la question préliminaire, montrer que :

$$E_t((X - E_t(X))^2) \leqslant \frac{1}{4}\big(\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)\big)^2$$

<u>Solution</u>

0. La fonction $x \mapsto E((X-x)^2 = x^2 - 2xE(X) + E(X^2)$ est une fonction polynôme.
Cette fonction est minimale pour $x = E(X)$ et son *minimum* vaut $V(X)$.

1. On a de manière évidente P_t valeurs positives et $P_t(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω étant fini, il suffit de montrer l'additivité pour démontrer la σ-addivité.
Soit A, B tels que $A \cap B = \emptyset$. Alors $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$ et on conclut par la linéarité de l'espérance.

Pour répondre la dernière partie de la question, il suffit de prendre $A = \{\omega\}$.

2. a) Par définition, ou par le théorème de transfert, valable ici car Ω est fini :

$$E_t(Y) = \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P_t(\omega) = \frac{1}{E(\mathrm{e}^{tX})}\sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathrm{e}^{tX(\omega)} = \frac{E(Y\mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})}$$

b) Dans le cas où X et Y sont indépendantes, il vient :

$$E_t(Y) = \frac{E(Y)E(\mathrm{e}^{tX})}{E(\mathrm{e}^{tX})} = E(Y)$$

c) Ici :

$$E_t(Y) = \frac{E((2\mathrm{e}^t)^X)}{E(\mathrm{e}^{tx})} = \frac{(2\mathrm{e}^t p + q)^n}{(p\mathrm{e}^t + q)^n}$$

3. On note $\operatorname{osc}(X) = \sup X - \inf X$.

On pose $x = \inf(X + \frac{1}{2}\text{osc}(X))$. On remarque que
$$X - x \leqslant \frac{1}{2}\text{osc}(X)$$
et en appliquant la question 0 avec ce x et E_t, il vient :
$$E_t((X - E_t(X))^2) \leqslant \frac{1}{4}\big(\sup_{\omega\in\Omega} X(\omega) - \inf_{\omega\in\Omega} X(\omega)\big)^2$$

Exercice 3.03.

Les variables aléatoires de cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
Soit X une variable aléatoire à densité, ayant une densité f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ converge.
Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. Soit $Y = X - \lfloor X \rfloor$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1[, P(Y \leqslant t) - t = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t)$, avec :
$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, g_k(t) = \int_k^{k+t} f(u)du - t\int_k^{k+1} f(u)du$$

2. a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, g_k est dérivable sur $[0,1[$ et exprimer $g_k'(t)$ en fonction de $f(t)$.

b) Montrer qu'il existe $a_k \in [0,1[$ tel que $g_k'(a_k) = 0$.

c) En déduire que pour tout $t \in [0,1[$, on a $|g_k'(t)| \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} |f'(u)|du$.

3. a) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{Z}$ et $t \in [0,1[$,
$$|g_k(t)| \leqslant t\int_k^{k+1} |f'(u)|du, \text{ puis que } |g_k(t)| \leqslant (1-t)\int_k^{k+1} |f'(u)|du.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sup_{t\in[0,1[} |P(Y \leqslant t) - t| \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u)|du$.

4. On suppose dans cette question que X_n suit la loi gamma de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $Y_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1[} |P(Y_n \leqslant t) - t| = 0$$
(on admet que $n! \underset{(\infty)}{\sim} \sqrt{2\pi n}\times\big(\frac{n}{\mathrm{e}}\big)^n$)

Solution

1. Pour tout $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}P(Y\leqslant t)-t &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(k\leqslant X\leqslant k+t)-t=\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(t)-t\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_k^{k+1} f(u)\,du-\int_k^{k+1} tdu\end{aligned}$$

$$P(Y\leqslant t)-t=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\int_k^{k+1} f(u)\,du-t\int_k^{k+1} f(u)\,du\Big)$$

2. a) Au vu de la définition de g_k et grâce au théorème fondamental du calcul intégral, la fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t\in[0,1[$:

$$g_k'(t)=f(k+t)-\int_k^{k+1} f(u)\,du$$

On remarque également que g_k est de classe $\mathcal{C}^2$.

b) On remarque que $g_k(0)=g_k(1)=0$. On utilise ensuite le théorème de Rolle.

c) On écrit alors, pour tout $t\in[0,1[$:

$$g_k'(t)=\int_{a_k}^t g_k''(u)\,du=\int_{a_k}^t f'(k+u)\,du=\int_{a_k+k}^{k+t} f'(v)\,dv.$$

Donc :

$$|g_k'(t)|\leqslant\int_{a_k+k}^{k+t}|f'(v)|\,dv\leqslant\int_k^{k+1}|f'(v)|\,dv$$

3. a) On utilise de nouveau le fait que $g_k(0)=g_k(1)=0$. Ainsi par le résultat 2. c) :

$$g_k(t)=\int_0^t g_k'(u)\,du \implies |g_k(t)|\leqslant Ct,\text{ avec } C=\int_k^{k+1}|f'(u)|\,du$$

et :

$$g_k(t)=\int_1^t g_k'(u)\,du \implies |g_k(t)|\leqslant C(1-t),\text{ avec } C=\int_k^{k+1}|f'(u)|\,du$$

b) En faisant la somme des deux dernières expressions, il vient :

$$|g_k(t)|\leqslant\frac{1}{2}\int_k^{k+1}|f'(u)|\,du$$

Il reste à sommer ces inégalités pour obtenir l'inégalité demandée.

4. Une densité de X est définie par $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n\mathrm{e}^{-x}}{n!} & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

On a alors $f_n'(x)=f_{n-1}(x)-f_n(x)$.
Une simple différence montre que la fonction f_n est positive pour $x\leqslant n$ et positive pour $x\geqslant n$. On a alors en remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt=1$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} |f_n'(t)|\,dt &= \int_0^n (f_{n-1}(t) - f_n(t))\,dt + \int_n^{+\infty} (f_n(t) - f_{n-1}(t))\,dt \\ &= 2\Big(\int_n^{+\infty} f_n(t)\,dt - \int_n^{+\infty} f_{n-1}(t)\,dt\Big) = 2\int_n^{+\infty} f_n'(t)\,dt\end{aligned}$$

soit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n'(t)|\,dt = f_n(n) = 2\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!}$.

En utilisant l'équivalent de Stirling, on obtient :

$$\sup_{t\in[0,1[} |P(Y \leqslant t) - t| \leqslant \frac{n^n \mathrm{e}^{-n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

ce qui termine la question.

Exercice 3.04.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité dont f est une densité continue. On note F_X sa fonction de répartition. Pour tout x réel, on suppose l'existence d'une variable aléatoire Y_x dont la loi est donnée par :

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, P(Y_x \leqslant t) = P_{(X>x)}(X \leqslant t).$$

1. Montrer que Y_x est une variable aléatoire à densité, dont une densité g est définie par :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{f(t)}{1 - F_X(x)} & \text{si } t > x \end{cases}$$

2. On suppose qu'il existe $b > 0, \alpha > 1$ tels que $X(\Omega) = [b, +\infty[$ et qu'une densité f de X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha b^\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \geqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe β réel tel que $E(Y_x) = \beta x$. Vérifier que $\beta > 1$.

3. Réciproquement, on suppose que Y_x vérifie l'équation $E(Y_x) = \beta x$, avec β réel.

   a) Montrer que $\beta > 1$.

   b) Déterminer la loi de X.

__**Solution**__

1. Par définition de la variable aléatoire Y_x, pour tout réel t :

$$P(Y_x \leqslant t) = \frac{P((X \leqslant t) \cap (X > x))}{P(X > x)}$$

Ainsi :

$$F_{Y_x}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{F_X(t) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} & \text{si } t > x \end{cases}$$

Une densité g de Y_x est donnée par : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant x \\ \dfrac{f(t)}{1 - F_X(x)} = \dfrac{f(t)}{\int_x^{+\infty} f(t)dt} & \text{si } t > x \end{cases}$

2. On a à l'aide d'une simple intégration : $E(Y_x) = \dfrac{\int_x^{+\infty} tf(t)dt}{\int_x^{+\infty} f(t)\,dt} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1}x$

De plus $\dfrac{\alpha}{\alpha - 1} > 1$.

3. a) L'équation $E(Y_x) = \beta x$ s'écrit en utilisant une densité f de X :

$$\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt = \beta x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \quad (*)$$

Or $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ entraîne que $\beta \geqslant 1$.

Si on avait $\beta = 1$ on aurait l'égalité $\displaystyle\int_x^{+\infty} (t - x)f(t)\,dt = 0$. Ce qui est impossible par continuité et positivité de la fonction $t \to (t - x)f(t)$ sur $[x, +\infty[$.
Donc $\beta > 1$.

b) Les fonctions en jeu dans l'équation $(*)$ étant dérivables, il vient, après dérivation : $\beta \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt = (\beta+1)xf(x)$, puis une seconde dérivation donne :

$$(\beta + 1)xf'(x) + (\beta + 2)f(x) = 0$$

Cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre admet comme solution générale $f(x) = \dfrac{C}{x^{1+\frac{1}{\beta+1}}}$.

On remarque que $1 + \dfrac{1}{\beta + 1} > 1$; la fonction f étant une densité, il existe un réel $A > 0$ tel que $f(t) = 0$ pour $t \leqslant A$ (sinon l'intégrale de f serait divergente cause de la borne 0). Enfin :

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_A^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{C(\beta + 1)}{A^{1/(\beta+1)}} \implies C = \frac{1}{(\beta + 1)A^{1/(\beta+1)}}$$

On trouve ainsi une loi de Paréto.

Exercice 3.05.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C|x - y|$$

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces fonctions. Si $f \in \mathcal{L}$, on pose :

$$\|f\| = \sup_{x,y \in \mathbb{R}/x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$$

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ possédant une densité continue sur $\mathbb{R}$ et admettant une espérance.

1. Soit $X \in \mathcal{M}$. Montrer que pour tout $h \in \mathcal{L}$, $E(h(X))$ existe.

2. Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{M}$ de densités respectives f et g. On pose :

$$d(X, Y) = \sup_{h \in \mathcal{L}/||h|| \leq 1} |E(h(X)) - E(h(Y))|$$

a) Montrer que d vérifie :

i) $d(X, X) = 0$;

ii) $d(X, Y) = d(Y, X)$;

iii) $d(X, Z) \leqslant d(X, Y) + d(Y, Z)$.

b) Montrer que $d(X, Y) \leqslant E(|X - Y|)$.

3. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ et Y la loi normale $\mathcal{N}(b, \sigma^2)$. Montrer que $d(X, Y) = |b - a|$.

4. On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Y la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$d(X, Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|$$

<u>Solution</u>

1. Comme $h \in \mathcal{L}$, elle vérifie, pour tout t réel :

$$|f(t) - f(0)| \leqslant |t| \implies |f(t)| \leqslant |f(0)| + |t|$$

Comme X admet une espérance, le théorème de transfert nous assure l'existence de l'espérance de $h(X)$.

2. a) Ces relations se démontrent aisément en utilisant pour la troisième l'inégalité triangulaire. Ainsi :

$$h(t)f_X(t) - h(t)f_Z(t) = (h(t)f_X(t) - h(t)f_Y(t)) + (h(t)f_Y(t) - h(t)f_Z(t))$$

ce qui entraîne que :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_X(t) - h(t)f_Z(t))dt\right|$$
$$\leqslant \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_X(t) - h(t)f_Y(t))dt\right| + \left|\int_{-\infty}^{+\infty} (h(t)f_Y(t) - h(t)f_Z(t))dt\right|$$

On passe alors au sup droite, puis au sup gauche.

b) Soit $h \in \mathcal{L}$, avec $\|h\| \leqslant 1$. Alors :

$$|E(h(X) - h(Y))| \leqslant E(|h(X) - h(Y)|) \leqslant E(|X - Y|)$$

3. Soit $h \in \mathcal{L}$, avec $\|h\| \leqslant 1$.
On a :
$\delta = |E(h(X)) - E(h(Y))|$
$= \Big|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-(t-a)^2/(2\sigma^2)}dt - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-(t-b)^2/(2\sigma^2)}dt\Big|$
$\delta = \Big|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma t + a)\mathrm{e}^{-t^2/2} - \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(\sigma t + b)\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big|$
$\leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\sigma t + a) - h(\sigma t + b)|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt \leqslant |a - b|\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}dt$
Soit : $\delta \leqslant |a - b|$. Donc $d(X, Y) \leqslant |a - b|$.
Or pour la fonction $k : x \mapsto x$ qui convient, il vient :

$$|E(k(X)) - E(k(Y))| = |E(X) - E(Y)| = |a - b|$$

ce qui entraîne que $d(X, Y) \geqslant |a - b|$ et l'égalité.

4. Soit $h \in \mathcal{L}$ telle que $\|h\| \leq 1$. En effectuant le changement de variable $\sigma t = u$ dans la première intégrale, il vient en renotant t la variable d'intégration :

$$E(h(X)) - E(h(Y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma^2)}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [h(t\sigma) - h(t)]\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$

Donc :

$$|E(h(X)) - E(h(Y))| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t\sigma) - h(t)|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$\leqslant |1-\sigma|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \frac{2|1 - \sigma|}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|.$$

Ainsi $d(X, Y) \leqslant \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}|1 - \sigma|$.

Supposons $\sigma > 1$. Pour la fonction $k : t \mapsto |t|$, on obtient :

$$E(k(X)) - E(k(Y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/(2\sigma^2)}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} [|t\sigma| - |t|]\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$$
$$= (\sigma - 1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1 - \sigma|.$$

Le résultat est le même pour $\sigma < 1$, ce qui donne l'inégalité $d(X,Y) \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}|1-\sigma|$ et finalement l'égalité.

Exercice 3.06.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Le programme d'un examen est constitué de N questions dont n (différentes) sont tirées au hasard pour constituer l'épreuve. Chacune de ces n questions fait l'objet d'un questionnaire à choix multiples (QCM) ; chaque question comporte 4 réponses dont une seule est juste ; donner une réponse juste rapporte 1 point et une réponse fausse rapporte 0 point.
Un candidat donné connaît une proportion p des réponses aux questions du programme ; on note X le nombre de questions de l'examen dont le candidat connaît la réponse et auxquelles il répondra donc correctement ; pour les autres questions, le candidat « tentera sa chance » en donnant une réponse au hasard à la question posée. On note Y la note de ce candidat.

1. a) Déterminer la loi de X et donner son espérance.

b) Pour n et p fixés, par quelle loi peut-on approcher celle de X lorsque N tend vers l'infini ?
Donner la variance de cette loi approchée. Dans la suite, on utilisera cette approximation pour évaluer $V(X)$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer la loi conditionnelle de $Y - X$ sachant que $(X = k)$ est réalisé, préciser son espérance $E(Y - X|X = k)$ et sa variance $V(Y - X|X = k)$.

3. Déterminer l'espérance de Y.

4. a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$E((Y - E(Y))^2|X = k) = E((Y - E(Y|X = k))^2|X = k) + (E(Y|X = k) - E(Y))^2$$

b) En déduire que la variance de Y vaut : $V(Y) = \dfrac{n(1-p)}{16}(3 + 9p)$.

<u>**Solution**</u>

1. a) Les n questions de l'examen sont tirées au hasard sans remise parmi les N questions du programme, dont le candidat connaît une proportion p, donc X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$, d'espérance $E(X) = np$.

b) D'après le cours, la loi de X est approchée (au sens de la convergence en loi en fait) par une loi binomiale de paramètres n et p. Dans la suite on prend donc $V(X) = np(1-p)$.

2. La variable $Y-X$ est le nombre de questions auxquelles le candidat répond correctement par hasard. Sachant que $(X = k)$ est réalisé, il y a $n-k$ questions posées dont le candidat ne connaît pas la réponse, avec probabilité de succès $\frac{1}{4}$ pour chacune, indépendamment les unes des autres. Donc la loi de $Y - X$ sachant que $(X = k)$ est réalisé est la loi binomiale de paramètres $n - k$ et $\frac{1}{4}$, donc :

$$E(Y - X|X = k) = \frac{n-k}{4} \text{ et } V(Y - X|X = k) = \frac{3(n-k)}{16}.$$

3. On a :

$E(Y) = E(X) + E(Y - X)$ (linéarité de l'espérance)

$= E(X) + \sum_{k=0}^{n} E(Y - X|X = k)P(X = k)$ (formule de l'espérance totale)

$= E(X) + \sum_{k=0}^{n} (n-k)\frac{1}{4}P(X = k)$ (d'après la question 2)

$= E(X) + \frac{1}{4}n \sum_{k=0}^{n} P(X = k) - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} kP(X = k)$

Soit : $E(Y) = n\big(\frac{1}{4} + \frac{3p}{4}\big)$ (d'après la question 1. a)

4. a) On écrit :

$(Y - E(Y)]^2 - [Y - E(Y|X = k))^2$

$= ([E(Y|X = k) - E(Y))(Y - E(Y) + Y - E(Y|X = k))$

d'où le résultat voulu en prenant l'espérance conditionnelle sachant que $(X = k)$ est réalisé, par linéarité de l'espérance (noter que $E(Y|X = k) - E(Y)$ est une constante).

b) Par linéarité de l'espérance conditionnelle, d'après la question 2., on a :

$E(Y|X = k) - E(Y) = E(Y - X|X = k) + E(X|X = k) - E(Y)$

$= \frac{n-k}{4} + k - \frac{n}{4}(1 + 3p) = \frac{3}{4}(k - np).$

Par ailleurs, comme Y et $Y - k$ ont la même variance, d'après la question 2, on a :

$$E((Y - E(Y|X = k))^2|X = k) = \frac{3(n-k)}{16}$$

Donc

$V(Y) = E((Y - E(Y))^2)$

$= \sum_{k=0}^{n} E((Y - E(Y))^2|X = k)P(X = k)$ (formule de l'espérance totale)

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(E((Y - E(Y|X = k))^2|X = k) + (E(Y|X = k) - E(Y))^2\big)P(X = k)$$

(question 4. a)

$$= \sum_{k=0}^{n} \big(\frac{3(n-k)}{16} + (\frac{3}{4}(k - np))^2\big)P(X = k)$$

$$= E\big(\frac{3(n-X)}{16} + \frac{9}{16}(X - np)^2\big) \text{ (théorème de transfert)}$$

$$V(Y) = \frac{3}{16}n(1-p) + \frac{9}{16}np(1-p) = \frac{n(1-p)}{16}(3 + 9p)$$

Exercice 3.07.

On considère une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par R_n l'événement : « Pile apparaît au n-ème lancer » et par S_n l'événement : « Face apparaît au n-ème lancer ».

Soit Y la variable aléatoire désignant le rang du lancer où, pour la première fois, apparaît un Face précédé d'au moins deux Pile si cette configuration apparaît, et prenant la valeur 0 si cette configuration n'apparaît jamais.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On pose $c_1 = c_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $c_n = P([Y = n])$. On note également

$$\forall\, n \geqslant 3, B_n = R_{n-2} \cap R_{n-1} \cap S_n \text{ et } U_n = \bigcup_{i=3}^{n} B_i$$

On pose enfin $u_1 = u_2 = 0$ et pour tout $n \geqslant 3$, $u_n = P(U_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est monotone et convergente.

2. a) Pour tout $n \geqslant 3$, calculer $P(B_n)$.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$, les événements B_n, B_{n+1} et B_{n+2} sont deux à deux incompatibles.

c) Calculer les valeurs de u_3, u_4 et u_5.

3. Dans cette question, on suppose $n \geqslant 5$.

a) Comparer les événements $U_n \cap B_{n+1}$ et $U_{n-2} \cap B_{n+1}$. Préciser leurs probabilités respectives.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{8}(1 - u_{n-2})$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

d) Calculer $P(Y = 0)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a) Trouver $(\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \beta v_{n+2} + \gamma v_{n+3}$.

b) Montrer que la série de terme général v_n est convergente et calculer $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Solution

1. On remarque que (U_n) constitue une suite croissante d'événements. Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Donc, elle converge.

2. a) Par indépendance des résultats des différents lancers effectués :

$$P(B_n) = P(R_{n-2})P(R_{n-1})P(S_n) = \frac{1}{8}$$

b) Pour tout $n \geqslant 3$, B_n est inclus dans S_n et B_{n+1} est inclus dans R_n. Donc

$$B_n \cap B_{n+1} \subset R_n \cap S_n = \emptyset$$

De même, $B_n \cap B_{n+2} = B_{n+1} \cap B_{n+2} = \emptyset$.

c) On en déduit que :

$$u_3 = P(B_3) = \frac{1}{8}; u_4 = P(U_4) = P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{4}\ ;$$
$$u_5 = P(U_5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{3}{8}$$

3. a) Pour tout $n \geqslant 5$, on a $U_n = U_{n-2} \cup B_{n-1} \cup B_n$.
Puisque B_{n+1}, B_n et B_{n-1} sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} U_n \cap B_{n+1} &= (U_{n-2} \cap B_{n+1}) \cup (B_{n-1} \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}) \\ &= U_{n-2} \cap B_{n+1}. \end{aligned}$$

Les événements U_{n-2} et B_{n+1} étant indépendants, on trouve :

$$P(U_n \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2} \cap B_{n+1}) = P(U_{n-2})P(B_{n+1}) = \frac{1}{8}u_{n-2}$$

b) Pour tout $n \geqslant 5$, on a $U_{n+1} = U_n \cup B_{n+1}$. Il s'ensuit que

$$u_{n+1} = P(U_n) + P(B_{n+1}) - P(U_n \cap B_{n+1}) = u_n + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}u_{n-2}$$

On vérifie, grâce aux valeurs numériques trouvées plus haut, que cette relation reste valable pour $n = 3$ et $n = 4$.

c) On sait que la suite $(u_n)_n$ converge et on note ℓ sa limite. En passant à la limite dans l'égalité de la question précédente, on trouve $\ell = \ell + \frac{1}{8}(1 - \ell)$. On en déduit que $\ell = 1$.

d) De plus, l'événement $(Y = 0)$ a pour complémentaire $\bigcup_{n \geq 3} B_n = \bigcup_{n \geq 3} U_n$.
Comme $(U_n)_n$ est une suite croissante d'événements :

$$P(Y = 0) = 1 - P(\bigcup_{n \geq 3} U_n) = 1 - \lim_{n \to +\infty}(u_n) = 1 - 1 = 0$$

4. a) On déduit de la question 3. b) que pour tout $n \geqslant 3$, $v_{n+1} = v_n - \frac{1}{8}v_{n-2}$. Il s'ensuit que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, v_n = 8(v_{n+2} - v_{n+3})$$

b) On somme ces égalités pour n variant de 1 à N. On a alors $\sum_{n=1}^{N} v_n = 7 - 8v_{N+3}$. Comme la suite (v_n) tend vers 0, en faisant tendre N vers l'infini, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 7$$

Exercice 3.08.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} t\,\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

On admet qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X réelle de densité f définie sur cet espace.

2. Soit F la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction de répartition de X. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. On note F^{-1} sa bijection réciproque.

Soit U une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi uniforme sur $[0, 1[$. On pose $Z = F^{-1}(U)$. Prouver que Z est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f pour densité.

3. Montrer que X admet un moment d'ordre n, noté $M_n(X) = E(X^n)$, pour tout $n \geqslant 1$ et le calculer.

4. Pour u réel, on pose sous réserve d'existence, $L(u) = E(\mathrm{e}^{uX})$, espérance de la variable aléatoire e^{uX}.

Déterminer l'ensemble D de définition de L et calculer $L(u)$ pour tout $u \in D$.

5. a) Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et calculer $L^{(n)}(0)$ pour tout entier n. Comparer $M_n(X)$ et $L^{(n)}(0)$.

b) Montrer que pour tout $u \in \,]-1, 1[$, $E(\mathrm{e}^{uX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!} u^n$.

__Solution__

1. On sait (cours) que la fonction f est une densité (loi γ).

Soit X réelle de densité f sur l'espace probabilisé $\Big(\Omega, \mathcal{A}, P\Big)$ et F_X sa fonction de répartition. (Il est facile mais inutile d'expliciter F_X)

2. Soit F la restriction de F_X à $\mathbb{R}_+$.

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. On en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, comme de plus F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $F(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, on en déduit que F est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[0,1[$.
On note F^{-1} sa bijection réciproque. On a l'équivalence :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+, \forall\, u \in [0,1[, F(x) = u \iff x = F^{-1}(u)$$

Z est bien définie et pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, on a :
• si $y < 0$, $(Z \leqslant y) = (F^{-1}(U) \leqslant y) = \emptyset$, car F^{-1} est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
• si $y \geqslant 0$, $(Z \leqslant y) = (F^{-1}(U) \leqslant x) = (U \leqslant F(x)) \in \mathcal{A}$, car U est une variable aléatoire.

En conséquence : $\forall y \in \mathbb{R}$, $(Z \leqslant y) \in \mathcal{A}$, ce qui prouve que Z est une variable aléatoire.
Pour tout réel $y \in \mathbb{R}$, on a :
• si $y < 0$, $P(Z \leqslant y) = P(\emptyset) = 0 = F_X(y)$
• si $y \geqslant 0$, $P(Z \leqslant y) = P(F^{-1}(U) \leqslant y) = P(U \leqslant F(y)) = F(y) = F_X(y)$, car U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1[$.

Les deux variables aléatoires X et Z ayant même fonction de répartition, ont même loi.

3. Pour tout entier n, sous réserve d'absolue convergence, le moment d'ordre n de X est donné par :

$$M_n(X) = \int_0^{+\infty} t^n t\mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t} dt = \Gamma(n+2) = (n+1)!$$

4. La fonction $t \mapsto t.\mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{-t}$ admet une intégrale convergente en $+\infty$ pour $u < 1$ et la formule du transfert donne :

$$L(u) = E(\mathrm{e}^{uX}) = \int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{ut}\mathrm{e}^{-t}\, dt = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t(1-u)} dt$$

Donc $L(u)$ existe si et seulement si $u < 1$, et par une intégration par parties ou par un changement de variable affine :

$$L(u) = \frac{1}{(1-u)^2}$$

5. a) La fonction rationnelle $u \mapsto \dfrac{1}{(1-u)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition et pour tout entier n :

$$L^{(n)}(u) = \frac{(n+1)!}{(1-u)^{n+2}}, \text{ d'où } L^{(n)}(0) = (n+1)!$$

On en déduit que pour tout entier n, $M_n(X) = L^{(n)}(0)$.

b) On a $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{M_n(X)}{n!} u^n = \sum\limits_{n\geq 0} (n+1)u^n$

Or pour tout $u \in \,]-1,1[$, on sait que la série géométrique dérivée $\sum\limits_{n\geq 1} k.u^{k-1}$ converge de somme $\dfrac{1}{(1-u)^2}$.

On en déduit que pour tout $u \in \,]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)u^n = \dfrac{1}{(1-u)^2}$

On conclut :

$$\forall\, u \in \,]-1,1[, L(u) = E(\mathrm{e}^{uX}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n(X)}{n!} u^n$$

Exercice 3.09.

On considère une succession (éventuellement infinie) de lancers d'une pièce. On suppose que la probabilité d'obtenir Pile lors d'un lancer est $1-x$ et que la probabilité d'obtenir Face est x. Les résultats des différents lancers sont supposés indépendants.

On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le nombre de fois où l'on a obtenu Pile au cours des n premiers lancers et T_n le numéro du lancer où l'on obtient Pile pour la n-ième fois.

1. Préciser la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. a) Pour tout entier k et tout entier non nul n, montrer que :

$$P(T_n = n+k) = \binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^n x^k.$$

b) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(T_n = n+k) = 1$. Quelle est la signification de ce résultat ?

c) Montrer que T_n admet une espérance et calculer $E(T_n)$.

d) Calculer de même $E(T_n(T_n+1))$; en déduire la variance de T_n.

3. Soient a un réel strictement positif et λ un réel strictement supérieur à 1. Un joueur joue de la manière suivante : lors du k-ième lancer il joue la somme a^{k-1} euros.
• Si Pile sort, il reçoit la somme de λa^{k-1} euros et il perd sa mise.
• Si Face sort, il perd sa mise.
Puis on passe au lancer suivant ...
On note G_n la somme des gains (positifs ou négatifs) du joueur après son n-ième succès. On suppose $a > 1$.

a) Exprimer G_1 en fonction de a^{T_1}

b) Après avoir justifié son existence, calculer $E(G_1)$.

c) Exprimer G_2 en fonction de a^{T_1} et a^{T_2}.

Solution

1. La variable aléatoire S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,1-x)$, son espérance vaut $n(1-x)$, sa variance $nx(1-x)$.

2. a) Obtenir l'événement $(T_r=k+r)$, c'est avoir obtenu exactement $r-1$ pile durant les $k+r-1$ premiers lancers, et pile au lancer de rang $k+r$. On obtient donc, pour tout entier k et tout entier non nul r :

$$P(T_r=k+r)=\binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^{r-1}x^k(1-x)=\binom{k+r-1}{r-1}(1-x)^r x^k$$

b) Ainsi, en utilisant les formules de référence du cours :

$$E(T_n)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+n)\binom{k+n-1}{k-1}(1-x)^n x^k=n(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}x^k$$
$$=\frac{n}{1-x}$$

c) On trouve :

$$E(T_n(T_n+1))=\sum_{k=0}^{\infty}(k+n)(k+n+1)\binom{k+n-1}{n-1}(1-x)^n x^k$$
$$=n(n+1)(1-x)^n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n+1}{n+1}x^k=\frac{n(n+1)}{(1-x)^2}$$

D'où l'on déduit, $V(T_n)=E(T_n^2)-E^2(T_n)=\dfrac{nx}{(1-x)^2}$

[Notons que l'on peut obtenir ces résultats sans calculs, en remarquant que T_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre $1-x$ (temps d'attente pour obtenir un premier pile ou un nouveau pile après en avoir obtenu un)]

3. On note G_n la somme des gains (positifs ou négatifs) du joueur après son n-ième succès. On suppose $a>1$.

a) Si $T_1=k$, $G_1=-\sum_{i=1}^{k}a^{i-1}+\lambda a^{k-1}=\dfrac{1-a^k}{a-1}+\lambda a^{k-1}$. D'où l'on déduit que :

$$G_1=\frac{1-a^{T_1}}{a-1}+\lambda a^{T_1-1}$$

b) Comme T_1 suit la loi $\mathcal{G}(1-x)$, on a :

$$E(a^{T_1})=\sum_{n=1}^{\infty}a^nP(T_1=n)=\sum_{n=1}^{\infty}a^nx^{n-1}(1-x)=\frac{a(1-x)}{1-ax}$$

D'o : $E(G_1)=\dfrac{-1+\lambda(1-x)}{1-ax}$.

c) On montre de même que $G_2=\dfrac{1-a^{T_2}}{a-1}+\lambda(a^{T_2-1}+a^{T_1-1})$.

On en déduirait : $E(G_2) = \dfrac{(\lambda(1-x)-1)(a+1-2ax)}{(1-ax)^2}$.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Un rat se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes et cette boîte comporte également une vraie porte lui permettant de sortir de la boîte (on suppose $n \geqslant 2$).
Lorsque le rat s'aperçoit qu'il a choisi une fausse porte, il revient au centre de la boîte pour un nouvel essai.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais faits par l'animal pour trouver la porte qui lui permet de sortir.

1. On suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X.

2. Dans cette question, le rat ne possède toujours pas de mémoire, et à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte. Au départ, la cage possède une fausse porte et la vraie porte.
Déterminer, dans ce cas, la loi de X. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?

3. On suppose, dans cette question, le rat sans mémoire pendant les ℓ premiers essais (avec $\ell \in \mathbb{N}^*$), puis possédant une mémoire immédiate ensuite : à partir du $(\ell+1)$-ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite alors la dernière porte essayée pour l'essai suivant.

a) On pose $X' = Y \times \mathbf{1}_{[Y \leq \ell]} + (\ell + Z) \times 1_{[Y > \ell]}$, où Y et Z sont deux variables aléatoires, telles que Y suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n}$ et Z une loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{n-1}$.

Déterminer la loi de X' et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X' = k) = 1$.

b) Montrer que X suit la même loi que X'.

c) Proposer un algorithme de simulation de la variable aléatoire X.

Solution

1. La variable aléatoire X représente le nombre d'essais pour obtenir le premier succès. Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/n)$

2. On regarde ce qui se passe pour des petites valeurs :
$\rightarrow$ On a $P(X = 1) = 1/2$.

→ On a : $(X=2)=E_1\cap S_2$ et $P(X=2)=P_{E_1}(S_2)P(E_1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.
→ De manière générale, on a $(X=k)=S_k\cap E_{k-1}\cap\cdots\cap E_1$ et, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P_{E_{k-1}\cap\cdots\cap E_1}(S_k)\times P_{E_{k-2}\cap\cdots\cap E_1}(E_{k-1})\times\cdots\times P_{E_1}(E_2)\times P(E_1)\\&=\frac{1}{k+1}\times\frac{k-1}{k}\times\cdots\times\frac{1}{2}=\frac{1}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

De manière évidente $E(X)$ n'existe pas.

3. Par définition de X', on a $(X'=k)=\begin{cases}Y=k & \text{si } k\leqslant\ell\\ Z=k-\ell & \text{si } k>\ell\end{cases}$.

et $P(X'=k)=\begin{cases}\frac{1}{n}\big(1-\frac{1}{n}\big)^{k-1} & \text{si } k\leqslant\ell\\ \big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}\times\frac{1}{n-1}\big(1-\frac{1}{n-1}\big)^{j} & \text{si } k=\ell+j\end{cases}$

On vérifie que l'on définit ainsi une loi de probabilité. En effet :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P(X'=k)&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\ell}\big(1-\frac{1}{n}\big)^{k-1}+\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}\times\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{\infty}\big(1-\frac{1}{n-1}\big)^{j}\\&=1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}+\big(1-\frac{1}{n}\big)^{\ell}=1.\end{aligned}$$

b) Il est évident que X suit la loi de X'.

c) Simulation de la loi géométrique de paramètre p :

```
Function geom(p :real) : integer ;
Var a : integer ; x := real
Begin
  a := 1 ; x := random ;
  while x>p
    Begin a := a+1 ; x := random end ;
  geom := a end ;
```

Il reste à utiliser cette idée.

```
Function simul(l,n :integer) : integer ;
Var a : integer ; x := real
Begin
  a := 1 ; x := random ;
  while x>1/n and a<=l
    Begin
    a := a+1 ; x := random end ;
  b := 0 ;
  If a>l
    Begin
    b := b+1 ;
    x := random
```

```
    end ;
simul := a+1+b
end ;
```

Exercice 3.11.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall\, k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}.$$

où $a > 0$ est fixé.

1. Vérifier que l'on a bien défini une loi de probabilité.

Dans toute la suite, on désigne par Y une variable aléatoire indépendante de X, définie sur le même espace probabilisé, et suivant la même loi que X.

2. On considère la variable aléatoire $Z = X + Y$.

a) Déterminer la loi de Z.

b) Trouver l'espérance de la variable aléatoire $S = \dfrac{1}{1+Z}$.

c) Déterminer $E\big(\dfrac{X}{1+Z}\big)$.

3. On considère maintenant la variable aléatoire $T = \inf(X, Y)$, définie par : pour tout $\omega \in \Omega, T(\omega) = \min(X(\omega), Y(\omega))$.

a) Déterminer $P(X \leqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Prouver que la loi de T est donnée par $T(\Omega) = \mathbb{N}$ et :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}, P(T = m) = \frac{1+2a}{(1+a)^2}\big(\frac{a}{1+a}\big)^{2m}.$$

Solution

1. On a :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) = \frac{1}{1+a}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{a}{1+a}\big)^k = \frac{1}{1+a} \times \frac{1}{1 - \frac{a}{1+a}} = 1.$$

Ceci prouve que l'on a bien affaire à une loi de de probabilité, puisque la positivité est évidente.

2. a) Comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, il vient :

$$P(Z = n) = P(X + Y = n) = P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = n - k)\Big)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}} \times \frac{a^{n-k}}{(1+a)^{n-k+1}} = \frac{(n+1)a^n}{(1+a)^{n+2}}$$

b) En utilisant le théorème de transfert, on trouve :

$$E(S)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}P(Z=n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+a)^2}\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^n$$
$$=\frac{1}{(1+a)^2}\times\frac{1}{1-\frac{a}{1+a}}=\frac{1}{1+a}.$$

c) Comme X et Y suivent la même loi, il vient par symétrie :

$$E\Big(\frac{X}{1+Z}\Big)=E\Big(\frac{X}{1+X+Y}\Big)=E\Big(\frac{Y}{1+X+Y}\Big)=E\Big(\frac{Y}{1+Z}\Big).$$

d) Avec les questions b) et c) on voit que : $2E\Big(\dfrac{X}{1+Z}\Big)+E(S)=1$, d'où :

$$E\Big(\frac{X}{1+Z}\Big)=\frac{1}{2}\big(1-E(S)\big)=\frac{a}{2(1+a)}$$

3. On considère maintenant la variable $T=\inf(X,Y)$.

a) La formule sur la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique donne $P(X\leqslant n)=1-\Big(\dfrac{a}{1+a}\Big)^{n+1}$.

b) On a :

$$P(T\leqslant m)=1-P(T>m)=1-P(X>m)P(Y>m)=1-P(X>m)^2$$
$$=1-\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^{2(m+1)}$$

Si $m\geqslant 1$, on en déduit que :

$$P(T=m)=\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^{2m}-\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^{2m+2}=\frac{1+2a}{(1+a)^2}\Big(\frac{a}{1+a}\Big)^{2m}.$$

Comme $P(T=0)=P(T\leqslant 0)$, on voit que la formule reste valable pour $m=0$.

Exercice 3.12.

On effectue une suite indéfinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par p_n la probabilité qu'au cours des n premiers lancers le résultat « Pile » n'ait pas été obtenu trois fois de suite.

1. a) Calculer p_1,p_2 et p_3. Dans la suite on pose $p_0=1$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{4}p_{n-2}+\frac{1}{8}p_{n-3}\qquad(*)$$

2. a) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, la série $\sum p_nx^n$ est convergente.

b) Pour $x\in[0,1]$, calculer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_nx^n$.

3. a) Montrer que l'équation (E) : $8x^3-4x^2-2x-1=0$ admet une unique racine réelle ; on la note r. Montrer que $0<r<1$.

b) Montrer que l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées, ω et $\overline{\omega}$, de module strictement inférieur à r.

c) Montrer que la suite (p_n) est une combinaison linéaire des trois suites $(r^n), (\omega^n)$ et $(\overline{\omega}^n)$. (On pourra montrer que le $\mathbb{C}$–espace vectoriel des suites complexes vérifiant la relation $(*)$ est de dimension 3).

d) En déduire la convergence et la limite de la suite $(p_n)_n$.

Solution

1. a) On trouve $p_1 = p_2 = 1$ et $p_3 = \dfrac{7}{8}$, puisque l'événement contraire «obtenir trois Pile consécutifs» se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$.

b) Si $n \geqslant 4$, on n'a pas encore conclu au bout de trois tirages et on a donc pu obtenir F_1 ou P_1F_2 ou $P_1P_2F_3$. A l'issue de chacune de ces séquences on est alors revenu au point de départ.

Ainsi, notons A l'événement «ne pas obtenir 3 Pile consécutifs au cours des n premiers lancers» :

$p_n = P_{F_1}(A)P(F_1) + P_{(P_1\cap F_2)}(A)P(P_1\cap F_2) + P_{(P_1\cap P_2\cap F_3)}(A)P(P_1\cap P_2\cap F_3)$

soit : $p_n = \dfrac{1}{2}\,p_{n-1} + \dfrac{1}{4}\,p_{n-2} + \dfrac{1}{8}\,p_{n-3}$

2. a) Comme $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant p_n x^n \leqslant x^n$. On en déduit la convergence de la série $\sum p_n x^n$.

b) Par convergence des séries en question, on peut écrire :

$\sum\limits_{n=3}^{\infty} p_n x^n = \dfrac{x}{2}\Big(\sum\limits_{n=3}^{\infty} p_{n-1}x^{n-1}\Big) + \dfrac{x^2}{4}\Big(\sum\limits_{n=3}^{\infty} p_{n-2}x^{n-2}\Big) + \dfrac{x^3}{8}\Big(\sum\limits_{n=3}^{\infty} p_{n-3}x^{n-3}\Big).$

Soit, en notant $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$:

$$S(x) - 1 - x - x^2 = \frac{x}{2}\big(S(x) - 1 - x\big) + \frac{x^2}{4}\big(S(x) - 1\big) + \frac{x^3}{8}\,S(x)$$

Soit :

$$S(x) = \frac{2x^2 + 4x + 8}{8 - 4x - 2x^2 - x^3}$$

3. a) Soit $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 2x - 1$. On a :

$$P'(x) = 24x^2 - 8x - 2 = 24(x - \tfrac{1}{2})(x + \tfrac{1}{6}).$$

Ceci permet d'étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ et d'en déduire que $P(x) < 0$ pour $x \leqslant 1/2$, puis que P est strictement croissante sur $[1/2, +\infty[$.

Comme $P(0)P(1) < 0$, l'équation (E) admet une unique racine réelle r appartenant à $]0, 1[$.

b) On remarque d'abord que P étant un polynôme réel de degré 3, ayant une racine réelle, il admet deux racines complexes conjuguées ω et $\overline{\omega}$.

Soit donc ω tel que $P(\omega) = 0$.
Alors $8\omega^3 = 4\omega^2 + 2\omega + 1$ entraîne que
$$8|\omega|^3 \leqslant 4|\omega|^2 + 2|\omega| + 1$$
donc $P(|\omega|) < 0$, ce qui d'après les variations de P entraîne que $|\omega| < r$.

c) Le $\mathbb{C}$–espace vectoriel $\mathcal{S}$ des suites complexes vérifiant la relation $(*)$ est de dimension 3.
$\star$ On montre en effet facilement que c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites sur $\mathbb{C}$.
$\star$ l'application qui à (x, y, z) associe **LA** suite de $\mathcal{S}$ dont les trois premiers termes sont x, y et z est un isomorphisme de $\mathbb{C}^3$ sur $\mathcal{C}$.

Montrons que les trois suites $(r^n)_n, (\omega^n)_n, (\overline{\omega}^n)_n$ forment un système libre : si pour tout $n \geqslant 0$, on a :
$$\lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n = 0$$
on divise par r^n, puis on fait tendre n vers l'infini pour obtenir $\lambda = 0$. En faisant alors $n = 0$, puis $n = 1$, comme $\omega \neq \overline{\omega}$, il vient $\mu = \nu = 0$.

d) On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \lambda r^n + \mu\omega^n + \nu\overline{\omega}^n$.
Comme les racines sont toutes de module < 1, il vient : $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$

Exercice 3.13.

Soit $(A_n)_n$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note B l'événement $\bigcap\limits_{n\geq 1} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.
On rappelle que cet événement est en fait :
$$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ appartient à une infinité des } A_n\}.$$

1. On suppose que la série $\sum\limits_k P(A_k)$ converge. Montrer que $P(B) = 0$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées admettant un moment d'ordre 4. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Montrer que $E(S_n^4) = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Donner une majoration de la probabilité $P(|S_n| \geqslant \varepsilon n)$. En déduire la limite en probabilité de la suite $\big(\frac{S_n}{n}\big)_n$.

c) En utilisant la question 1, montrer que sur un ensemble de probabilité 1, on a $\lim \dfrac{S_n}{n} = 0$.

__Solution__

1. Pour tout entier m, on a : $\bigcap_{n=1}^{m} \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$. La série $\sum P(A_n)$ est convergente. Donc $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} P(A_k) = 0$.
Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leqslant P(A) + P(B)$, donne par une récurrence simple $P(A_m \cup A_{m+1} \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_m) + P(A_{m+1}) + \cdots + P(A_n)$ et par passage à la limite par σ-additivité :

$$P\big(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\big) \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} P(A_k)$$

ce qui montre que $P(B) = \lim_{m\to\infty} P\big(\bigcap_{n=1}^{m} \bigcup_{k\geq n} A_k\big) = 0$.

2. a) Par linéarité de l'espérance

$$E\big(S_n^4\big) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_\ell E(X_i X_j X_k X_\ell)$$

Les variables (X_i) étant identiquement distribuées **indépendantes** et d'espérance nulle, on ne prend en compte dans ce produit que les termes ne contenant aucun facteur à la puissance 1, donc que les termes en X_i^4 et en $X_i^2 X_j^2$, avec $i < j$.

→ Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, il y a un terme en X_i^4 ;
→ Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, il y a $\binom{4}{2} = 6$ termes en $X_i^2 X_j^2$, car dans l'expression :

$$(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)(X_1 + \cdots + X_n)$$

on doit choisir les deux facteurs dans lesquels on choisit X_i et dans les deux autres on choisit donc X_j.

Ainsi :

$$E(S_n^4) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^4) + \sum_{i<j} 6 \times E(X_i^2 X_j^2)$$

La première somme comporte n termes et la seconde en comporte $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, de plus X_i^2 et X_j^2 sont indépendantes et toutes les variables ont même loi. Par conséquent :

$$E(S_n^4) = nE(X_1^4) + 3n(n-1)(E(X_1^2))^2$$

b) Comme $V(X_1^2) \geqslant 0$, on a :
$(E(X_1^2))^2 \leqslant E(X_1^4)$, et $E(S_n^4) \leqslant (3n^2 - 2n)E(X_1^4)$.

Par l'inégalité de Markov :

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon n) = P(S_n^4 \geqslant \varepsilon^4 n^4) \leqslant \frac{E(S_n^4)}{\varepsilon^4 n^4} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{3}{\varepsilon^4 n^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $\big(\frac{S_n}{n}\big)_n$ tend en probabilité vers 0.

c) Montrons que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ tend p.s. vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$ et A_n l'événement $\left\{\omega \in \Omega / \frac{|S_n|}{n} \geqslant \varepsilon\right\}$. La série $\sum P(A_n)$ est convergente.
Par la question précédente une infinité dévénements A_n se produisent avec la probabilité 0, c'est-à-dire qu'ils se produisent un nombre fini de fois avec la probabilité 1.

Donc, à partir d'un moment N, les événements $\left(\frac{|S_n|}{n} < \varepsilon\right)$ se produisent avec une probabilité de 1. Ce qui signifie que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ tend vers 0 p.s.

Exercice 3.14.

1. a) Montrer que la fonction $]0, \frac{\pi}{2}[\to]0,1[, t \mapsto \sin(t)$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note h sa bijection réciproque.

b) Montrer que h est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer $h'(x)$ en fonction de x.

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$\text{pour tout } x \text{ réel} : f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Soient deux réels a et b tels que : $0 < a \leqslant b < 1$. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 2\big(h(\sqrt{b}) - h(\sqrt{a})\big)$$

b) Montrer l'existence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

3. a) Déterminer la constante k de telle sorte que la fonction $g = kf$ soit une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

Désormais on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densité g.

b) Déterminer la fonction de répartition G de X.

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $G(1-x)$ en fonction de $G(x)$. En déduire $P(X < \frac{1}{2})$.

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $h(\sqrt{X})$.

Solution

1. La fonction est continue et strictement croissante : elle réalise une bijection de $]0, \pi/2[$ sur son image $]0,1[$. Elle est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas d'où :

$$\forall\, x \in]0,1[, h'(x) = \frac{1}{\cos(h(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ donc } h \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty$$

2. a) Le changement de variable : $u = \sqrt{t}$ donne :

$$\int_a^b f(t)\,dt = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = 2(h(\sqrt{a}) - h(\sqrt{b}))$$

b) la fonction f est continue sur $]0,1[$.
$\rightarrow$ En 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$,
$\rightarrow$ En 1 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$,
Donc l'intégrale proposée est convergente et :

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{a\to 0, b\to 1} 2(h(\sqrt{a}) - h(\sqrt{b})) = \pi$$

3. a) Pour tout réel k, kf est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.
La fonction kf est positive, $\displaystyle\int_0^1 kf(t)dt = k\pi$. Donc kf est une densité de probabilité si et seulement si $k = \dfrac{1}{\pi}$

b) Un calcul élémentaire donne $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^x g(t)dt = \frac{2}{\pi}h(\sqrt{x}) & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) = g(1-x)$ entraîne :

$$G(1-x) = \int_{-\infty}^{1-x} g(t)\,dt = 1 - \int_{1-x}^{+\infty} g(t)\,dt = 1 - \int_{-\infty}^{x} g(u)du = 1 - G(x)$$

(on a effectué le changement de variable $t = 1-u$)

D'où : $G(0.5) = 1 - G(0.5) \implies G(0.5) = P(X < \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

4. Si $t < 0$: $P[h(\sqrt{X}) \leqslant t] = 0$,
Si $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$: $P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = P(X \leqslant \sin^2(t)) = G(\sin^2(t)) = \frac{2}{\pi}h(\sin(t))$
soit :

$$P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = \frac{2}{\pi}t$$

Si $t > \frac{\pi}{2}$: $P(h(\sqrt{X}) \leqslant t) = 1$.
Ainsi $h(\sqrt{X})$ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Exercice 3.15.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $U_n = \inf\limits_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. Soit n un entier naturel non nul.

a) Déterminer la loi de U_n.

b) Reconnaître la loi de S_n, puis en donner une densité. Montrer que pour tout $x > 0$

$$P(S_n > x) = \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k x^k}{k!}$$

2. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendante des variables (X_i) et qui suit la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$. On définit S et U par :

$$\text{pour tout } \omega \in \Omega, S(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega) \quad \text{et} \quad U(\omega) = U_{N(\omega)}(\omega).$$

On admet que S et U sont deux variables aléatoires.

a) Montrer que U est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de U.

b) Déterminer la loi de S (on admettra que l'on peut permuter l'ordre des sommations rencontrées).

Solution

1. a) Si $x < 0$, on a $P(U_n \leqslant x) = 0$.

Si $x \geqslant 0$, alors, par indépendance :

$$P(U_n > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x) = (\mathrm{e}^{-\lambda x})^n = \mathrm{e}^{-\lambda n x}$$

Ainsi U_n suit la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

b) On sait que S_n suit la loi $\Gamma\big(\frac{1}{\lambda}, n\big)$. Une densité de S_n est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

On remarque que pour tout $n \geqslant 1$ et $t > 0$, $f'_{n+1}(t) = \lambda f_n(t) - \lambda f_{n+1}(t)$.

Si l'on note F_n la fonction de répartition de S_n, alors, en intégrant l'égalité ci-dessus sur $[0, x]$, il vient :

$$\frac{1}{\lambda} f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_{n+1}(x)$$

On termine par télescopage.

2. a) On utilise le système complet d'événements $(N = n)_{n\geq 1}$. Ainsi, pour $x > 0$ et par indépendance :

$$P(U > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P((U > x) \cap (N = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(U_n > x)P(N = n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} q^n \mathrm{e}^{-n\lambda x} = \frac{p\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\mathrm{e}^{-\lambda x}}.$$

et

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{p\mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - q\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fonction est continue de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0, monotone croissante, et telle que $\lim_{x\to-\infty} F_U(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F_U(x) = 1$, donc U est une variable densité.

b) On agit de la même façon avec S.

$$P(S > x) = \sum_{n=1}^{\infty} P((S > x) \cap (N = n)) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n > x)P(N = k)$$
$$= p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} q^{n-1} = p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} q^{n-1}$$
$$= p\mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \frac{q^k}{1-q} = \mathrm{e}^{-\lambda(1-q)x}$$

Ainsi S suit la loi exponentielle de paramètre λp.

Exercice 3.16.

Soit Y et Z deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, admettant chacune un moment d'ordre 2. On admet alors que l'espérance $E(YZ)$ existe.

1. Montrer que $(E(YZ))^2 \leqslant E(Y^2)E(Z^2)$.

2. Soit X une variable aléatoire ayant un moment d'ordre 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $U = \varepsilon - X + E(X)$. Soit $B = \mathbf{1}_{(U>0)}$ la variable aléatoire indicatrice de l'événement $(U > 0)$.

a) Justifier que l'on a $U \leqslant UB$.

b) A l'aide du résultat de la première question appliqué aux variables aléatoires U et B, montrer l'inégalité :

$$P(X - E(X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

c) Montrer de même que : $P(X - E(X) \leqslant -\varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$.

d) Donner un majorant de $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon)$ et comparer avec le majorant fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution

1. La quantité $E((X+\lambda Y)^2)$ est positive pour tout λ. De plus, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E((X+\lambda Y)^2) = \lambda^2 E(Y^2) + 2\lambda E(XY) + E(X^2)$$

Ce trinôme du second degré reste positif sur $\mathbb{R}$: son discriminant est donc négatif ou nul ce qui se traduit par l'inégalité demandée.

2. a) Pour tout ω tel que $U(\omega) > 0$, on a $U(\omega)B(\omega) = U(\omega)$.
Pour tout ω tel que $U(\omega) \leqslant 0$, on a : $U(\omega)B(\omega) = 0 \geqslant U(\omega)$.

b) En appliquant l'inégalité de la première question aux variables U et B, on obtient :

$$E^2(U) \leqslant E^2(UB) \leqslant E(U^2)E(B^2)$$

Or $E(U) = \varepsilon$ donc $\varepsilon^2 \leqslant E(U^2)E(B^2)$.
Enfin :
• $E(U^2) = \varepsilon^2 + V(X)$.
• $E(B^2) = E(B) = P(U > 0) = P(X - E(X) < \varepsilon)$.
Ainsi $\varepsilon^2 \leqslant (\varepsilon^2 + V(X))P(X - E(X) < \varepsilon)$.
On termine en prenant la probabilité de l'événement contraire.

c) On recommence ce qui précède en remplaçant la variable X par $-X$, et on trouve :

$$P(-X - E(-X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(-X)}{\varepsilon^2 + V(-X)}$$

soit :

$$P(X - E(X) \leqslant -\varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

En ajoutant les inégalités précédentes membre à membre, on trouve :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{2V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

d) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'écrit $P(|X-E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ et on doit donc comparer $\dfrac{2V(X)}{V(X)+\varepsilon^2}$ et $\dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Il suffit de faire la différence :

$$\frac{2V(X)}{V(X)+\varepsilon^2} - \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)(\varepsilon^2 - V(X))}{\varepsilon^2(V(X)+\varepsilon^2)}$$

Le majorant obtenu par la nouvelle inégalité est meilleur (plus petit) que celui fourni par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev si et seulement si $\varepsilon^2 < V(X)$.

Exercice 3.17.

Les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On rappelle que pour tout entier naturel a, il existe un unique entier naturel m et un unique m-uplet $(a_0, \ldots, a_{m-1}) \in [\![0, 9]\!]^m$ tels que $a = \sum_{i=0}^{m-1} a_i 10^i$ et $a_{m-1} \neq 0$. Cette écriture est l'écriture en base 10 de a.

On dispose d'une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher et numérotées de 0 à 9. Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul et $[\![0, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n. L'objectif de cet exercice est de proposer une méthode de simulation d'une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$ à l'aide de cette urne.

1. Montrer qu'il existe un unique entier naturel k tel que $10^{k-1} \leqslant n \leqslant 10^k - 1$.

On effectue k tirages successifs, au hasard et avec remise à chaque fois de la boule obtenue avant le tirage suivant, d'une boule de l'urne.
On note $X_0, \ldots, X_{k-1}$ les variables aléatoires donnant les résultats successifs des tirages. Enfin, on note $N(\omega) = \sum_{i=0}^{k} X_i(\omega) 10^i$.

2. a) Déterminer $N(\Omega)$.
   b) Déterminer la loi de N.
   c) Calculer $E[N]$.

Soit $(N_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de même loi que N.
Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega) = \inf\{i \in \mathbb{N}^\star / N_i(\omega) \in [\![0, n]\!]\}$ lorsque l'ensemble précédent est non vide (si cet ensemble est vide on pose $T(\omega) = 0$).
Enfin, pour tout $\omega \in \Omega$, on note $X(\omega) = N_{T(\omega)}(\omega)$.

3. a) Déterminer la loi de T.
   b) Déterminer la loi de X.

Solution

1. La famille $([10^{k-1}, 10^k - 1[, k \geqslant 1)$ est une partition de $[1, +\infty[$. Ainsi, il existe un unique entier naturel k tel que $10^{k-1} \leqslant n < 10^k - 1$.

2. a) Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $X_i(\omega) \in [\![0, 9]\!]$. Ainsi,

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} X_i(\omega) 10^i \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 9 \cdot 10^i \leqslant 9 \cdot \frac{10^k - 1}{10 - 1} \leqslant 10^k - 1$$

Ainsi, d'après les rappels sur l'écriture décimale des entiers :

$$N(\Omega) = [\![0, 10^k - 1]\!]$$

b) Soit $a \in [\![0, 10^k - 1]\!]$. Notons $a = \sum_{i=0}^{k-1} a_i 10^i$. D'après l'unicité de la décomposition décimale et l'indépendance des lancers,

$P(N = a) = P((X_0 = a_0) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = a_{k-1})) = \prod_{k=0}^{k-1} P(X_i = a_i) = \dfrac{1}{10^k}$

Ainsi, N suit la loi uniforme sur $[\![0, 10^k - 1]\!]$.

c) N suivant la loi uniforme sur $[\![0, 10^k - 1]\!]$, on a :

$$E(N) = \frac{10^k - 1}{2}$$

3. a) La loi de T est la loi du temps d'attente d'un premier succès dans une succession d'épreuves indépendantes. Ainsi, T suit la loi géométrique de paramètre $p = P(N \in [\![0, n]\!]) = \dfrac{n+1}{10^k}$.

b) Soit $a \in [\![0, n]\!]$. Notons $p = 1 - q = \dfrac{n+1}{10^k}$. En utilisant le système complet d'événements $(T = i)_{i \in \mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}P(X = a) = P(N_T = a) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Big(\prod_{j=1}^{i-1} P(N_j \notin [\![0, n]\!])\Big) P(N_i = a)\\ &= \frac{1}{10^k} \sum_{i=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{n+1}{10^k}\Big)^{i-1} = \frac{1}{10^k} \times \frac{1}{\frac{n+1}{10^k}} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi, X suit la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

Exercice 3.18.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Une urne U_1 contient des boules rouges et blanches en proportions respectives $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une urne U_2 contient dix jetons numérotés de 0 à 9.

On effectue des tirages avec remise d'une boule de l'urne U_1 jusqu'à obtenir une boule rouge. On note N la variable aléatoire correspondant au nombre de tirages effectués.

On effectue alors N tirages avec remise d'un jeton de l'urne U_2. L'entier compris entre 0 et 9 issu du k-ième tirage sera noté $Y_k(\omega)$. On forme ainsi un nombre réel de $[0, 1]$ défini par :

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} \frac{Y_k(\omega)}{10^k}$$

(le résultat du k-ième tirage donne donc la k-ième décimale de $X(\omega)$)

1. Déterminer la loi de N.

Un *nombre décimal* de $[0, 1]$ est un réel d de $[0, 1]$ vérifiant : il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^m d \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

2. Montrer que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et que cette inclusion est stricte.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{D}_n$ l'ensemble des décimaux qui s'écrivent sous la forme $0, a_1 a_2 \dots a_n$ où $a_n \neq 0$. Déterminer le cardinal de $\mathbb{D}_n$.

4. a) Calculer $P(X = 0)$.

b) En remarquant que $0{,}375 = 0{,}3750 = 0{,}37500 = \cdots$, montrer que

$$P(X = 0{,}375) = \frac{pq^2}{10^2(10-q)}.$$

c) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $d = 0{,}a_1 \cdots a_n$ un nombre décimal tel que $a_n \neq 0$. Calculer $P(X = d)$.

d) Vérifier que l'on définit bien ainsi une loi de probabilité sur $\mathbb{D}$.

Solution

1. La variable aléatoire N suit la loi géométrique de paramètre p.

2. Soit $d \in \mathbb{D}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $10^m d = r \in \mathbb{N}$. Ainsi, $p = \dfrac{r}{10^m} \in \mathbb{Q}$. On remarque que $1/3 = 0{,}333\cdots$ n'appartient pas à $\mathbb{D}$.

3. Comme $(a_1, \dots, a_n) \in [\![0,9]\!]^{n-1} \times [\![1,9]\!]$, alors $\operatorname{card} \mathbb{D}_n = 9.10^{n-1}$.

4. a) La famille $(N = m)_{m \geq 1}$ étant un système complet d'événements :

$$P(X = 0) = \sum_{m=1}^{\infty} P_{(N=m)}(X = 0) P(N = m) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{p}{10-q}$$

b) Pour obtenir 0,375, alors N doit être au moins égal à 3. Ainsi, en utilisant la remarque et les evénements $(N = m)_{m \geq 3}$:

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} P_{(N=m)}(X = 0{,}375) P(N = m)$$

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} P(Y_1 = 3, Y_2 = 7, Y_3 = 5, Y_4 = 0, \dots, Y_m = 0) pq^{m-1}$$

(si $m = 3$, la liste s'arrête Y_3)

$$P(X = 0{,}375) = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{pq^2}{10^2(10-q)}$$

c) En reprenant le système complet d'événement $(N = m)_{m \geq 1}$, on obtient plus généralement :

$$\begin{aligned} P(X = d) &= \sum_{m=1}^{\infty} P_{(N=m)}(X = d) P(N = m) \\ &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{10^m} pq^{m-1} = \frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)} \end{aligned}$$

d) En utilisant les notations précédentes :

$$\sum_{d\neq 0} P(X=d) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{card}(\mathbb{D}_n)\times\frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)} = \sum_{n=1}^{\infty} 9.10^{n-1}\times\frac{pq^{n-1}}{10^{n-1}(10-q)}$$
$$= \frac{9p}{10-q}\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{9}{9-p}$$

et $\sum\limits_{d\in\mathbb{D}} P(X=d) = 1$.

Exercice 3.19.

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et toutes de même loi uniforme sur $[0,1]$.
On suppose que toutes les variables U_n et V_n (pour $n\in\mathbb{N}^*$) sont indépendantes.

1. Pour tout réel $x\in\,]0,1]$, calculer l'intégrale : $J(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t\,(x-t)}}dt$.

[On pourra justifier et utiliser le changement de variable (à x fixé) :
$$\varphi : \left]-\pi/2,\pi/2\right[\to\mathbb{R}\ ,\theta\mapsto t=\frac{x}{2}\sin\theta+\frac{x}{2}\ ]$$

2. a) Déterminer la loi de U_n^2.

b) Justifier que la variable $U_n^2+V_n^2$ possède une densité h, que l'on exprimera sous forme d'une intégrale.

c) Déterminer $h(x)$ pour $x\in[0,1]$.

3. On pose : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, X_n=\begin{cases}1 & \text{si } U_n^2+V_n^2\leqslant 1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$
Déterminer la loi de X_n.

4. a) Prouver que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, Z_n=\dfrac{4}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, converge en probabilité vers la constante π.

Soit $\alpha\in\,]0,1[$ et $\delta>0$.

b) Montrer qu'il existe un entier n_0, qu'on exprimera en fonction de α et δ, tel que
$$\forall\, n\geq n_0, P(|Z_n-\pi|>\delta)\leqslant\alpha.$$

Solution

1. Si $x\in\,]0,1]$ et $t\in\,]0,x[$, alors $x-t\in\,]0,1[$; l'intégrale est convergente (règle de Riemann).
Effectuons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ bijectif $\varphi : \left]-\pi/2,\pi/2\right[\to\,]0,x[$ défini dans l'énoncé. Comme $\cos\theta\geq 0$, il vient :

$$J(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{\frac{x^2}{4} - (t - \frac{x}{2})^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\frac{x}{2}\cos(\theta)d\theta}{\sqrt{\frac{x^2}{4}(1-\sin^2\theta)}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = \pi.$$

2. a) Pour $z \in]0,1]$, $P(U_n^2 \leq z) = \sqrt{z}$; donc une densité de U_n^2 est :

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \text{ si } z \in]0,1], \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

b) $(U_n^2 + V_n^2)(\Omega) = [0,2]$;

Les variables aléatoires U_n^2 et V_n^2 sont indépendantes de même loi à densité (nulle en dehors de $[0,1]$) donc, par convolution :

$\rightarrow h(z) = 0$ si $[z \leq 0$ ou $z \geq 2]$

$\rightarrow h(z) = \displaystyle\int_0^z f_Z(t) f_Z(z-t)\, dt$ sinon.

c) $0 \leq z \leqslant 1 \implies h(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dt}{4\sqrt{t(z-t)}} = \frac{\pi}{4}.$

3. X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$P(X_n = 1) = P(U_n^2 + V_n^2 \leq 1) = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\, dz = \frac{\pi}{4}$$

4. a) Les variables aléatoires $4X_n$ sont indépendantes, équidistribuées et d'espérance finie, donc d'après la loi faible des grands nombres,$(Z_n)_n$ tend en probabilité vers $E(4X_1) = \pi$.

b) Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff

$$P(|Z_n - \pi| > \delta) \leqslant \frac{V(Z_n)}{\delta^2} = \frac{\pi(4-\pi)}{n\delta^2}, \text{ d'où } n_0 = \left\lceil \frac{\pi(4-\pi)}{\alpha\delta^2} \right\rceil$$

o $\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier au moins égal x.

Exercice 3.20.

Dans cet exercice, N désigne un entier naturel non nul et k un entier naturel fixé supérieur strictement à 2.

On considère une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher.

On pratique dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on arrête les tirages dès qu'on a obtenu k boules consécutives portant le même numéro.

On suppose que l'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'arrêt des tirages (on admet que T est bien une variable aléatoire).

1. a) Donner $T(\Omega)$.

b) Déterminer les valeurs de $P(T=k)$ et $P(T=k+1)$.

c) Donner la valeur de $P(T=k+2)$.

2. a) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{N}$, $(T=m+k)\subset(T>m)$.

b) En déduire que pour tout $m\in\mathbb{N}$, $P(T=m+k)=\dfrac{N-1}{N^k}P(T>m)$.

c) A l'aide de la formule précédente, montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n\geqslant k+1$:

$$P(T=n+1)=P(T=n)-\frac{N-1}{N^k}P(T=n-k+1)$$

3. Compléter le programme suivant pour qu'il simule les tirages décrits précédemment et qu'il calcule et affiche la valeur prise par T.

```
Program escp2014 ;
Var x, y, k, c, N, t : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(k, N) ;
c : = 1 ; t : = 1 ; x : = random(N) + 1 ;
While (c < k) do begin
y : = random(N) + 1 ;
If (y = x) then c : ------ else If (c > 1) then c : = ------ ;
x : = y ;
t : = ------ ;
end ;
Writeln(t) ; end.
```

Solution

1. a) Le premier tirage donnant une boule quelconque (probabilité égale à 1 !), réaliser $(T=k)$ c'est tirer $k-1$ fois consécutivement la même boule que celle tirée en premier.
On a donc, par indépendance : $P(T=k)=\dfrac{1}{N^{k-1}}$.

b) Réaliser $(T=k+1)$, c'est tirer une première boule (probabilité égale à 1), puis une boule différente (probabilité égale à $\dfrac{N-1}{N}$) et tirer ensuite $k-1$ fois de suite la même boule que la deuxième (à chaque fois ceci se produit avec la probabilité $1/N$).
On a donc, par indépendance : $P(T=k+1)=\dfrac{N-1}{N^k}$.

c) Comme $k>2$, on a $P(T=k+2)=\dfrac{N^2(N-1)}{N^{k+2}}=\dfrac{N-1}{N^k}$ (on choisit la boule qui permet de gagner de N façons, cette boule est obtenue du tirage de rang 3 au tirage de rang $k+2$, le tirage de rang 2 a dû amener une autre boule (sinon on s'arrête trop tôt) et le résultat du tirage de rang 1 est quelconque).

2. a) Comme k est strictement positif, on a l'inclusion : $(T = m+k) \subset (T > m)$.

b) On en déduit que $(T = m+k) \cap (T > m) = (T = m+k)$. Par conséquent, on obtient :

$$P(T = m+k) = P_{(T>m)}(T = m+k)P(T > m)$$

Or, par indépendance, on a $P_{(T>m)}(T = m+k) = P(T = k+1)$. En effet, la $(m+1)$-ème boule doit être distincte de la m-ème, puis ensuite, on doit tirer $k-1$ fois la même boule que la $(m+1)$-ème.

Finalement : $P(T = m+k) = \dfrac{N-1}{N^k} P(T > m)$.

c) Pour $m = n-k$ (qui est bien supérieur ou égal à 1), on trouve :

$$P(T = n) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n-k)$$

Pour $m = n+1-k$ (qui est bien supérieur ou égal à 1), on trouve :

$$P(T = n+1) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n+1-k)$$

En soustrayant membre à membre, on a :

$$P(T = n+1) - P(T = n) = \frac{N-1}{N^k} \left(P(T > n+1-k) - P(T > n+1-k)\right)$$

Comme T est à valeurs entières, on obtient :

$$P(T = n+1) - P(T = n) = -\frac{N-1}{N^k} P(T = n+1-k)$$

3.
```
Program escp2014 ; Var x, y, k, c, N, t : integer ;
Begin
Randomize ; Readln(k, N) ;
c : = 1 ; t : = 1 ; x : = random(N) + 1 ;
While (c < k) do
begin
y : = random(N) + 1 ;
If (y = x) then c : = c + 1 else If (c > 1) then c : = 1 ;
x : = y ;
t : = t + 1 ;
end ;
Writeln(t) ;
end.
```

Exercice 3.21.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires. On suppose que la suite (X_n) *converge en loi* vers une variable aléatoire X et que la suite (Y_n) *converge en probabilité* vers une constante θ.

Partie A. On veut montrer dans cette partie que la suite (X_n+Y_n) converge en loi vers $X+\theta$.

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$.
On suppose donc désormais que (Y_n) *converge en probabilité vers* 0.

Soit $\varepsilon > 0$ et x un point de continuité de la fonction de répartition de X.

2. a) En utilisant le système complet d'événements $\{(|Y_n| > \varepsilon), (|Y_n| \leqslant \varepsilon)\}$, montrer que :

$$P(X_n + Y_n \leqslant x) \leqslant P(X_n \leqslant x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$$

b) Montrer de même que $P(X_n \leqslant x - \varepsilon) \leqslant P(X_n + Y_n \leqslant x) + P(|Y_n| > \varepsilon)$.

c) En déduire que $P(X_n \leqslant x-\varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant P(X_n \leqslant x+\varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$.

3. Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.

Partie B. On veut montrer dans cette partie que la suite (X_nY_n) converge en probabilité vers θX.

1. Montrer que l'on peut supposer que $\theta = 0$.
On suppose donc désormais que (Y_n) *converge en probabilité vers* 0.

2. Soit M un réel strictement positif et $\varepsilon > 0$. En utilisant le système complet d'événements $\{(|Y_n| > 1/M), (|Y_n| \leqslant 1/M)\}$, montrer que :

$$P(|X_nY_n| > \varepsilon) \leqslant P(|X_n| > \varepsilon M) + P(|Y_n| > 1/M)$$

3. En utilisant le fait que (Y_n) tend en probabilité vers 0, montrer que (X_nY_n) converge en probabilité vers 0.

Solution

Partie A.

1. On peut supposer $\theta = 0$ en écrivant $X_n + Y_n = (X_n + \theta) + (Y_n - \theta)$ et $(Y_n - \theta)_n$ tend en probabilité vers 0.

2. a) En utilisant le système complet proposé, il vient :

$$P(X_n + Y_n \leqslant x) =$$
$$P((X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| \leqslant \varepsilon)) + P((X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| > \varepsilon))$$
$$P(X_n + Y_n \leqslant x) \leqslant P(X_n \leqslant x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon)$$

En effet :
$(X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| > \varepsilon) \subset (|Y_n| > \varepsilon)$

et
$(X_n + Y_n \leqslant x) \cap (|Y_n| \leqslant \varepsilon) = (X_n \leqslant x - Y_n) \cap (-\varepsilon \leqslant Y_n \leqslant \varepsilon) \subset (X_n \leqslant x + \varepsilon)$

b) Avec le même raisonnement, il vient :

$$P(X_n \leqslant x-\varepsilon) = P((X_n \leqslant x-\varepsilon) \cap (|Y_n| \leqslant \varepsilon)) + P((X_n \leqslant x-\varepsilon) \cap (|Y_n| > \varepsilon))$$

$$P(X_n \leqslant x - \varepsilon) \leqslant P(X_n + Y_n \leqslant x) + P(|Y_n| > \varepsilon)$$

c) Ainsi, par les deux inégalités précédentes :

$$P(X_n \leqslant x-\varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon) \leqslant P(X_n + Y_n \leqslant x) \leqslant P(X_n \leqslant x+\varepsilon) - P(|Y_n| > \varepsilon)$$

3. Pour ε petit, avec $x \pm \varepsilon$ point de continuité de F_X, on sait que :

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \leqslant x \pm \varepsilon) = P(X \leqslant x \pm \varepsilon) \text{ et } \lim_{n\to\infty} P(|Y_n| > \varepsilon) = 0$$

Donc par les inégalités vues en 2. c), $(X_n + Y_n)_n$ converge en loi vers X.

Partie B.

1. On peut supposer $\theta = 0$ en écrivant $X_n Y_n = X_n(Y_n - \theta) + \theta X_n$, car $\lim\limits_{n\to\infty} \theta X_n = \theta X$. Il suffit donc de montrer que $X_n(Y_n - \theta)$ converge en probabilité vers 0 et par la partie précédente que $(X_n Y_n)$ converge en probabilité vers 0.

2. On écrit :

$$P(|X_n Y_n| > \varepsilon) = P((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| > 1/M)) + P((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| \leqslant 1/M))$$

$$\begin{aligned} P(|X_n Y_n| > \varepsilon) &\leqslant P((|X_n Y_n| > \varepsilon) \cap (|Y_n| > 1/M)) + P(|Y_n| \leqslant 1/M) \\ &\leqslant P(|X_n| > \varepsilon M) + P(|Y_n| \leqslant 1/M) \end{aligned}$$

3. Or pour tout M,

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n| \leqslant 1/M) = 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} P(|X_n| > \varepsilon M) = P(|X| > \varepsilon M),$$

cette dernière quantité étant aussi petite que l'on veut si M est grand.

On conclut alors comme dans la partie A.

Exercice 3.22.

On pose, pour tout x réel :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt, \quad \Psi(x) = 1 - \Phi(x)$$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$:

a) $\Psi(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

b) $\dfrac{\Psi(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{e}^{x^2/2} \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2} dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. Résoudre l'équation différentielle $f'(x)-xf(x)=0$, d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

3. Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant : il existe une constante $C>0$ telle que pour tous x,y réels : $|h(x)-h(y)|\leqslant C|x-y|$ (on dit que h est lipschitzienne).
Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

a) Montrer que $E(h(Z))$ existe.

b) Montrer que pour tout y réel : $|h(y)-E(h(Z))|\leqslant C\left(|y|+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$

4. La fonction h étant donnée comme dans la question précédente, on cherche à résoudre l'équation différentielle, d'inconnue $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, f'(x)-xf(x)=E(h(Z))-h(x) \qquad (*)$$

On pose $f_h : x\mapsto \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}(h(t)-E(h(Z)))dt.$

a) Montrer que f_h est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que f_h vérifie l'équation $(*)$ et qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

c) Montrer que $\sup\limits_{x\geq 0}|f_h(x)|\leqslant 2C$.

Solution

1. a) On a, pour $x>0$:

$$\begin{aligned}\Psi(x)&=\int_x^{+\infty}\varphi(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{-t\mathrm{e}^{-t^2/2}}{-t}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{-t}\right]_x^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{t^2}dt\leqslant\frac{\varphi(x)}{x}\end{aligned}$$

b) On étudie la fonction $g : x\to \mathrm{e}^{x^2/2}\displaystyle\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}dt$. Sa dérivée g' vérifie, pour $x>0$:

$$g'(x)=x\Big(\frac{\Psi(x)}{\varphi(x)}-\frac{1}{x}\Big)\leqslant 0$$

ce qui entraîne la décroissance de g sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$g(x)\leqslant g(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dont les solutions sont de la forme $x\mapsto C.\mathrm{e}^{x^2/2}$.

3. a) Si h est lipchitzienne, on a $|h(x) - h(0)| \leqslant C|x| \implies |h(x)| \leqslant C|x| + |h(0)|$. Cela entraîne l'existence de $E(h(X))$, puisque X admet une espérance.

b) Utilisons le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}|h(y) - E(h(Z))| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big|\int_{-\infty}^{+\infty}(h(y) - h(t))\mathrm{e}^{-t^2/2}dt\Big| \\ &\leqslant C\int_{-\infty}^{+\infty}|y - t|\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dt \\ &\leqslant C\Big(|y| + \int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big) = C\big(|y| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)\end{aligned}$$

4. a) La fonction f_h est bien définie par la question précédente et le fait que Z admette une espérance.

b) La fonction f_h est le produit de fonctions dérivables, et :

$$f_h'(x) = xf_h(x) - (h(x) - E(h(Z)))$$

La fonction f_h vérifie donc l'équation différentielle $(*)$.
De plus, par la question 3.

$$|f_h(x)| \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2}C\big(|t| + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)dt$$

Or, par la question 1. b), $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2/2} \leqslant 1,$
et pour $x \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}|t|\mathrm{e}^{-t^2/2}dt = \mathrm{e}^{x^2/2}\int_x^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2/2}dt \leqslant \mathrm{e}^{x^2/2}.\mathrm{e}^{-x^2/2} = 1$$

Donc f_h est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

c) Cette question est évidente, par les deux majorations obtenues ci-dessus.