2

ALGÈBRE

overfullrule=0pt

Exercice 2.01.

Dans tout cet exercice n est un entier naturel non nul, E désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On pose, pour tout $(P, Q) \in E^2$

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\, dt$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit $\mathcal{B} = (B_0, B_1, \ldots, B_n)$, avec pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $B_i(X) = \dfrac{X^i}{i!}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et calculer, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\langle B_i, B_j\rangle$.

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose

$$f_k(t) = t^k \mathrm{e}^{-t} \text{ et } L_k(t) = (-1)^k \frac{f_k^{(k)}(t)}{k!}\mathrm{e}^t$$

où $f_k^{(k)}$ désigne la dérivée $k^{\text{ème}}$ de la fonction f_k.

a) Montrer que L_k est une fonction polynomiale. Déterminer son degré et ses coefficients.

b) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthonormée de E.

c) Écrire la matrice de passage A de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{L}$.

4. Soit T l'application définie sur E par : pour tout $P \in E$, $T(P) = P(X-1)$.

a) Montrer que T est un endomorphisme inversible de E. Déterminer T^{-1}.

b) Écrire la matrice de T dans la base canonique de E et la comparer à A.

Solution :

1. C'est une question standard. L'intégrale existe en raison du peu de poids de e^{-t} en $+\infty$. L'application est bilinéaire symétrique par linéarité de l'intégrale et commutativité du produit polynomial. Elle est positive car $P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ l'est sur $\mathbb{R}^+$ et définie positive car $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est positive continue non identiquement nulle si $P \neq 0$.

2. La famille $(B_0, \dots, B_n)$ de polynômes de E est échelonnée en degrés : elle est libre. De plus elle est de cardinal $n+1 = \dim E$: c'est une base de$E$. Enfin

$$\langle B_i, B_j\rangle = \frac{1}{i!j!}\int_0^{+\infty} t^{i+j}\mathrm{e}^{-t}dt = \frac{(i+j)!}{i!j!}$$

3. a) On calcule $f_k^{(k)}$ à l'aide de la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned} f_k^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k}(t^k\mathrm{e}^{-t}) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{d^j}{dt^j}(t^k)(-1)^{k-j}\mathrm{e}^{-t} \\ &= \Big(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{k!}{(k-j)!}t^{k-j}\Big)\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

Ainsi L_k est-il un polynôme de degré k de coefficient dominant $\dfrac{1}{k!}$, défini par :

$$L_k(t) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\frac{1}{(k-j)!}t^{k-j}$$

b) La famille $\mathcal{L}$ est une base car échelonnée en degré et de cardinal $n+1$. Soit $p < k$. Une intégration par parties (directement avec la borne infinie, car on constate que le passage à la limite est sans histoires) donne :

$$\begin{aligned} \langle L_k, L_p\rangle &= \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k)}(t)L_p(t)dt \\ &= \frac{(-1)^k}{k!}\Big[f_k^{(k-1)}(t)L_p(t)\Big]_0^{\to+\infty} - \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k-1)}(t)L_p'(t)dt \end{aligned}$$

Remarquons que pour $0 \leqslant j < k$

$f_k^{(j)}(t) = \mathrm{e}^{-t}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j}{i}k(k-1)\cdots(k-i+1)t^{k-i}$ et $f_k^{(j)}(0) = 0$, car $k-i > 0$ pour $i \in [\![0, j]\!]$.

Ainsi le crochet de cette intégration par parties est nul en 0, et de limite nulle en $+\infty$, par négligeabilité classique, donc :

$$\langle L_k, L_p\rangle = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(k-1)}(t)L_p'(t)dt$$

En réitérant ce processus, on arrive à :

$$\langle L_k, L_p\rangle = \frac{(-1)^{2k}}{k!}\int_0^{+\infty} f_k^{(0)}(t)L_p^{(k)}(t)dt = 0$$

puisque $p<k$ et que le degré de L_p est égal à p.

Enfin, pour $p=k$, on arrive ainsi à :

$\langle L_k, L_k\rangle = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty} f_k^{(0)}(t)L_k^{(k)}(t)dt = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}dt = 1$ (intégrale de référence du cours de probabilité)

La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{L}$ a comme colonnes les coordonnées des polynômes $L_0, \dots, L_n$ dans la base $(B_0, \dots, B_n)$. Il suffit de se reporter à l'écriture de L_k dans cette base, soit :

$$L_k(t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{(j)!}t^j = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}B_j$$

4. a) L'application T est clairement un endomorphisme de E inversible d'inverse $P \mapsto P(X+1)$.

b) On a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$(X-1)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{k-j}X^j = (-1)^k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^jX^j$$

La matrice associée à T dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est donc obtenue à partir de la matrice A définie dans la question précédente, en multipliant la k-ième colonne par $(-1)^k$, pour tout k.

Exercice 2.02.

Dans cet exercice $E=\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tel que $||u||=1$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ et p la projection orthogonale sur D.

1. Soit $x \in E$.

a) Exprimer $p(x)$ en fonction de u et x.

b) Écrire la matrice P de p dans la base canonique de E.

On note $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de E canoniquement associé à M.

2. Montrer que $\ker f = D$ et $\mathrm{Im}\, f = D^{\perp}$.

3. a) Exprimer M^2 en fonction de P et I.

b) En déduire les valeurs propres de f^2.

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

4. On pose pour tout t réel $g_t = I + (\sin t)f + (1 - \cos t)f^2$.

a) Exprimer f^3 en fonction de f.

b) Calculer $g_t \circ g_{t'}$ pour $(t, t') \in \mathbb{R}^2$.

c) En déduire que pour tout t réel, g_t est bijectif et déterminer son inverse.

Solution :

1. a) On sait que l'on a alors : $p(x) = \langle x, u\rangle u$.

b) En utilisant pour x respectivement e_1, e_2, e_3, il vient $P = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$

2. $\star$ Pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, on a $MX = 0 \iff \begin{cases} -cy + bz = 0 \\ cx - az = 0 \\ -bx + ay = 0 \end{cases}$

Supposons par exemple $a \neq 0$, le système donne alors $y = \dfrac{b}{a}x, z = \dfrac{c}{a}x$ et donc (x, y, z) est colinéaire à (a, b, c). Le résultat est bien entendu le même si on a $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ et comme $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, l'une au moins de ces coordonnées est non nulle. Ainsi

$$\operatorname{Ker} f = D$$

$\star$ Soit $y \in \operatorname{Im} f$, il existe x tel que $y = f(x)$ et la matrice M étant antisymétrique, pour tout $z \in D = \operatorname{Ker} f$, on a, avec des notations évidentes : $\langle z, f(x)\rangle = {}^tZMX = {}^tX{}^tMZ = -{}^tXMZ = -\langle x, f(z)\rangle = 0$. Cela montre que $f(x)$ est orthogonal à z, donc que $\operatorname{Im} f \subseteq D^\perp$.
On termine avec le théorème du rang qui montre que $\dim D^\perp = 2$.

3. a) Après calcul $M^2 = P - I$.

b) Les valeurs propres de M^2 sont celles de P décalées de -1, par conséquent $\mathrm{Sp}(f^2) = \{-1, 0\}$.

c) Si λ est une valeur propre de f, alors λ^2 est une valeur propre de f^2. Donc $\lambda \in \{0, i, -i\}$.
Si f était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, sa seule valeur propre serait 0 et f serait nulle, ce qui est exclu. Donc f est non diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

4. a) On sait que $M^2 = P - I$. En calculant MP, on trouve $M^3 + M = 0$ soit $f^3 + f = 0$

b) En utilisant les formules trigonométriques et $f^3 = -f, f^4 = f^2$, il vient

$$g_t \circ g_{t'} = I + \sin(t + t')f + (1 - \cos(t + t'))f^2 = g_{t+t'}$$

c) Ainsi, comme $g_0 = I$, $(g_t)^{-1} = g_{-t}$.

Exercice 2.03.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note

$$C(M) = \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ telles que } MN = NM\}\,.$$

1. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'ensemble $C(M)$ est un espace vectoriel.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et I_n la matrice identité. Déterminer $C(\lambda I_n)$ et préciser sa dimension.

On note $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré au plus $n-1$.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ des nombres complexes deux-à-deux distincts. On pose :

$$\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n, P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

3. Montrer que l'application φ est bijective.

Dans toute la suite, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice dont les valeurs propres sont $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

4. Soit $B \in C(A)$.

 a) Montrer que tout vecteur propre de A est un vecteur propre de B.

 b) En déduire que B est diagonalisable.

5. En déduire que $C(A) = \{Q(A), Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

Solution :

1. On montre sans difficulté que $C(M)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, car l'application $N \mapsto MN - NM$ est clairement linéaire et $C(M)$ est son noyau.

2. Comme la matrice identité commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors

$$C(\lambda I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \text{ et } \dim C(\lambda I_n) = n^2.$$

3. L'application φ est linéaire.
Montrons que l'application φ est injective :
Soit $P \in \operatorname{Ker} \varphi$. Alors, $\varphi(P) = 0$, soit $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, $P(\lambda_i) = 0$.
Ainsi, P est un polynôme de degré au plus $n-1$ qui possède n racines distincts, donc $P = 0$.

Finalement, φ est injective et $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = \dim \mathbb{C}^n = n$, donc, d'après le théorème du rang, φ est bijective.

4. a) Soit e un vecteur propre de A. Ainsi, il existe $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tel que $Ae = \lambda e$. Comme $B \in C(A)$, alors $A(Be) = B(Ae) = \lambda(Be)$.
Donc $Be \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$. Or, comme les valeurs propres de A sont toutes distinctes, A est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Vect}\{e\}$, et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Be = \mu e$.
De plus, e n'est pas le vecteur nul, donc e est un vecteur propre de B.

b) Comme A est diagonalisable, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de A. D'après la question précédente, la matrice de B dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est également diagonale et A et B sont donc diagonalisables dans une même base.

5. Notons $\mathbb{C}_{n-1}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]\}$.

- Comme A commute avec toutes ses puissances, alors $\mathbb{C}_{n-1}[A] \subset C(A)$.
- Soit $B \in C(A)$. D'après la question précédente, il existe une matrice de changement de base P et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P \text{ et } B = P^{-1} \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P.$$

Or, la fonction φ étant injective, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Q(\lambda_i) = \mu_i$. Finalement, $Q\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\right) = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $Q(A) = B$.
Ainsi : $C(A) = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

Exercice 2.04.

On note I_n la matrice identité d'ordre n. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application **non constante** telle que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B).$$

1. a) Montrer que $\varphi(I_n) = 1$ et $\varphi(0) = 0$.

b) Montrer que si A est inversible, alors $\varphi(A) \neq 0$.

c) Comparer $\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ lorsque A et B sont deux matrices semblables.

2. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que l'application suivante $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ est de classe C^1.

$$\psi : (a, b, c, d) \to \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

a) Calculer $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (*on pourra utiliser* $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.)

b) Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \varphi\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f' = \alpha f$. En déduire une expression de f en fonction de α.

c) Montrer que, pour tout $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, on a : $\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = (\lambda_1\lambda_2)^\alpha$.

d) Calculer $\left|\varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right)\right|$ pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. On revient au cas général (n quelconque). On admet l'existence de matrices $J_0, J_1, \ldots, J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la propriété suivante : une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r \in [\![1, n]\!]$ si et seulement s'il existe $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversibles telles que $A = PJ_rQ$.

a) Pour tout $r \in [\![1, n-1]\!]$ montrer qu'il existe deux matrices A et B de rang r telles que AB soit de rang $r - 1$.

b) En déduire que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\varphi(A) \neq 0$.

Solution :

1. a) Pour toute matrice A telle que $A^2 = A$ (en particulier I_n et 0), on voit que $\varphi(A)$ est solution de l'équation $x^2 = x$ donc vaut 0 ou 1.
Par l'absurde, si on avait $\varphi(I_n) = 0$, alors on aurait

$$\varphi(A) = \varphi(AI_n) = \varphi(A)\varphi(I_n) = 0$$

pour tout A donc l'application φ serait constante (nulle), ce qui est exclu : donc $\varphi(I_n) = 1$.
Par l'absurde, si on avait $\varphi(0) = 1$, alors on aurait

$$\varphi(A) = \varphi(A)\varphi(0) = \varphi(A0) = \varphi(0) = 1$$

pour tout A donc l'application φ serait constante, ce qui est exclu ; donc $\varphi(0) = 0$.

b) Si A inversible alors $1 = \varphi(I_n) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\varphi(A^{-1})$; ainsi $\varphi(A) \neq 0$.

c) Si $A = PBP^{-1}$, alors :

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(PBP^{-1}) = \varphi(P)\varphi(B)\varphi(P^{-1}) = \varphi(P)\varphi(P^{-1})\varphi(B) \\ &= \varphi(PP^{-1}B) = \varphi(B).\end{aligned}$$

2. a) On a

$$\begin{aligned}0 = \varphi(0) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \left[\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right]^2\end{aligned}$$

car $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables. Donc $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$.

b) La fonction f est de classe C^1 comme composée de fonctions C^1. On vérifie facilement que pour tout (x,t), $f(x+t)=f(x)f(t)$.
En dérivant par rapport à x puis en évaluant en $x=0$ on obtient $f'(t)=f'(0)f(t)$.
Comme $f(0)=\varphi(I_n)=1$, en posant $\alpha=f'(0)$ et en résolvant l'équation différentielle, on a :

$$\forall\, t\in\mathbb{R}, f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

c) Les matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\mathrm{e}^t&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont semblables donc :
$\forall\, t\in\mathbb{R},\ \varphi\Big(\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\Big)=\mathrm{e}^{\alpha t}$.
Pour $\lambda_1,\lambda_2>0$, on a donc :

$$\begin{aligned}\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)&=\varphi\left(\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\ln\lambda_1}&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{e}^{\ln\lambda_2}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{e}^{\alpha\ln\lambda_1}\mathrm{e}^{\alpha\ln\lambda_2}\\&=(\lambda_1\lambda_2)^\alpha.\end{aligned}$$

d) Pour $\lambda_1,\lambda_2\neq 0$, comme $\lambda_1^2,\lambda_2^2>0$, d'après le b), on a :

$$\begin{aligned}\left|\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\right|^2&=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}\right)\\&=(\lambda_1^2\lambda_2^2)^\alpha=\big(|\lambda_1\lambda_2|^\alpha\big)^2.\end{aligned}$$

Si $\lambda_2=0$ (et de même si $\lambda_1=0$), d'après le a), on a :

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=0.$$

Finalement (avec la convention $0^\alpha=0$ même si $\alpha\leqslant 0$), on a :

$$\left|\varphi\left(\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)\right|=|\lambda_1\lambda_2|^\alpha.$$

3. a) Il suffit de prendre pour A et B les matrices diagonales – comportant chacune r fois le nombre 1 sur la diagonale et $n-r$ fois le nombre 0 – suivantes ;
$A=\mathrm{diag}(1,\dots,1,0,\dots,0)$, $\quad B=\mathrm{diag}(0,1,\dots,1,0,\dots,0)$.

b) Compte-tenu du 1.b), il suffit de montrer que si A n'est pas inversible, alors $\varphi(A)=0$. D'après la propriété admise au début de la question, on voit que, pour une matrice A de rang r, on a $\varphi(A)\neq 0$ si et seulement si $\varphi(J_r)\neq 0$. Il suffit donc de montrer que $\varphi(J_0)=\cdots=\varphi(J_{n-1})=0$.
Notons r le plus petit entier tel que $\varphi(J_r)\neq 0$ et supposons par l'absurde que $r<n$. Alors d'après la question précédente, il existe A et B de rang r tels que AB est de rang $r-1$. Or ceci est absurde car alors on aurait $0=\varphi(AB)=\varphi(A)\varphi(B)$ avec $\varphi(A)\neq 0$ et $\varphi(B)\neq 0$. D'où le résultat.

Exercice 2.05.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) muni du produit scalaire canonique donné par $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, pour $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

On dit qu'une matrice A, appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_n$ des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}$ et à coefficients réels, est positive si et seulement si elle est symétrique et vérifie la condition suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n,\ \langle Ax, x\rangle \geqslant 0$$

Soient A, B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$, on écrira $A \leqslant B$ si et seulement si la matrice $B - A$ est positive. On admettra qu'une matrice est positive si et seulement si elle est symétrique et a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}_+$.

On rappelle que la forme linéaire tr définie sur $\mathcal{M}_n$ par $\mathrm{tr}(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k}$ avec $M = (m_{i,j})_{0\leq i,j\leq n}$ vérifie $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ pour tout couple de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$.

1. On se place dans $\mathbb{R}^2$ et on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $0 \leqslant A \leqslant B$, mais que l'inégalité $A^2 \leqslant B^2$ est fausse.

b) Vérifier que l'on a $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(B^2)$.

2. Soient A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n$. Montrer que la matrice ${}^tPAP$ est positive et que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}({}^tPAP)$. En déduire que $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle Ae_k, e_k\rangle$ pour toute base orthonormale $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ de $\mathbb{R}^n$.

3. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$. Justifier l'existence d'une base orthonormale $(e_k)_{k=1,\dots,n}$ de vecteurs propres de A. Montrer que $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$ pour toute matrice positive B.

4. Soient A, B, C, D quatre matrices positives de $\mathcal{M}_n$ telles que $A \leqslant B$ et $C \leqslant D$.

a) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathrm{tr}(AC) \leqslant \mathrm{tr}(BC)$.

b) Prouver que $\mathrm{tr}(AC) \leqslant \mathrm{tr}(BD)$. En déduire que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $\mathrm{tr}(A^2) \leqslant \mathrm{tr}(B^2)$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique et ses valeurs propres sont 0 et 1. D'après le critère donné dans l'énoncé, elle est positive. La matrice B est symétrique

et la matrice $B-A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 0 et 2, elle est donc positive. On a donc bien $0\leqslant A\leqslant B$.
Un calcul simple donne $B^2-A^2=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}$.
Ses valeurs propres sont $\lambda_1=3-\sqrt{10}<0$ et $\lambda_2=3+\sqrt{10}>0$. Elle n'est donc pas positive et par conséquent l'inégalité $A^2\leqslant B^2$ est fausse.

2. Si on revient à l'exemple des deux matrices A et B données dans la question 1, on observe que $\operatorname{tr}(A^2)=1\leqslant\operatorname{tr}(B^2)=7$.

3. Soient A une matrice positive de $\mathcal{M}_n$ et P une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n$. Il est clair que la matrice ${}^tPAP$ est symétrique et on a $\langle {}^tPAPu,u\rangle=\langle A(Pu),(Pu)\rangle\geqslant 0$ puisque A est positive.
Le rappel fait montre que $\operatorname{tr}({}^tPAP)=\operatorname{tr}(AP^tP)=\operatorname{tr}(A)$ puisque $P^tP=I$. Comme la matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale, on obtient immédiatement avec l'égalité précédente $\operatorname{tr}(A)=\sum_{k=1}^{n}\langle Ae_k,e_k\rangle$ pour toute base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de $\mathbb{R}^n$.

4. L'existence d'une base orthonormale $(e_k)_{k=1,\ldots,n}$ de vecteurs propres de A est une conséquence directe du cours puisque A est symétrique réelle.
Avec la question 3, on voit que :

$$\operatorname{tr}(AB)=\sum_{k=1}^{n}\langle ABe_k,e_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle Be_k,Ae_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle Be_k,e_k\rangle\geqslant 0$$

car les valeurs propres λ_k de A sont positives et les produits scalaires $\langle Be_k,e_k\rangle$ sont positifs puisque B est positive.

5. a) Comme $B-A$ est positive, on a d'après la question précédente :

$$0\leqslant\operatorname{tr}((A-B)C)=\operatorname{tr}(AC)-\operatorname{tr}(BC)$$

ce qui donne bien l'inégalité souhaitée.

b) De manière analogue, on montre que $\operatorname{tr}(BC)\leqslant\operatorname{tr}(BD)$ et en récapitulant on obtient bien $\operatorname{tr}(AC)\leqslant\operatorname{tr}(BD)$. En posant $C=A$ et $D=B$, on trouve $\operatorname{tr}(A^2)\leqslant\operatorname{tr}(B^2)$ pour tout couple de matrices positives (A,B) vérifiant $0\leqslant A\leqslant B$.

Exercice 2.06.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0,1]$ et E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.

On note N_2 l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant $f(0)=f(1)=0$.

On considère l'application u définie sur N_2 par $\forall\, f\in N_2, u(f)=f''$.

1. Montrer que u est une application linéaire injective de N_2 dans E_0.

2. Soit $g \in E_0$. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt$.

a) Montrer que $G \in E_2$ et exprimer G'' en fonction de g.

b) Montrer que u réalise un isomorphisme de N_2 sur E_0.

c) On note u^{-1} la bijection réciproque de u. Vérifier que pour tout x de $[0,1]$:

$$u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)g(t)\,dt$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales $P \in P_n$ vérifiant $P(0) = P(1) = 0$.

Pour tout entier naturel k et tout réel x, on pose $e_k(x) = x^k$ et $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.
On note $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
On considère enfin l'application linéaire v définie par

$$v(P) = P''$$

a) Montrer que $\mathcal{C} = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de N_{n+2}.

b) Écrire la matrice A de v relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. Montrer que A est inversible.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

d) Expliciter l'inverse de A.

Solution :

1. On commence par remarquer que u est une application linéaire.
Si $f \in N_2$, f'' est continue sur $[0,1]$, donc $u(f) = f'' \in E_0$.
Soit $f \in \ker(u)$. Alors, $f'' = 0$. Il existe donc deux constantes a et b telles que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = ax + b$. Comme $f(0) = f(1) = 0$, on trouve $a = b = 0$. Donc, u est injective.

2. a) Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^x (x-t)g(t)dt + \int_x^1 (t-x)g(t)dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt - \int_1^x tg(t)dt + x\int_1^x g(t)dt\Big) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que la fonction G est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2}(xg(x) + \int_0^x g(t)dt - xg(x) - xg(x) + xg(x) + \int_1^x g(t)dt) \\ &= \frac{1}{2}(\int_0^x g(t)dt + \int_1^x g(t)dt) \end{aligned}$$

Ainsi G' est dérivable sur $[0,1]$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $G''(x) = g(x)$, fonction qui est, par définition, continue sur $[0,1]$. En conclusion, $G \in E_2$ et $G'' = g$.

b) Soit $g \in E_0$. On cherche un antécédent H à g dans N_2.
Posons $H : x \to G(x) + ax + b$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
On remarque que $u(H) = H'' = G'' = g$.
Reste à déterminer a et b pour que H soit dans N_2. Comme G est dans E_2, H est aussi dans E_2. Reste à fixer a et b pour avoir $H(0) = H(1) = 0$, ce qui équivaut à $\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt + b = 0$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)g(t)dt + a + b = 0$.
On trouve $a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)dt$ et $b = -\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$.
Avec ce choix de a et b, on obtient donc une fonction $H \in N_2$ telle que $g = u(H)$. L'application linéaire u, dont nous avons déjà montré l'injectivité, est ainsi surjective et u réalise un isomorphisme de N_2 sur E_0.

c) Soit $g \in E_0$. D'après la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$,
$u^{-1}(g)(x) = G(x) + ax + b$ avec $a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2t-1)g(t)dt$ et $b = -\frac{1}{2}\int_0^1 tg(t)dt$.

3. a) On commence par remarquer que les fonctions f_i appartiennent à N_{n+2}. Comme la famille $\mathcal{C}$ est une famille de polynômes à degrés échelonnés, c'est une famille libre.
Soit $P \in N_{n+2}$, P admet alors 0 et 1 comme racines, ce qui implique qu'il existe un polynôme $Q \in P_n$ tel que pour tout $x \in [0,1]$ $P(x) = x(x-1)Q(x)$. En écrivant $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on obtient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$, ce qui montre que la famille $\mathcal{C}$ est également génératrice de N_{n+2}.

b) On a $v(f_0) = 2e_0$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
$v(f_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)ke_{k-1}$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 6 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -k(k+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & (k+1)(k+2) & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & -n(n+1) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & (n+1)(n+2) \end{pmatrix}$$

La matrice A est une matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale. Donc A est inversible.

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{j=0}^{k} f_j(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} (x^{j+2} - x^{j+1}) = x^{k+2} - x$.

d) On applique les résultats trouvés dans la question 2(c). Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$u^{-1}(e_k)(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)t^k dt + \frac{1}{2}\int_x^1 (t-x)t^k dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t^{k+1}dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)t^k dt.$$

Après calculs, $u^{-1}(e_k)(x) = \dfrac{x^{k+2} - x^k}{(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{(k+1)(k+2)} \sum\limits_{j=0}^{k} f_j(x)$.

D'où : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n(n+1)} & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{(n+1)(n+2)} \end{pmatrix}$

Exercice 2.07.

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3, tel que :

$$f^3 + f = 0.$$

On admet que f possède au moins une valeur propre réelle.

1. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

2. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) \geqslant 1$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$, $x \neq 0$; montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$.

3. Déterminer les valeurs propres de f et les dimensions des sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

4. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Résoudre l'équation $u^2 = f$, où l'inconnue u est un endomorphisme de E.

Solution :

1. Montrons que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = y + z$, avec $(y, z) \in \operatorname{Ker} f \times \operatorname{Ker}(f^2 + id)$ par analyse/synthèse.
Si x possède une telle écriture alors :

$$f^2(x) = f^2(y) + f^2(z) = -z \text{ car } y \in \operatorname{Ker} f \text{ et } z \in \operatorname{Ker}(f^2 + id).$$

donc $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$.
Réciproquement, tout x s'écrit clairement sous la forme : $x = y + z$ avec $z = -f^2(x)$ et $y = x + f^2(x)$ et on a :

$$(f^2 + id)(z) = (-f^4 - f^2)(x) = -f(f^3 + f(x)) = 0 \implies z \in \operatorname{Ker}(f^2 + id)$$

et

$$f(y) = f(x + f^2(x)) = f^3 + f(x) = 0 \implies y \in \operatorname{Ker} f.$$

2. Par l'absurde si $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = 0$, alors $f^2 + id$ est injectif, donc bijectif (dimension finie). En composant la relation $f^3 + f = (f^2 + id) \circ f = 0$ par $(f^2 + id)^{-1}$ on a donc $f = 0$ ce qui est contraire aux hypothèses.

Le vecteur x appartient à $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ par hypothèse ; le vecteur $f(x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ d'après la relation $f^3 + f = 0$. Si $\lambda x + \mu f(x) = 0$, en appliquant f, on a $\lambda f(x) - \mu x = 0$ d'où, par opérations : $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$ car $x \neq 0$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3. Comme $X^3 + X$ est un polynôme annulateur de f qui a pour seule racine réelle 0 et que, par hypothèse, f admet une valeur propre, alors $\lambda = 0$ est la seule valeur propre de f.

En particulier $\operatorname{Ker} f$ est de dimension au moins 1 ; d'après la question 1 on a donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = \dim(E) - \dim \operatorname{Ker} f \leqslant 2$. D'après la question précédente $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) \geqslant 2$ puisque cet espace possède une famille libre de deux vecteurs. Donc $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + id) = 2$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.

0 est la seule valeur propre de f et f n'est pas l'endomorphisme nul, donc f n'est pas diagonalisable.

4. On prend e_1 une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ formée de $e_2 \neq 0$ et $e_3 = f(e_2)$.
Si u vérifie $u^2 = f$, alors $u \circ f = u^3 = f \circ u$. On en déduit que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + id)$ sont stables par u, donc la matrice de u dans la base e_1, e_2, e_3 est de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}.$$

5. On a : $U^2 = A \Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 = 0 \\ a^2 + bc = 0 \\ ad + bd = -1 \\ ac + cd = 1 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases}$.

Donc $\lambda = 0$ et on trouve $U = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.08.

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f, notée $f^{(k)}$, est bornée sur $\mathbb{R}$.

On définit une application u sur E en posant :

$$u(f) = f + f'$$

Pour tout $f \in E$, on pose $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que u est un endomorphisme de E.

2. Pour $g \in E$, on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x - v)dv$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction G.

b) Montrer que la fonction G est bornée sur son domaine de définition.

c) Montrer que la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre G, G' et g. Conclure que G est dans E.

3. a) Montrer que 1 est valeur propre de u.

b) Déterminer le spectre de u. Préciser les sous-espaces propres de u.

4. a) Montrer que u est un automorphisme de E.

b) On note u^{-1} la bijection réciproque de u. Montrer que pour tout $f \in E$,

$$||u^{-1}(f)||_\infty \leqslant ||f||_\infty.$$

5. Soit $g \in E$ une fonction donnée. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une seule fonction $f \in E$ telle que :

$$g = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.$$

Solution :

1. On montre facilement que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. La linéarité de u provient de la

linéarité de la dérivation. De plus, pour tout $f \in E$, $u(f)$ est dans E car pour tout entier k,
$|u(f)^{(k)}| = |f^{(k)} + f^{(k+1)}| \leqslant |f^{(k)}| + |f^{(k+1)}|$, quantité qui est bornée par hypothèse. Ainsi, u est un endomorphisme de E.

2. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $v \in \mathbb{R}^+$, $|\mathrm{e}^{-v}g(x-v)| \leqslant ||g||_\infty \mathrm{e}^{-v}$. Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}dv$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}g(x-v)dv$ est absolument convergente, donc convergente.
Ainsi, la fonction G est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|G(x)| \leqslant ||g||_\infty \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}dv = ||g||_\infty$. La fonction G est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

c) On commence par effectuer dans G le changement de variable $t = x - v$. On obtient alors

$$G(x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t g(t)dt + \mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t g(t)dt.$$

Par conséquent G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall\, x \in \mathbb{R}$:
$G'(x) = \mathrm{e}^{-x}\Big(-\displaystyle\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t g(t)dt + \mathrm{e}^x g(x)\Big) = -G(x) + g(x)$.
On a donc $G' = -G + g$.
La question précédente a prouvé que G est bornée sur $\mathbb{R}$. On montre ensuite par récurrence sur k que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, $G^{(k-1)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $G^{(k)} = -G^{(k-1)} + g^{(k-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. En conclusion, la fonction G est dans E.

3. a) Soit f une fonction constante non nulle. On a bien $f \in E$ et $u(f) = f + f' = f$. Le réel 1 est donc valeur propre de u.

b) Le réel λ est dans le spectre de u si et seulement si il existe une fonction $f \in E \setminus \{0\}$ telle que $u(f) = f + f' = \lambda f$.
On a donc $f' + (1-\lambda)f = 0$. Il existe ainsi un réel k non nul tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{(\lambda-1)x}$. Supposons d'abord que $k > 0$. Si $\lambda > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, ce qui contredit le fait que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Si $\lambda < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ce qui aboutit à la même contradiction.
Donc, $\lambda = 1$. De même si $k < 0$. On en déduit que le spectre de u est contenu dans $\{1\}$. Comme la question précédente a montré que 1 est valeur propre de u, on obtient $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$. On remarque au passage que le sous-espace propre associé à 1 est l'ensemble des fonctions constantes.

4. a) Le fait que 0 ne soit pas une valeur propre de u montre déjà que $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$, donc que u est injectif. Il reste à montrer que u est surjectif

(l'espace n'est pas de dimension finie).
Soit $g \in E$. La question 2. a montré que la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x-v)dv$ est dans E et vérife $u(G) = G + G' = g$. Ceci montre que u est surjectif. Ainsi u est un automorphisme de E.
b) La question précédente montre que $u^{-1} : g \to G$, où G est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} g(x-v)dv$.

Pour tout $g \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|u^{-1}(g)(x)| \leqslant ||g||_\infty \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v} dv = ||g||_\infty$, d'où $||u^{-1}(g)||_\infty \leqslant ||g||_\infty$.

5. Notons D l'endomorphisme défini sur E par $D : f \to f'$. On a donc $u = id_E + D$. Comme id_E et D commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et écrire :
pour tout entier k, $u^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k$.
Comme u est bijectif, u^k l'est aussi. Ainsi, pour tout $g \in E$, il existe une seule fonction $f \in E$ telle que $g = u^k(f) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}$.

Exercice 2.09.

On considère l'espace vectoriel $E = C^0[0,1]$ des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$. Pour f et g appartenant à E, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

1. Vérifier que l'application qui à $(f,g) \in E^2$ associe $\langle f, g \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2. Soient f et g deux fonctions de E.

a) Montrer qu'il existe un réel a et une fonction h dans E qui est orthogonale à g et telle que $f = ag + h$.

b) En déduire que si $|\langle f, g \rangle| = \|f\| \, \|g\|$, alors f et g sont colinéaires.

3. Soit $v_0 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse maintenant à l'ensemble F des fonctions de E qui sont de classe C^2 sur $[0,1]$ et telles que : $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ et $f'(0) = v_0$.

a) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, prouver que

$$v_0 = -\int_0^1 (1-t) f''(t)dt.$$

b) Montrer que $3v_0^2 \leqslant \int_0^1 f''(t)^2 dt$.

4. Montrer qu'il existe une fonction $f \in F$, que l'on déterminera, pour laquelle

$$\int_0^1 f''(t)^2 dt = \min\Big\{\int_0^1 h''(t)^2 dt, h \in F\Big\} = 3v_0^2.$$

5. Soient $(m_0, m_1, v_1) \in \mathbb{R}^3$; on désigne par G l'ensemble des fonctions de E qui sont de classe C^2 sur $[0,1]$ et telles que : $f(0) = m_0$, $f(1) = m_1$ et $f'(0) = v_1$. Trouver la valeur de la quantité suivante

$$\min\Big\{\int_0^1 h''(t)^2 dt, h \in G\Big\}.$$

Solution :

1. La bilinéarité du produit et la linéarité de l'intégration assurent que l'application considérée est bilinéaire. Elle est clairement positive et si $\langle f, f\rangle = 0$, alors la fonction positive et continue f^2 est d'intégrale nulle sur $[0,1]$, elle est donc nécessairement nulle et par suite $f = 0$. On a bien muni E d'un produit scalaire.

2. a) Le premier pas du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, appliqué à la famille (f, g), montre qu'il existe un réel a et une fonction h dans E qui est orthogonale à g et telle que $f = ag + h$.

b) On peut supposer $g \neq 0$. En utilisant la question précédente, on voit que :

$$\|f\|\ \|g\| = |\langle f, g\rangle| = |a|\|g\|^2,$$

d'où $\|f\| = |a|\|g\|$. On en déduit que $|a|^2\|g\|^2 = \|f\|^2 = |a|^2\|g\|^2 + \|h\|^2$, et par suite $\|h\| = 0$ et $h = 0$.

3. a) La formule de Taylor avec reste intégral au point 0 et prise en $x = 1$ nous dit que

$$0 = f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt = v_0 + \int_0^1 (1-t) f''(t) dt.$$

b) L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors que

$$v_0^2 \leqslant \int_0^1 (1-t)^2 dt \times \int_0^1 f''(t)^2 dt = \frac{1}{3}\int_0^1 f''(t)^2 dt.$$

4. Si une telle fonction f existe, c'est que l'on est dans le cas d'égalité pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz ci-dessus. Avec la question 3, on voit que l'on doit chercher f telle que $f'' = a(1-t)$ (et la colinéarité implique évidemment le cas d'égalité). La fonction f est donc de la forme $f(t) = \frac{a}{6}(1-t)^3 + bt + c$ et comme f doit appartenir à F, on trouve finalement $f(t) = \frac{v_0}{2}(t-1)t(t-2)$.

5. On cherche évidemment à se ramener à F pour obtenir ce minimum. L'application :

$$f \longmapsto g : t \mapsto f(t) - m_0 + (m_0 - m_1)t$$

envoie bijectivement G sur F si l'on pose $v_0 = v_1 + m_0 - m_1$. On a donc

$$\begin{aligned}\min\{\int_0^1 f''(t)^2 dt, f \in G\}\\ &= \min\{\int_0^1 g''(t)^2 dt; g(0) = 0, g(1) = 0 \text{ et } g'(0) = v_1 + m_0 - m_1\}\\ &= 3[v_1 + m_0 - m_1]^2, \text{ d'après le résultat de la question 4.}\end{aligned}$$

Exercice 2.10.

1. Montrer l'existence de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} dx$.

2. a) Déterminer un réel $C > 0$ tel que : $\forall\, k > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-kx}}{\mathrm{e}^x - 1} dx \leqslant \frac{C}{k}$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-px} dx$.

c) En déduire que $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

Dans la suite on désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont les éléments sont les fonctions réelles φ définies et continues sur $[1, +\infty[$ telles que l'on ait : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\times\varphi(x) = 0$.

3. Pour $\varphi \in E$, montrer la convergence de l'intégrale : $T(\varphi) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y} dy$.

Montrer que l'application T ainsi définie est une forme linéaire sur E.

4. Vérifier que la fonction G définie par :

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est un élément de E. Que vaut $T(G)$? (on pourra faire le changement de variable $t = \ln x$)

5. À toute fonction $\varphi \in E$ on associe la fonction : $U(\varphi) = T(\varphi).G$

Montrer que l'application U ainsi définie est un endomorphisme de E dont on précisera l'image et les éléments propres, c'est-à-dire les couples $(\lambda, \varphi) \in \mathbb{R} \times (E \setminus \{0\})$ tels que $U(\varphi) = \lambda\varphi$.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

En $+\infty$: $0 \leqslant \dfrac{x}{e^x-1} \sim \dfrac{x}{e^x} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$. Donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ converge.

2. a) On montre facilement que $\forall\, x > 0, \dfrac{x}{e^x-1} < 1$, et donc :

$$\int_0^A \frac{xe^{-kx}}{e^x-1}dx \leqslant \int_0^A e^{-kx}dx = \frac{1}{k}[1-e^{-Ak}] \leqslant \frac{1}{k}$$

Et, par prolongement des inégalités à la limite, on peut prendre $C = 1$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties on obtient :

$\displaystyle\int_0^A xe^{-px}dx = -\frac{Ae^{-pA}}{p} - \big(\frac{e^{-pA}}{p^2} - \frac{1}{p^2}\big)$, et :

$$\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx = \frac{1}{p^2}$$

c) Soit $x > 0$, par l'identité géométrique : $\dfrac{x}{e^x-1} = \displaystyle\sum_{p=1}^{k} xe^{-px} + \frac{xe^{-kx}}{e^x-1}$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \sum_{p=1}^{k}\int_0^{+\infty} xe^{-px}dx + \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-kx}}{e^x-1}dx$

et $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2} + \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-kx}}{e^x-1}dx$ donne $|I - \displaystyle\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p^2}| = \int_0^{+\infty}\frac{xe^{-kx}}{e^x-1}dx \leqslant \frac{1}{k}$

On en déduit, en passant à la limite $I = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^2}$ $\big(= \dfrac{\pi^2}{6}\big)$

3. Soit $\varphi \in E$. Alors $y \mapsto \dfrac{\varphi(y)}{y}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et

$$\lim_{y\to+\infty} y^{\frac{3}{2}}\frac{\varphi(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty}\sqrt{y}\varphi(y) = 0$$

donc $y^{\frac{3}{2}}\dfrac{\varphi(y)}{y} < 1$ pour y assez grand, d'où la convergence absolue de l'intégrale par comparaison Riemannienne.

D'autre part : $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = \lambda\int_1^{+\infty}\frac{\varphi_1(y)}{y}dy + \int_1^{+\infty}\frac{\varphi_2(y)}{y}dy = \lambda.T(\varphi_1) + T(\varphi_2)$$

L'application T est donc une forme linéaire sur E.

4. La fonction G est continue sur $[1, +\infty[$ (car $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$) et est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}G(x) = 0$ donc $G \in E$. On a, grâce au changement de variable $t = \ln x$:

$$T(G) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x(x-1)} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} dt = I$$

5. $\star$ $G \in E \implies U(\varphi) = T(\varphi)G \in E$
$\star$ $U(\lambda\varphi_1 + \varphi_2) = T(\lambda\varphi_1 + \varphi_2).G = \lambda T(\varphi_1).G + T(\varphi_2).G = \lambda.U(\varphi_1) + U(\varphi_2)$
Donc U est un endomorphisme de E.

$\star$ $\mathrm{Im}(U) \subset \mathrm{Vect}(G)$ et $U(G) = T(G)G = I.G \implies \mathrm{Vect}(G) \subset \mathrm{Im}(U)$. D'où : $\mathrm{Im}(U) = \mathrm{Vect}(G)$

$\star$ Soit φ un vecteur propre associé à la valeur propre λ :
$U(\varphi) = \lambda.\varphi \implies T(\varphi)G = \lambda.\varphi \implies T(\varphi)U(G) = \lambda.U(\varphi)$
$\implies T(\varphi)T(G)G = \lambda T(\varphi).G \implies T(\varphi)[T(G) - \lambda]G = 0$
Ainsi : $\lambda = T(G) = I$ et $E_I = \mathrm{Vect}(G)$, ou $T(\varphi) = 0$ et $E_0 = \mathrm{Ker}(U) = \mathrm{Ker}(T)$.

Exercice 2.11.

Soit un entier $n \geqslant 2$ et E l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit u l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)$.

1. a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

c) Montrer que la famille $((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E. Déterminer les sous-espaces propres de u.

2. Soit F l'espace vectoriel des fonctions réelles infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

a) Exprimer $\varphi^n(x)$ en fonction de n, où φ^n désigne la $n^{\text{ème}}$ composée de φ avec elle-même.

b) Pour λ réel, on pose $F_\lambda = \{f \in F / f \circ \varphi = \lambda f\}$.
Montrer que pour tout $f \in F_\lambda$, la suite $(f \circ \varphi^n)_n$ est convergente.

c) En déduire que si $|\lambda| > 1$ ou si $\lambda = -1$, on a : $F_\lambda = \{0\}$. De même pour F_0.

d) Montrer que si $f \in F_\lambda$, alors $f^{(k)} \in F_{2^k\lambda}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire F_λ.

Solution :

1. a) L'application u est manifestement linéaire et préserve le degré de P : c'est un endomorphisme de E.

b) On remarque que $u(1) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$u(X^k) = \big(\frac{X+1}{2}\big)^k = \frac{1}{2^k}X^k + \cdots.$$
Ainsi la matrice associée à u dans la base canonique de E est-elle triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^n}$. Ce sont les valeurs propres de u qui est diagonalisable car admettant $n+1$ valeurs propres distinctes.

c) On a $u((X-1)^k) = \frac{1}{2^k}(X-1)^k$; le sous-espace propre associé à $\frac{1}{2^k}$, qui est une droite, est ainsi engendré par $(X-1)^k$.

2. a) On montre par récurrence que $\varphi^n(x) = \frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}$ (arithmético-géométrie).

b) Soit f telle que $f \circ \varphi = \lambda f$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f \circ \varphi^n = \lambda^n f$, soit :
$$f\big(\frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}\big) = \lambda^n f(x)$$
La fonction f étant continue : $\lim\limits_{n \to +\infty} f\big(\frac{x}{2^n} + 1 - \frac{1}{2^n}\big) = f(1)$.

c) Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda^n f(x) = f(1)$. Ceci n'est pas possible si $|\lambda| > 1$, ou si $\lambda = -1$ et si x est tel que $f(x) \neq 0$. Si $\lambda = 0$, on a $f\big(\frac{x+1}{2}\big) = 0$, soit $f(t) = 0$ pour tout t réel. Donc pour avoir $F_\lambda \neq \{0\}$, il faut avoir $\lambda \in \,]-1, 1] \setminus \{0\}$

d) Supposons $f \circ \varphi = \lambda f$. Les fonctions en jeu étant de classe C^∞, il vient, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{2^n} f^{(n)} \circ \varphi = \lambda f^{(n)}$.

Ainsi $f^{(n)} \in F_{2^n \lambda}$. Or, pour $\lambda \neq 0$, pour p assez grand, on a : $2^p|\lambda| > 1$. Ainsi pour p assez grand $f^{(p)} = 0$ et f est polynomiale. On est ramené à la première question (si P est une fonction polynôme, on choisit n assez grand pour que E contienne le polynôme P associé).

Les F_λ différents de $\{0\}$ sont les $F_{1/2^n}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et chaque $F_{1/2^n}$ est de dimension 1, engendré par $x \mapsto (x-1)^n$.

Exercice 2.12.

1. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :
$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$$
où $||\ ||$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $||x|| > M$, on a : $f(x) > |f(0)| + 1$.

b) En déduire qu'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, f(x^*) \leqslant f(x)$.

c) On suppose de plus que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\nabla f(x^*) = 0$.

On s'intéresse dans la suite de l'exercice à la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$$

où A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On suppose également que la matrice A vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x\rangle \geqslant C||x||^2$$

où C est une constante strictement positive.

2. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^n$ et vérifie $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que f appartient à $C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\nabla f(x) = Ax - b$.

En déduire que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$, atteint en un point noté x^*.

3. Soit α un réel strictement positif et soit $(u_p)_{p\geq 0}$ la suite vectorielle définie par $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $p \geqslant 0$

$$u_{p+1} = u_p - \alpha\nabla f(u_p)$$

a) Montrer que pour tout $p \geqslant 0$, $u_{p+1} - x^* = (I_n - \alpha A)(u_p - x^*)$.

b) Soit λ la plus grande valeur propre de A. On suppose que $\alpha \in\ ]0, 2/\lambda[$. Montrer que la suite $(u_p)_p$ converge vers x^*, c'est-à-dire que $\lim\limits_{p\to+\infty} ||u_p - x^*|| = 0$.

Solution :

1. a) Comme $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $||x|| > M$, on a : $f(x) > |f(0)| + 1$.

b) La boule $\overline{B}(0, M)$ est fermée bornée. La fonction f restreinte à $\overline{B}(0, M)$ est continue : elle est donc minorée et atteint son min : il existe $x^* \in \overline{B}(0, M)$ tel que $f(x^*) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in \overline{B}(0, M)$. En particulier $f(x^*) \leqslant f(0)$. Par la question précédente, f admet en x^* un minimum global sur $\mathbb{R}^n$.

c) Lorsque f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^n$, on sait que les extremums possibles (locaux ou globaux) ne peuvent être atteints qu'aux points critiques.

2. a) La fonction f est continue car c'est un polynôme en $(x_1, \ldots, x_n)$. En effet :

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j-\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$$

De plus $\forall x\in\mathbb{R}^n, \langle Ax,x\rangle\geqslant C||x||^2$ et $\langle b,x\rangle\leqslant\|b\|\|x\|$ entraînent que $\lim\limits_{||x||\to+\infty}f(x)=+\infty$.

b) Le calcul donne, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\frac{1}{2}\times 2\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}x_k-b_i$$

Ainsi : $\nabla f(x)=\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1,k}x_k-b_1,\dots,\sum\limits_{k=1}^{n}a_{n,k}x_k-b_n\Big)=Ax-b$

On aurait aussi pu chercher directement le DL à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=\frac{1}{2}(\langle Ah,x\rangle+\langle Ax,h\rangle)+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle-\langle b,h\rangle\\&=\langle Ax-b,h\rangle+\frac{1}{2}\langle Ah,h\rangle\end{aligned}$$

Et on a : $||\langle Ah,h\rangle||\leqslant C||h||^2$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On en déduit que f admet un minimum global atteint en un point critique qui est x^* par la question précédente.

On remarquera que la matrice A est inversible, puisque si (λ,x) est un couple propre de A, on a : $\lambda||x||^2=\langle Ax,x\rangle\geqslant C||x||^2$, donc $\lambda\neq 0$.

3. a) Le vecteur x^* vérifie $\nabla f(x^*)=Ax^*-b=0$. Ainsi

$$u_{p+1}=u_p-\alpha(Au_p-b)=(I-\alpha A)u_p+\alpha b$$

et

$$\begin{aligned}u_{p+1}-x^*&=(I-\alpha A)u_p+\alpha b-x^*=(I-\alpha A)u_p+(\alpha A-I)x^*\\&=(I-\alpha A)(u_p-x^*)\end{aligned}$$

b) Par une récurrence immédiate, pour tout $p\geqslant 1$, $u_p-x^*=(I-\alpha A)^p(u_0-x^*)$.

La matrice $I-\alpha A$ est symétrique réelle et donc diagonalisable *via* une base orthonormée de vecteurs propres. Ses valeurs propres sont $1-\alpha\lambda_i$, avec λ_i valeur propre de A. or

$$|1-\alpha\lambda_i|<1\iff 0<\alpha\lambda_i<2$$

ce qui est l'hypothèse faite sur α. Donc $\lim\limits_{p\to+\infty}(I-\alpha A)^p(u_0-x^*)=0$ (en se plaçant dans une base de diagonalisation).

Exercice 2.13.

Soit E et F deux espaces euclidiens et f un élément de $\mathcal{L}(E,F)$.

1. a) Montrer que $\dim(\operatorname{Ker}f)^\perp=\dim\operatorname{Im}f$.

b) Montrer que $\dim(f((\operatorname{Ker}f)^\perp))=\dim((\operatorname{Ker}f)^\perp)$ puis que

$$F=f((\operatorname{Ker}f)^\perp)\oplus(\operatorname{Im}f)^\perp$$

c) En déduire l'existence d'une application de F vers E qui a $y \in F$ fait correspondre $x \in E$ défini par :

$$y = f(x) + y', (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}.$$

On note g l'application ainsi définie.

d) Montrer que l'application g est linéaire. Déterminer son noyau et son image.

2. Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

3. Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

4. Pour $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$ munis de leurs produits scalaires usuels, la matrice d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ dans les bases canoniques, est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

Solution :

1. a) Comme $\dim(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$, il s'agit simplement du théorème du rang.

b) $f[(\operatorname{Ker} f)^{\perp}] \cap (\operatorname{Im} f)^{\perp} \subset (\operatorname{Im} f) \cap (\operatorname{Im} f)^{\perp} = \{0_F\}$.

Puis :

$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im} f)^{\perp} &= \dim F - \dim(\operatorname{Im} f) = \dim F - (\dim E - \dim(\operatorname{Ker} f)) \\ &= \dim F - \dim(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \dim F - \dim[f(\operatorname{Ker} f)^{\perp}], \text{ donc} \end{aligned}$$

$$F = f((\operatorname{Ker} f)^{\perp}) \oplus (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

c) Pour tout y de F, il existe un couple unique (y_1, y') dans $f((\operatorname{Ker} f)^{\perp}) \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ tel que : $y = y_1 + y'$. La restriction de f à $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ étant bijective de cet espace sur son image, il existe un seul $x \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ tel que : $y_1 = f(x)$. On définit ainsi une application de F vers E qui à $y \in F$ fait correspondre $x \in E$.

d) Soient $y_1, y_2 \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + y_1' \\ y_2 = f(x_2) + y_2' \end{cases} \implies \lambda y_1 + \mu y_2 = f(\lambda x_1 + \mu x_2) + (\lambda y_1' + \mu y_2')$$

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) + y_1' \\ y_2 = f(x_2) + y_2' \end{cases} \implies g(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda x_1 + \mu x_2 = \lambda g(x_1) + \mu g(x_2),$$

donc g est linéaire.

2. On montre que $\operatorname{Ker}(g) = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$:

$\star$ $g(y) = 0 \implies x = 0 \implies y = f(0) + y' = y' \in (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

$\star$ Réciproquement, $y \in (\operatorname{Im} f)^{\perp} \implies y = 0_F + y \implies g(y) = 0$

On montre que $\operatorname{Im}(g) = (\operatorname{Ker} f)^\perp$:

$\star$ Par définition $\operatorname{Im}(g) \subset (\operatorname{Ker} f)^\perp$.

$\star$ Réciproquement, $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \implies f(x) = f(x) + 0_F \implies x = g[f(x)]$.

Et $x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \implies f(x) = f(x) + 0_F \implies x = g[f(x)]$
$x \in \operatorname{Ker} f \implies f(x) = 0_F \implies g \circ f(x) = 0_E$
donc :

$$g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal de } E \text{ sur } (\operatorname{Ker} f)^\perp.$$

3. Si $y \in \operatorname{Im} f$, alors : $y = f[g(y)] + y' \implies y' = y - f[g(y)] \in (\operatorname{Im} f)^\perp \cap \operatorname{Im} f$
$\implies y' = 0_F \implies f \circ g(y) = y$
Si $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ alors $y = 0_F + y = f(0_E) + y \implies g(y) = 0_F \implies f \circ g(y) = 0_E$
donc

$$f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal de } F \text{ sur } \operatorname{Im} f.$$

4. On a $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1, -1, 1)\}$ et $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ est le plan d'équation : $x - y + z = 0$.
Ainsi $\operatorname{rg}(A) = 2$ et $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$, donc $(\operatorname{Im} f)^\perp = \{(0, 0)\}$.

On note $u = (1, -1, 1)$.
Soit $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$; on cherche $x = (x_1, x_2, x_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = g(y)$, soit

$$\begin{cases} x \in (\operatorname{Ker} f)^\perp \\ y - f(x) \in (\operatorname{Im} f)^\perp \end{cases} \implies \begin{cases} \langle x, u \rangle = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}(2y_1 - y_2) \\ x_2 = \dfrac{1}{3}(y_1 + y_2) \\ x_3 = \dfrac{1}{3}(-y_1 + 2y_2) \end{cases} \implies M_g = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.14.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit f un endomorphisme non nul de E tel que $f \neq \lambda.id$, où id est l'endomorphisme identité de E.

1. a) Montrer que f admet un polynôme annulateur unitaire de degré minimal m qu'on notera m_f et appelé polynôme minimal de f.

b) Montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $m_f(\lambda) = 0$.

2. On suppose que m_f n'admet aucune racine réelle.

a) Montrer que m_f est divisible par un polynôme à coefficients réels de degré 2 de la forme $X^2 + bX + c$.

b) On pose $\Phi = f^2 + b.f + c.id$. Montrer que $\operatorname{Ker} \Phi \neq \{0\}$.

c) En déduire qu'il existe un plan vectoriel stable par f.

3. On suppose que $m_f = (X-\lambda)^m$, où $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = f - \lambda id$.
   a) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(g^{m-2}(x), g^{m-1}(x))$ est libre.
   b) En déduire un plan stable par f.

4. Montrer que, dans tous les cas, f admet un plan stable.

Solution :

1. a) Tout endomorphisme f de E admet un polynôme annulateur, car si E est de dimension n, la famille $(id, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est de cardinal n^2+1 donc de cardinal supérieur à $\dim \mathcal{L}(E)$ et est liée. Une relation de liaison détermine alors un polynôme annulateur.
Notons $\mathcal{D} = \{\deg P, P(f) = 0\}$. L'ensemble $\mathcal{D}$ est non vide inclus dans $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément d, avec $d \geqslant 2$ (car $f \neq \lambda.id$). Il existe donc un polynôme annulateur de degré minimal. Quitte à diviser par son coefficient dominant, il existe m_f unitaire et annulateur de degré minimal.

b) Soit (λ, x) un couple propre de f. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$ et $0 = m_f(f)(x) = m_f(\lambda)x$. Comme $x \neq 0$, $m_f(\lambda) = 0$.

Réciproquement, on factorise m_f sur $\mathbb{C}$ sous la forme $m_f(X) = \prod_{i=1}^{p} (X-\lambda_i)^{m_i}$.
Si λ_1 n'est pas valeur propre de f, l'endomorphisme $(f-\lambda_1 id)$ est inversible tout comme $(f-\lambda_1 id)^{m_1}$. En multipliant $m_f(f)$ par son inverse, on trouve un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à celui de m_f : contradiction.

2. a) Les racines de m_f sont complexes conjuguées deux à deux et avec la même multiplicité puisque m_f est un polynôme réel. Donc si z est racine de m_f, $\overline{z}$ également et m_f se factorise par $(X-z)(X-\overline{z}) = X^2 - 2\,\text{Ré}(z)X + |z|^2$.

b) La factorisation de m_f est de la forme $\prod_{i=1}^{q} (X^2 + b_i X + c_i)^{m_i}$. Un raisonnement identique à celui de la question précédente montre que pour chaque $i \in [\![1, q]\!]$, $f^2 + b_i f + c_i id$ n'est pas inversible.

c) Soit $x \in \text{Ker}(f^2 + bf + c\,id)$. La famille $(x, f(x))$ est libre (car autrement f admettrait une valeur propre réelle, donc m_f une racine réelle), et engendre un plan stable par f car $f^2(x) = -bf(x) - cx$.

3. a) L'endomorphisme g est nilpotent puisque $0 = m_f(f) = g^m$. Comme m_f est le polynôme minimal de f, $g^{m-1} \neq 0$ et il existe $x \in E$ tel que $g^{m-1}(x) \neq 0$.
La famille $(g^{m-2}(x), g^{m-1}(x))$ est libre. En effet, en appliquant g :

$\lambda g^{m-2}(x) + \mu g^{m-1}(x) = 0 \implies \lambda g^{m-1}(x) = 0 \implies \lambda = 0 \implies \mu = 0$

b) Elle engendre un plan stable par g, donc par f puisque $f = g + \lambda id$.

4. Soit m_f le polynôme minimal de f.
- si m_f n'a aucune racine réelle, voir la question 2.
- si m_f admet une unique racine réelle α, voir question 3.
- si m_f admet une deuxième racine réelle, on prend un vecteur propre pour chaque et on obtient un plan stable.

Exercice 2.15.

Soit $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_{N-1}$, des réels strictement positifs. On pose

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ldots & a_{N-2} \\ a_{N-2} & a_{N-1} & \ldots & a_{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

1. Exprimer A en fonction des puissances de J.

2. Soit θ un réel. Soit $V = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i\theta} \\ \mathrm{e}^{2i\theta} \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{Ni\theta} \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^N. En déduire les valeurs propres possibles de J.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que V soit vecteur propre de J associé à la valeur propre $\mathrm{e}^{i\theta}$.

c) Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$.

d) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

3. On suppose dans cette question que $\sum\limits_{i=0}^{N-1} a_i = 1$

a) Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module inférieur ou égal à 1.

c) Montrer que si λ est valeur propre de A et $|\lambda| = 1$, alors $\lambda = 1$.

Solution :

1. On a facilement, par décalage des vecteurs de base : $A = \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_k J^k$.

2. a) La matrice J est « circulante ». Il vient $J^N = I$ et les valeurs propres possibles de J sont les racines du polynôme $X^n - 1$, soit les racines $N^{\text{èmes}}$ de l'unité.

b) Le calcul montre que $JV = \begin{pmatrix} e^{2i\theta} \\ e^{3i\theta} \\ \vdots \\ e^{Ni\theta} \\ e^{i\theta} \end{pmatrix}$.

Si JV est colinéaire à V, le coefficient de proportionnalité vaut $e^{i\theta}$ et $JV = e^{i\theta}V$ si et seulement si $e^{i\theta} = e^{i(N+1)\theta}$ ce qui équivaut à $N\theta \equiv 0[2\pi]$, *i.e.* $\theta = \dfrac{2k\pi}{N}$ avec $0 \leqslant k \leqslant N-1$.

Ainsi, V est vecteur propre de J associé à la valeur propre $e^{i\theta}$ si et seulement si il existe $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $\theta = \dfrac{2k\pi}{N}$.

c) On a ainsi trouvé N valeurs propres distinctes pour J, ce qui montre que J est diagonalisable.

Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ et $V_k = \begin{pmatrix} e^{i\theta_k} \\ e^{2i\theta_k} \\ \vdots \\ e^{Ni\theta_k} \end{pmatrix}$.

Les questions précédentes montrent que la famille $(V_k)_{0\leq k\leq N-1}$ forme une base de vecteurs propres de J.

d) De plus, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, $AV_k = \sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j J^j(V_k) = (\sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j e^{ij\theta_k})V_k$

La matrice A est donc elle aussi diagonalisable dans la base de diagonalisation $(V_k)_{0\leq k\leq N-1}$ de J. De plus, $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_k\}_{0\leq k\leq N-1}$, où $\lambda_k = \sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j e^{i\frac{2jk\pi}{N}}$.

2. a) La matrice A est donc stochastique. On sait alors que 1 est valeur propre de A associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On sait que $\lambda = \sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j e^{2ij\pi/N}$. Ainsi $|\lambda| \leqslant \sum\limits_{j=0}^{N-1} |a_j e^{2ij\pi/N}| = \sum\limits_{j=0}^{N-1} a_j = 1$.

c) On suppose que $AV = \lambda V$ et $|\lambda| = 1$. On a alors

$$|\lambda - a_0||x_k| \leqslant |x_k| \sum_{j\neq 0} |a_j| = |x_k|(1 - a_0)$$

Ainsi λ appartient au disque centré en $a_0 > 0$ et de rayon $1 - a_0$, disque intérieur au disque unité et tangent à celui-ci au point 1. Donc $\lambda = 1$.

Exercice 2.16.

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire usuel : $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$.

On note φ l'application qui, à toute fonction $f \in E$ associe la fonction F définie par :

$$\forall\, x \in [0,1]\,,\, \big[\varphi(f)\big]\,(x) = F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. Vérifier que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.

2. Montrer qu'il existe une unique application $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que

$$\forall\,(f,g) \in E^2\,,\, \langle \varphi(f), g\rangle = \langle f, \psi(g)\rangle$$

On note $T = \varphi \circ \psi$.

On appelle *vecteur propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$, toute fonction $g \in E$, autre que la fonction nulle, telle que $T(g) = \lambda\, g$.

On appelle *espace propre* de T associé à la *valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions $g \in E$ telles que $T(g) = \lambda\, g$.

Un réel λ est *valeur propre* de T s'il existe un vecteur propre associé à λ.

3. a) Justifier que 0 n'est pas valeur propre de T.

b) Montrer que si $g \in E$ est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda \neq 0$, alors

$$\forall\, t \in [0,1]\,,\, \lambda\, g''(t) + g(t) = 0 \quad (1)$$

4. Pour $\lambda \neq 0$, on admet que l'ensemble des fonctions *réelles* définies, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, vérifiant (1) est un espace vectoriel réel G_λ de dimension 2.

a) Déterminer à l'aide de fonctions exponentielles $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha\, t}\,, \alpha \in \mathbb{C}$, une base de G_λ.

b) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Solution :

1. La fonction $\varphi(f) \in \mathcal{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ comme primitive de fonction continue ; de plus φ est linéaire par linéarité de l'intégration.

2. Par intégration par parties de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur un segment et $F(0) = 0$, on a, si ψ existe :

$$\int_0^1 f\,\psi(g) = \langle \varphi(f), g\rangle = \int_0^1 Fg = \big[F\,G\big]_0^1 - \int_0^1 fG = \int_0^1 f(t)[G(1) - G(t)]dt$$

On prend donc $\psi(g) : t \mapsto G(1) - G(t) = \displaystyle\int_t^1 g(u)\,du$, et la linéarité de ψ est claire.

Si ψ_1 et ψ_2 conviennent, on doit avoir $\displaystyle\int_0^1 f(\psi_1(g) - \psi_2(g)) = 0$ et ceci pour toute fonction f, donc en particulier pour $f = \psi_1(g) - \psi_2(g)$ et $(\psi_1(g) - \psi_2(g))^2$ est la fonction nulle, ceci pour tout g, *i.e.* $\psi_1 = \psi_2$ et l'unicité attendue.

3. a) On écrit :

$$\begin{aligned} T(g) = 0 &\Longleftrightarrow \forall\, x \in [0,1], \int_0^x \Big(\int_t^1 g(u)du\Big)dt = 0 \\ &\Longrightarrow \forall\, x \in [0,1], \int_x^1 g(u)du = 0 \text{ (par dérivation)} \\ &\Longrightarrow \forall\, x \in [0,1], -g(x) = 0 \text{ (encore par dérivation), donc } g = 0 \text{ et} \end{aligned}$$

0 n'est pas valeur propre de T.

b) Pour $\lambda \neq 0$, $T(g) = \lambda\, g$ donne $\forall\, x \in [0,1], g(x) = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^x \Big(\int_t^1 g(u)du\Big)dt$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$, d'où (1) par deux dérivations comme en a).

4. a) $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}$ vérifie (1) si et seulement si $\lambda\alpha^2 + 1 = 0$.

• si $\lambda < 0$, $t \mapsto \exp\big(t/\sqrt{-\lambda}\big)$ et $t \mapsto \exp\big(-t/\sqrt{-\lambda}\big)$ forment une base de G_λ.

• si $\lambda > 0$, $t \mapsto \cos\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$ et $t \mapsto \sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$ forment une base de G_λ.

b) Si $T(g) = \lambda g$, la formule vue en 3. b) montre que $g(0) = 0$ et en dérivant que $g'(1) = 0$. Ainsi :

• si $\lambda < 0$, on voit que les conditions imposent $g(t) = 0$;

• si $\lambda > 0$, les conditions imposent $g(t) = B\sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$, avec $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ (pour réaliser $g'(1) = 0$.

On vérifie que ces fonctions sont bien propres et on conclut :
les valeurs propres de T sont $\lambda \in \Big\{\big(\frac{\pi}{2} + k\pi\big)^{-2}, k \in \mathbb{N}\Big\}$ et les vecteurs propres associés sont les applications $t \mapsto B\sin\big(t/\sqrt{\lambda}\big)$.

Exercice 2.17.

Dans cet exercice, E désigne un espace euclidien, $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire sur E et $||\ ||$ la norme euclidienne associée.

1. Soit p un projecteur orthogonal de E. Montrer que :

a) p est un endomorphisme symétrique, *i.e.* vérifie :
$$\forall\, x, y \in E, \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle).$$

b) Pour tout $x \in E$, $||p(x)|| \leqslant ||x||$.

c) Pour tout $x \in E$, $\langle p(x), x\rangle \geqslant 0$.

2. Soit p_1, p_2 deux projecteurs orthogonaux non nuls et différents de l'identité. On pose $u = p_1 \circ p_2 \circ p_1$.
Montrer que u est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

3. On pose $F = \mathrm{Im}(p_1)$.

a) Montrer que F est stable par $p_1 \circ p_2$.

b) On note v l'endomorphisme de F induit par $p_1 \circ p_2$. Montrer que v est diagonalisable et que ses valeurs propres appartiennent à l'intervalle $[0, 1]$.

Solution :

1. L'endomorphisme p est un projecteur orthogonal, donc $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus^{\perp} \mathrm{Im}\, p$.

a) On écrit $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ avec $(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$ et $(y_1, y_2) \in \mathrm{Ker}\, p \times \mathrm{Im}\, p$.
Alors : $\langle p(x), y\rangle = \langle x_2, y_2\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$||p(x)||^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle p^2(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle \leqslant ||p(x)||\ ||x||$, donc :
$$||p(x)|| \leqslant ||x||$$

c) Par la question a) ci-dessus $\langle p(x), x\rangle = \langle x_2, x_2\rangle \geqslant 0$

2. On remarque que u est un endomorphisme symétrique puisque
$$\langle p_1p_2p_1(x), y\rangle = \langle p_2p_1(x), p_1(y)\rangle = \langle p_1(x), p_2p_1(y)\rangle = \langle x, p_1p_2p_1(y)\rangle$$
donc est diagonalisable.

Soit (λ, x) un couple propre de u. Alors
$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle p_1p_2p_1(x), x\rangle = \langle p_2p_1(x), p_1(x)\rangle \geqslant 0$$
par la question 1.c. Donc $\lambda \geqslant 0$.
De plus, par la question 1.b. et le fait que λ soit positif,
$$\lambda||x|| = ||u(x)|| = ||p_1p_2p_1(x)|| \leqslant ||p_2p_1(x)|| \leqslant ||p_1(x)|| \leqslant ||x|| \implies \lambda \leqslant 1$$

3. a) Comme $F = \mathrm{Im}\, p_1$, alors F est stable par $p_1 \circ p_2$.

b) Soit v la restriction de $p_1 \circ p_2$ à F. Alors, pour $(x, y) \in F^2$
$$\begin{aligned}\langle v(x), y\rangle &= \langle v(p_1(x)), p_1(y)\rangle = \langle p_1p_2(p_1(x)), p_1(y)\rangle \\ &= \langle p_2(p_1(x)), p_1^2(y)\rangle = \langle p_2(p_1(x)), p_1(y)\rangle \\ &= \langle p_1(x), p_2p_1(y)\rangle = \langle p_1(x), p_1p_2p_1(y)\rangle \\ &= \langle x, p_1p_2(y)\rangle = \langle x, v(y)\rangle\end{aligned}$$

Ceci montre que v est un endomorphisme symétrique de F donc diagonalisable.

Soit (λ, x) un couple propre de v, avec $x = p_1(x)$. Alors
$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle v(x), x\rangle = \langle p_1p_2(p_1(x)), p_1(x)\rangle \geqslant 0$$
par la question 1.c. Donc $\lambda \geqslant 0$.

De plus, par la question 1.b et le fait que λ soit positif,
$$\lambda||x|| = ||v(x)|| = ||p_1p_2(x)|| \leqslant ||p_1(x)|| \leqslant ||x|| \implies \lambda \leqslant 1$$

Exercice 2.18.

Dans tout l'exercice, on considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^p$, muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. La norme d'un vecteur u est notée $\|u\|$.

1. Dans cette question, on considère n vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de $\mathbb{R}^p$, de norme 1.

À tout $n-$uplet $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, où, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, x_j est dans $\{-1, 1\}$, on associe le vecteur v_x de $\mathbb{R}^p$ défini par : $v_x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k u_k$.

On se propose de montrer qu'il existe des $n-$uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $\|v_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et des $n-$uplets $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tels que $\|v_y\| \geqslant \sqrt{n}$.

À cet effet on considère n variables aléatoires indépendantes $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, définies sur le même espace espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On pose alors, pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = \| \sum\limits_{j=1}^{n} X_j(\omega) u_j\|^2$ et on admet que X est une variable aléatoire.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, l'espérance $E(X_iX_j)$.

b) Calculer $E(X)$.

c) Conclure.

2. Dans cette question, on considère n vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\|v_j\| \leqslant 1$ et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des réels appartenant à $[0, 1]$. On pose $w = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k v_k$.

On se propose de montrer qu'il existe un $n-$uplet $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'éléments de $\{0, 1\}$ tel que si on note v le vecteur défini par $v = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k v_k$, on alors l'inégalité suivante : $\|w - v\| \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

À cet effet, on considère n variables aléatoires indépendantes $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, Y_j suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_j)$.

On pose alors $V = \sum_{k=1}^{n} Y_k v_k$ et $Y = \|w - V\|^2$. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a) Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]$, $E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right]$.

b) En déduire que $E(Y) \leqslant \frac{n}{4}$.

c) Conclure.

Solution :

1. a) Comme les variables sont indépendantes, on a si $i \neq j$,
$$E(X_i X_j) = E(X_i)E(X_j).$$
Comme les variables sont centrées, on en déduit que si $i \neq j$, alors $E(X_i X_j) = 0$.
En revanche, pour $i = j$, on a $X_i^2 = 1$ et donc : $E(X_i^2) = 1$.

b) En développant X, on obtient : $X = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle X_i X_j$ et, par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(X) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, u_j \rangle E(X_i X_j)$.
En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :
$E(X) = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|^2 E(X_j^2)$. Finalement, $E(X) = n$.

c) Si la variable X ne prenait que des valeurs toutes strictement plus grandes que n, on aurait $E(X) > n$ et de même, si X ne prenait que des valeurs toutes strictement plus petites que n, on aurait $E(X) < n$. Comme $E(X) = n$, on en déduit que X prend des valeurs inférieures ou égales à n et des valeurs supérieures ou égales à n.
Il existe donc un ω_1 tel que $X(\omega_1) \geq n$ et un ω_2 tel que $X(\omega_2) \leq n$.
Il existe donc bien un x tel que $\|v_x\| \leqslant \sqrt{n}$ et un y tel que $\|v_y\| \geqslant \sqrt{n}$.

2. a) $\star$ Si $i \neq j$, comme les variables Y_i et Y_j sont indépendantes, les variables $Y_i - p_i$ et $Y_j - p_j$ sont indépendantes.
On a donc $E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right] = E(Y_i - p_i)E(Y_j - p_j)$.
Or, comme $E(Y_k) = p_k$, on a $E(Y_j - p_j) = 0$.
Conclusion :
$$\forall\, i \neq j,\ E\left[(p_i - Y_i)(p_j - Y_j)\right] = 0$$
$\star$ Si $i = j$, $E((Y_i - p_i)^2)$ n'est autre que la variance de Y_i qui vaut $p_i(1 - p_i)$.

b) On a $Y = \left\| \sum_{k=1}^{n} (p_i - Y_i)v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle (p_i - Y_i)(p_j - Y_j)$.

On en déduit : $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j \rangle E((p_i - Y_i)(p_j - Y_j))$.

En appliquant le résultat de la question précédente, on a donc :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)\|v_i\|^2$$

Il est bien connu que $p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4}$ et comme $\|v_i\|^2 \leq 1$, on a donc bien finalement : $E(Y) \leq \frac{n}{4}$.

c) Un raisonnement analogue à celui fait précédemment montre que Y prend des valeurs inférieures ou égales à $\frac{n}{4}$. Il existe bien des scalaires $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tels que $\|w-v\| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}$.

Exercice 2.19.

Dans cet exercice, on considère un entier naturel $n \geqslant 2$.
On appelle *spectre* réel (respectivement complexe) d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles (respectivement complexes).
On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n$ à spectre positif, c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont réelles positives.

1. a) Soit $S \in \mathcal{S}_n$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+ \iff \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geqslant 0$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $S = {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+$.

c) Réciproquement, montrer que pour toute matrice $S \in \mathcal{S}_n^+$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

2. Soit U et V deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si 0 est valeur propre de UV, alors 0 est aussi valeur propre de VU.

b) Montrer que les matrices UV et VU ont même spectre complexe.

3. a) Soit S et T deux matrices de $\mathcal{S}_n^+$. Montrer que $S + T \in \mathcal{S}_n^+$.

b) $\mathcal{S}_n^+$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}_n$?

4. Soit S et T deux matrices de $\mathcal{S}_n$.

a) La matrice ST est-elle symétrique ?

b) À quelle condition nécessaire et suffisante sur S et T a-t-on ST symétrique ?

c) On suppose que S et T appartiennent à $\mathcal{S}_n^+$. En utilisant les questions 1. c et 2. b, montrer que toutes les valeurs propres de la matrice ST sont réelles et positives.

Solution :

1. a) « $\Longrightarrow$ » Par hypothèse il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $S = {}^tPDP$, avec $\forall\ i\ ,\ \lambda_i \geq 0$.

Alors $\forall\ X, {}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, y_i^2 \geq 0$, où les (y_i) sont les coordonnées de $Y = PX$.

« $\Longleftarrow$ » Par hypothèse, pour X vecteur propre de S associé à λ, on a :

$0 \leqslant {}^tXSX = \lambda\, {}^tXX = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, d'où, comme $X \neq 0$, $\lambda \geqslant 0$.

b) ${}^tS = S$ et $\forall\ X\ ,\ {}^tXSX = {}^t(AX)(AX) = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \geqslant 0$, où les (y_i) sont les coordonnées de $Y = AX$.

c) On diagonalise S comme en a) ; on pose $\Delta = \operatorname{diag}\big(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\big)$, et on a $S = {}^tP\Delta^2P = {}^tP^t\Delta\Delta P$, d'où $A = \Delta P$ convient.

2. a) $0 \in \operatorname{Sp}(UV) \implies UV \notin GL_n(\mathbb{R}) \implies U$ ou V non inversibles (par contraposée) donc VU non inversible car $\dim\big(\operatorname{Im}(VU)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im}(U)\big)$ et $\dim\big(\operatorname{Im}(VU)\big) \leqslant \dim\big(\operatorname{Im}(V)\big)$.

b) S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$, tels que $UVX = \lambda\, X$, alors $VX \neq 0$ et $VU(VX) = \lambda VX$ prouve que $\lambda \in \operatorname{Sp}(VU)$. On conclut par symétrie et 2. a.

3. a) On a ${}^t(S+T) = S+T$ et $\forall\ X, {}^tX(S+T)X = {}^tXSX + {}^tXTX \geq 0$, par conséquent $S+T \in \mathcal{S}_n^+$ d'après 1. a.

b) Non, car $\lambda\, S \notin \mathcal{S}_n^+$ si $\lambda < 0$.

4. a) Non. Par exemple : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^+$ et

$$ST = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_n.$$

b) $ST \in \mathcal{S}_n \iff {}^t(ST) = ST \iff {}^tT\,{}^tS = ST \iff TS = ST$, *i.e.* si et seulement S et T commutent.

c) Il existe $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $ST = {}^tAA\,{}^tBB$ qui a le même spectre complexe que $B^tAA^tB = {}^t\big(A^tB\big)\, A^tB \in \mathcal{S}_n^+$, donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(ST) \subseteq \mathbb{R}_+$.

N.B. ST est à spectre réel positif bien qu'elle ne soit pas forcément symétrique.