Pile je gagne, face tu perds

par Arnaud Bégyn

Professeur en BCPST au Lycée Ozenne de Toulouse

RÉSUMÉ. *Nous présentons quelques méthodes élémentaires d'étude de temps d'attente dans le jeu de pile ou face ; l'objectif principal étant de donner une preuve de l'algorithme de Conway (voir [2]) qui permet de prédire l'issue de l'affrontement entre deux joueurs qui misent chacun sur une séquence donnée. L'origine de ce problème est le paradoxe de Penney [4]. On présente ici une preuve élémentaire des résultats de l'article [1], en s'appuyant sur les preuves de [5].*

MOTS-CLÉS : *Jeu de Pile ou Face - Temps d'attente - Fonctions génératrices*

Dans tout l'article $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par les cylindres et $\mathbb{P}$ désigne l'unique probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que :

- les lancers de pièce sont effectués de manière indépendante,
- à un lancer quelconque, la probabilité d'avoir « pile » est $p \in]0,1[$, et celle d'avoir « face » est $q = 1 - p$.

On dira que la pièce est *équilibrée* lorsque $p = q = \dfrac{1}{2}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera P_k l'événement « le k-ième lancer donne pile » et F_k l'événement « le k-ième lancer donne face ». On montre facilement que :

- n'importe quelle séquence m apparaît presque sûrement ;
- son temps d'attente X (*ie* le numéro du lancer où m apparaît pour la première fois) est une variable aléatoire réelle discrète (VARD dans la suite) qui admet des moments de tout ordre (et donc une espérance et une variance).

Pour cela, on note ℓ la longueur de la séquence m et k le nombre de lettres « pile » qu'elle contient. On découpe la suite de lancers en bloc disjoints de ℓ lancers consécutifs, et on note Y la VARD égale au numéro du bloc qui donne m pour la première fois.

Il suffit de remarquer que $0 \leqslant X \leqslant \ell Y$ et que Y suit la loi $\mathcal{G}\big(p^k q^{\ell-k}\big)$ pour conclure. Avec le lemme de Borel-Cantelli, on peut améliorer ce résultat : la séquence m apparaît presque sûrement *une infinité* de fois !

1. Temps d'attente de PP

On considère la VARD X égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir le mot « PP » pour la première fois. Procédons par analyse à un pas par rapport au premier lancer. La formule des probabilités totales donne :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(X = n+1) = \mathbb{P}\big(P_1 \cap (X = n+1)\big) + \mathbb{P}\big(F_1 \cap (X = n+1)\big)$$

Notons A_n l'évenement « aux cours des lancers 3 à $n+1$, la séquence « PP » apparaît pour la première fois aux lancers n et $n+1$ ». Alors $P_1 \cap (X = n+1) = P_1 \cap F_1 \cap A_n$ et comme les lancers sont indépendants : $\mathbb{P}\big(P_1 \cap (X = n+1)\big) = pq\mathbb{P}(A_n)$. Nous admettrons que $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X = n-1)$, résultat qui nécessite la théorie des chaînes de Markov pour être démontré.

De même $\mathbb{P}\big(F_1 \cap (X = n+1)\big) = q\mathbb{P}(X = n)$. On a donc :

$$\forall n \geqslant 3, \quad \mathbb{P}(X = n+1) = pq\mathbb{P}(X = n-1) + q\mathbb{P}(X = n)$$

et on remarque que cette formule est valable aussi pour $n = 2$.

On multiplie par t^{n+1} et on somme pour $n \geqslant 2$. En notant G la fonction génératrice de X on obtient :

$$\forall t \in [-1,1], \quad G(t) - p^2t^2 = pqt^2G(t) + qtG(t)$$

et donc :

$$\forall t \in [-1,1], \quad G(t) = \frac{p^2t^2}{1 - qt - pqt^2}$$

Pour en déduire sans trop de calculs l'espérance et la variance de X, nous allons présenter une astuce de calcul sur les fonctions génératrices.

On se donne une fonction F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telle que $F(1) = 1$. C'est par exemple le cas si F est la fonction génératrice d'une VARD X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et admettant une variance.

Appelons alors *moyenne de* F le réel $\text{moy}(F) = F'(1)$, et *variance de* F le réel $\text{var}(F) = F''(1) + F'(1) - F'(1)^2$. Bien évidemment, si F est la fonction génératrice d'une VARD X à valeurs dans $\mathbb{N}$, celle-ci admet alors une espérance et une variance, respectivement égales aux deux réels précédents.

Le résultat qui nous intéresse est le suivant : si G vérifie les mêmes hypothèses que F, alors leur produit $H = F \times G$ les vérifie aussi, et un simple calcul de dérivée donne :

$$\text{moy}(F) + \text{moy}(G) = \text{moy}(H) \quad \text{et} \quad \text{var}(F) + \text{var}(G) = \text{var}(H).$$

D'une certaine façon, on vient de généraliser les formules usuelles sur l'espérance et la variance d'une somme de deux VARD indépendantes. L'intérêt est que le calcul de l'espérance et de la variance de G, peut être remplacé par les mêmes calculs effectués avec F et H.

On utilisera souvent dans cet article l'exemple canonique $H(t) = t^k$, où $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $\text{moy}(H) = k$ et $\text{var}(H) = 0$. En effet, H est la fonction génératrice d'une variable aléatoire presque sûrement égale à k.

Revenons à l'exemple de la VARD X égale au temps d'attente de « PP ». On définit $F(t) = \dfrac{1 - qt - pqt^2}{p^2}$; F est $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$, $F(1) = 1$ et on a :

$$\text{moy}(F) = -\frac{q}{p^2} - \frac{2q}{p} = 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \qquad \text{et} \qquad \text{var}(F) = -2\frac{q}{p} + \text{moy}(F) - \text{moy}(F)^2$$

Comme $F(t) \times G(t) = t^2$ on trouve facilement :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{p^4} + \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

ce qui donne 6 et 22 pour une pièce équilibrée.

2. Temps d'attente d'une séquence quelconque

2.1. *Fonction génératrice du temps d'attente d'un mot quelconque*

On se donne un mot m fini et non vide, formé uniquement des lettres F et P. On notera ℓ sa longueur, c'est-à-dire le nombre de lettres qui le composent. X est la VARD égale au temps d'attente du mot m, c'est-à-dire au numéro du lancer où se forme le mot m pour la première fois. Introduisons quelques notations. Pour $k \in [\![1, \ell]\!]$:

- $m^{(k)}$ désigne le mot formé des k dernières lettres de m et $m_{(k)}$ le mot formé des k premières lettres de m ;
- $\mathbf{1}_{m^{(k)}=m_{(k)}}$ est égal à 1 si les k dernières lettres de m coincident avec les k premières, et égal à 0 sinon.

Remarquons que $m^{(\ell)} = m_{(\ell)} = m$ et donc $\mathbf{1}_{m^{(\ell)}=m_{(\ell)}}$ vaut toujours 1. On note aussi :

- α la probabilité d'apparition de m sur ℓ lancers consécutifs ;
- pour $k \in [\![1, \ell]\!]$, $\alpha^{(k)}$ la probabilité d'apparition de $m^{(k)}$ sur k lancers consécutifs ;

Remarquons que $\alpha^{(\ell)} = \alpha$. Par convention on pose $\alpha^{(0)} = 1$.

Cette fois, l'analyse à un pas ne permet plus de conclure car les mots peuvent être formés de plus de deux lettres. Nous renvoyons à l'article [7], où la fonction génératrice de X est calculée avec des outils élémentaires, dans un cadre plus général où les mots peuvent être formés à partir de n'importe quel alphabet. Dans notre cas, on obtient :

$$\forall t \in [-1,1], \quad G(t) = \frac{\alpha . t^\ell}{\alpha . t^\ell + (1-t).\sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha^{(k)} . \mathbf{1}_{m^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}} . t^k}.$$

Explicitons cette formule sur le cas $m =$« FPFFP ». On compare le mot « FPFFP » avec lui-même décalé une ou plusieurs fois sur la gauche, et on compare les parties communes afin de déterminer les quantités $\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & F & P & F & F & P \\ & & & F & P & F & F & P & \\ & & F & P & F & F & P & & \\ & F & P & F & \mathbf{F} & \mathbf{P} & & & \\ F & P & F & F & P & & & & \end{array}$$

On remarque que les parties communes ne sont égales qu'à l'avant dernière ligne. On en déduit que :

- $\ell = 5$;
- $\mathbf{1}_{m^{(1)} = m_{(1)}} = \mathbf{1}_{m^{(3)} = m_{(3)}} = \mathbf{1}_{m^{(4)} = m_{(4)}} = 0$;
- $\mathbf{1}_{m^{(2)} = m_{(2)}} = \mathbf{1}_{m^{(5)} = m_{(5)}} = 1$;
- $\alpha^{(0)} = 1$, $\alpha^{(1)} = p$, $\alpha^{(2)} = qp$, $\alpha^{(3)} = q^2 p$, $\alpha^{(4)} = q^2 p^2$ et $\alpha^{(5)} = q^3 p^2 = \alpha$.

Donc : $\forall t \in [-1,1], \quad G(t) = \dfrac{q^3 p^2 t^5}{q^3 p^2 t^5 + (1-t)\big(1 + q^2 p t^3\big)}$.

2.2. *Espérance et variance du temps d'attente d'un mot quelconque*

L'existence de ces quantités a été justifiée dans l'introduction. On utilise la technique présentée dans le cas de la séquence « PP ». On pose :

$$F(t) = t^\ell + \frac{1}{\alpha}(1-t). \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha^{(k)} . \mathbf{1}_{m^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}} . t^k$$

de sorte que $F(t)G(t) = t^\ell$. On a :

$$F'(1) = \ell - \frac{1}{\alpha}. \sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha^{(k)} . \mathbf{1}_{m^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}}$$

donc $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} \alpha^{(k)}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$. De même :

$$F''(1) = \ell(\ell-1) - 2\frac{1}{\alpha}\sum_{k=0}^{\ell-1} k\alpha^{(k)}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$$

donc : $V(X) = \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1}\big(2(\ell-k)-1\big)\alpha^{(k)}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$.

Pour la séquence « FPFFP », on trouve :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{q^3p^2}\big(1+q^2p\big) = \frac{1}{q^3p^2} + \frac{1}{qp}$$

et :

$$V(X) = \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - \frac{1}{q^3p^2}\big(9+3q^2p\big) = \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 - \frac{9}{q^3p^2} - \frac{3}{qp}$$

2.3. *Cas d'une pièce équilibrée*

On va désormais se focaliser sur le cas d'une pièce équilibrée : $p = q = \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas $\alpha = \dfrac{1}{2^\ell}$ et $\alpha^{(k)} = \dfrac{1}{2^k}$. On trouve donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in [-1,1], \quad G(t) &= \frac{t^\ell}{t^\ell + (1-t).\displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{\ell-k}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}.t^k} \\ &= \frac{t^\ell}{t^\ell + (1-t).\displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} 2^{k}.\mathbf{1}_{m^{(k)}=m_{(k)}}.t^{\ell-k}}\end{aligned}$$

Et : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{\ell-k}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$. On introduit alors le nombre :

$$\text{cle}(m,m) = \sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{\ell-k}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$$

dont la notation sera justifiée plus loin. Il a la particularité de se calculer très simplement :

- on écrit le nombre, puis lui-même juste en-dessous, et ensuite on l'écrit encore mais décalé d'une lettre sur la gauche, ceci répété jusqu'à l'avoir décalé $\ell - 1$ fois ;

- à chaque fois on regarde si les parties communes coincident et dans ce cas on note 1, et sinon on note 0 (remarquer que la première comparaison se fait entre m et m, et donne donc toujours 1) ;
- on obtient un nombre binaire, qui, une fois transformé en base 10, est égal à cle(m, m).

L'espérance de X est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 2.\text{cle}(m, m)}$$

Si on teste sur l'exemple de « FPFFP » :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & F & P & F & F & P & \\
 & & & & \mathbf{F} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & \mathbf{F} & \mathbf{P} & 1 \\
 & & & F & P & F & F & P & & 0 \\
 & & F & P & F & F & P & & & 0 \\
 & F & P & F & \mathbf{F} & \mathbf{P} & & & & 1 \\
F & P & F & F & P & & & & & 0
\end{array}$$

on a cle$(m, m) = \overline{10010}^2 = 1.2^4 + 1.2^1 = 18$ et donc $\mathbb{E}(X) = 36$.

Pour finir remarquons que cle(m, m) est maximal lorsque :

$$\forall k \in [\![0, \ell - 1]\!], \quad \mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} = 1$$

c'est-à-dire lorsque la séquence m n'est composée que de P ou que de F. Ainsi ce sont les séquences les plus répétitives qui sont les plus longues à obtenir (voir [6]).

3. Affrontement de deux joueurs et algorithme de Conway

Dans toute cette section, on supposera la pièce équilibrée. Nous allons nous intéresser à l'affrontement de deux joueurs qui misent chacun sur une séquence.

3.1. *Un cas particulier*

Alice et Bill décident que lorsque la séquence « PPF » apparaît alors Alice gagne, et que lorsque la séquence « FPP » apparaît c'est Bill qui gagne.

S'ils jouent chacun de leur côté avec leur propre pièce équilibrée, les VARD égales au temps d'attente de « PPF » et de « FPP » ont la même fonction génératrice :

$$\forall t \in [-1, 1], \quad G(t) = \frac{t^3}{t^3 - 8(t - 1)}$$

et ont donc la même loi. Dans ce cas, personne n'a l'avantage.

Ils décident alors de lancer tous les deux la même pièce ; c'est alors celui qui voit sa séquence apparaître en premier qui remporte le jeu. Comme on sait que la séquence concaténée « PPFFPP » apparaît presque sûrement (une infinité de fois), ce jeu va s'arrêter presque sûrement en un nombre fini de tours.

Notons X_A (resp. X_B) la VARD égale au numéro du lancer à l'issue duquel Alice (resp. Bill) est déclarée gagnant(e), si cela se produit, et à $+\infty$ si ce n'est pas Alice (resp. Bill) qui est déclaré gagnant(e). La durée du jeu est alors la VARD T définie par $T = \min(X_A, X_B)$ et on sait que $\mathbb{P}(T < +\infty) = 1$.

On souhaite déterminer la probabilité que Alice gagne et la probabilité que Bill gagne, c'est-à-dire les quantités $\pi_A = \mathbb{P}(X_A < +\infty)$ et $\pi_B = \mathbb{P}(X_B < +\infty)$.

Remarquons que :

$$(X_A < +\infty) \cup (X_B < +\infty) = (T < +\infty)$$

et donc $\pi_A + \pi_B = 1$.

Comparons cette fois les mots « PPF » et « FPP », en décalant le second plusieurs fois d'une unité sur la gauche, et en comparant les parties communes :

$$\begin{array}{ccccc} & & P & P & F \\ & & F & P & P \\ & F & \mathbf{P} & \mathbf{P} & \\ F & P & \mathbf{P} & & \end{array}$$

On remarque que les parties communes ne sont égales qu'aux deux dernières lignes.

Pour $n \in \mathbb{N}$, l'événement $(Y \geqslant n+1) \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}$ peut donc correspondre à la victoire d'Alice au lancer $n+3$, ou encore à celle de Bill aux lancers $n+1$ ou $n+2$:

$$\begin{aligned} &(Y \geqslant n+1) \cap P_{n+1} \cap P_{n+2} \cap F_{n+3} \\ &\quad = (X_A = n+3) \cup \Big((X_B = n+2) \cap F_{n+3}\Big) \cup \Big((X_B = n+1) \cap P_{n+2} \cap F_{n+3}\Big) \end{aligned}$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{8}\mathbb{P}(Y \geqslant n+1) = \mathbb{P}(X_A = n+3) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_B = n+2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_B = n+1).$$

On compare ensuite « FPP » avec « PPF » :

$$\begin{array}{ccccc} & & F & P & P \\ & & P & P & F \\ & P & P & F & \\ P & P & \mathbf{F} & & \end{array}$$

On remarque que seule la dernière ligne donne coincidence. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(Y \geqslant n+1) \cap F_{n+1} \cap P_{n+2} \cap Pn+3 = (X_B = n+3) \cup \Big((X_A = n+1) \cap P_{n+2} \cap P_{n+3}\Big)$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{8}\mathbb{P}(Y \geqslant n+1) = \mathbb{P}(X_B = n+3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1)$$

Par soustraction, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X_A = n+3) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_B = n+2) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_B = n+1)$$
$$= \mathbb{P}(X_B = n+3) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_A = n+1)$$

puis en sommant pour $n = 0 \cdots + \infty$:

$$\pi_A + \frac{1}{2}\pi_B + \frac{1}{4}\pi_B = \pi_B + \frac{1}{4}\pi_A$$

Finalement $\pi_A = \dfrac{1}{4}$ et $\pi_B = \dfrac{3}{4}$. Bill a donc un très net avantage sur Alice !

3.2. *Cas général*

Alice et Bill s'affrontent cette fois avec les mots m et μ, supposés finis non vides et composés uniquement des lettres F et P. On suppose aussi que ces mots ne sont pas contenus l'un dans l'autre ; en effet si par exemple $m = PF$ et $\mu = PFPF$ alors Bill ne pourrait jamais gagner, ou si $m = PFP$ et $\mu = FP$ alors les deux joueurs pourraient gagner en même temps. À la fin du jeu, un seul des deux joueurs peut donc être déclaré gagnant.

On sait que le mot concaténé $m+\mu$ apparaît presque sûrement, ce jeu se termine donc presque sûrement en un nombre fini de tours, avec un seul gagnant. Comme ci-dessus on définit X_A, X_B, T, π_A, π_B, et on a :

$$\pi_A + \pi_B = 1$$

Notons ℓ la longueur de m et λ celle de μ. On pose $\gamma = \min(\ell, \lambda)$. On reprend les notations $m^{(k)}$ et $m_{(k)}$, pour $k \in [\![1, \ell]\!]$, définies précédemment, et on utilisera aussi les notations $\mu^{(k)}$ et $\mu_{(k)}$, pour $k \in [\![1, \lambda]\!]$.

Enfin, notons M_n (resp. N_n) l'événement « m (resp. μ) apparaît lors des lancers $n+1$ à $n+\ell$ (resp. $n+\lambda$) ». Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T \geqslant n+1) \cap M_n$ correspond à l'événément « m et μ ne sont jamais apparus au cours des n premiers lancers, et m apparaît au cours des lancers $n+1$ à $n+\ell$ ». Plusieurs cas sont alors possibles :

- m apparaît *pour la première fois* aux lancers $n+1$ à $n+\ell$ sans que μ soit apparu avant ;
- pour $k \in [\![1, \ell-1]\!]$, si $m^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}$: m apparaît *pour la première fois* aux lancers $n+1-k$ à $n+\ell-k$ sans que μ soit apparu avant ;

- pour $k \in [\![\ell-\gamma+1, \ell-1]\!]$, si $\mu^{(\ell-k)} = m_{(\ell-k)}$: μ apparaît *pour la première fois* aux lancers $n+1+\gamma-\lambda-k$ à $n+\gamma-k$ sans que m soit apparu avant ;

L'incompatibilité des ces différents cas et l'indépendance des lancers donnent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^\ell}.\mathbb{P}(T \geqslant n+1) &= \mathbb{P}(X_A = n+\ell) + \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_A = n+\ell-k).\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} \\
&\quad + \sum_{k=\ell-\gamma+1}^{\ell-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_B = n+\gamma-k).\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_A = n+\ell-k).\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} \\
&\quad + \sum_{k=\ell-\gamma+1}^{\ell-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_B = n+\gamma-k).\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}
\end{aligned}$$

ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. En inversant les rôles d'Alice et Bill on a de même :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^\lambda}.\mathbb{P}(T \geqslant n+1) &= \sum_{k=0}^{\lambda-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_B = n+\lambda-k).\mathbf{1}_{\mu^{(\lambda-k)}=\mu_{(\lambda-k)}} \\
&\quad + \sum_{k=\lambda-\gamma+1}^{\lambda-1} \frac{1}{2^k}.\mathbb{P}(X_A = n+\gamma-k).\mathbf{1}_{m^{(\lambda-k)}=\mu_{(\lambda-k)}}
\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En multipliant la première formule par 2^ℓ et la seconde par 2^λ, on a égalité. On somme ensuite pour $n = 0 \cdots + \infty$:

$$\begin{aligned}
&\pi_A \left(\sum_{k=0}^{\ell-1} 2^{\ell-k}.\mathbf{1}_{m^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} \right) + \pi_B. \left(\sum_{k=\ell-\gamma+1}^{\ell-1} 2^{\ell-k}.\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} \right) \\
= \;& \pi_B. \left(\sum_{k=0}^{\lambda-1} 2^{\lambda-k}.\mathbf{1}_{\mu^{(\lambda-k)}=\mu_{(\lambda-k)}} \right) + \pi_A. \left(\sum_{k=\lambda-\gamma+1}^{\lambda-1} 2^{\lambda-k}.\mathbf{1}_{m^{(\lambda-k)}=\mu_{(\lambda-k)}} \right)
\end{aligned}$$

On introduit donc le nombre :

$$\text{cle}(m,\mu) = \sum_{k=\ell-\gamma}^{\ell-1} 2^{\ell-k-1}.\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}}$$

qui généralise le nombre cle(m,m) défini précédemment. On peut le calculer très simplement de la façon suivante :

- on écrit le nombre m, puis μ juste en-dessous de telle sorte que les γ premières lettres de m coïncident avec les γ dernières lettres de μ ;

- on décale μ d'une lettre sur la gauche, ceci répété jusqu'à l'avoir décalé $\min(\ell-1, \lambda-1)$ fois ;
- à chaque fois on regarde si les parties communes coincident et dans ce cas on note 1, et sinon on note 0 ;
- on obtient un nombre binaire, qui, une fois transformé en base 10, est égal à cle(m, μ).

Ici on a supposé que m et μ ne se contiennent pas l'un l'autre, donc la première comparaison donne toujours 0, et on peut enlever le premier terme de la somme :

$$\text{cle}(m, \mu) = \sum_{k=\ell-\gamma+1}^{\ell-1} 2^{\ell-k-1}.\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} = \sum_{k=1}^{\gamma-1} 2^{k-1}.\mathbf{1}_{\mu^{(k)}=m_{(k)}}$$

La formule précédente s'écrit donc :

$$\pi_A.2.\text{cle}(m, m) + \pi_B.2.\text{cle}(m, \mu) = \pi_B.2.\text{cle}(\mu, \mu) + \pi_A.2.\text{cle}(\mu, m)$$

Ou encore :

$$\boxed{\frac{\pi_A}{\pi_B} = \frac{\text{cle}(\mu, \mu) - \text{cle}(m, \mu)}{\text{cle}(m, m) - \text{cle}(\mu, m)}}$$

Sachant que $\pi_A + \pi_B = 1$ on peut donc en déduire la valeur de π_A et π_B.

C'est cette jolie formule qui a été proposée intialement par Conway, mais sans qu'il en donne de démonstration…

En fait on peut facilement généraliser au cas d'une *loi non uniforme*, et avec des séquences choisies dans un *alphabet quelconque* (qui peut être infini dénombrable). La formule de Conway reste vraie avec la définition :

$$\boxed{\text{cle}(m, \mu) = \frac{1}{r\alpha} \sum_{k=\ell-\gamma}^{\ell-1} \alpha^{(k)}.\mathbf{1}_{\mu^{(\ell-k)}=m_{(\ell-k)}} = \frac{1}{r\alpha} \sum_{k=1}^{\gamma} \alpha^{(\ell-k)}.\mathbf{1}_{\mu^{(k)}=m_{(k)}}}$$

où r est le nombre de lettres de l'alphabet, α est la probabilité d'apparition de m sur ℓ lancers consécutifs, et $\alpha^{(k)}$ est la probabilité d'apparition des k dernières lettres de m sur k lancers consécutifs ($k \in [\![1, \ell]\!]$).

Pour calculer cette quantité, on commence comme dans le cas équiprobable sur l'alphabet $\{P, F\}$, en écrivant μ sous m, avec un décalage sur la gauche qui s'incrémente d'une unité à chaque ligne. Au départ cle(m, μ) est initialisé à 0 et chaque fois qu'il y a correspondance entre les deux morceaux de séquence, on ajoute la valeur $\dfrac{\alpha^{(k)}}{r\alpha}$ à cle(m, μ) (k est le nombre de fois où on a décalé μ sur la gauche).

Si toutes les lettres de l'alphabet sont équiprobables, alors les comparaisons donnent une séquence de 0 et de 1 que l'on interprète cette fois comme un nombre en base r, ce qui simplifie le calcul de la clé. Dans ce cadre très général, le temps moyen d'attente de m est :

$$\boxed{\mathbb{E}(X_A) = r \times \text{cle}(m, m)}$$

3.3. *Quelques exemples*

$\diamond$ On calcule la clé de $m = PPF$ avec lui-même :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P & P & F & & \\
 & & \mathbf{P} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & & 1 \\
 & P & P & F & & & 0 \\
P & P & F & & & & 0
\end{array}$$

donc cle$(m, m) = 1.2^2 = 4$. Donc le temps moyen d'attente de m est 8.

$\diamond$ On calcule la clé de $\mu = FPP$ avec lui-même :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F & P & P & & \\
 & & \mathbf{F} & \mathbf{P} & \mathbf{P} & & 1 \\
 & F & P & P & & & 0 \\
F & P & P & & & & 0
\end{array}$$

donc cle$(\mu, \mu) = 4$ et le temps moyen d'attente de μ et 8.

$\diamond$ On calcule la clé de m avec μ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & P & P & F & & \\
 & & F & P & P & & 0 \\
 & F & \mathbf{P} & \mathbf{P} & & & 1 \\
F & P & \mathbf{P} & & & & 1
\end{array}$$

donc cle$(m, \mu) = 1.2^1 + 1.2^0 = 3$.

$\diamond$ On calcule la clé de μ avec m :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F & P & P & & \\
 & & P & P & F & & 0 \\
 & P & P & F & & & 0 \\
P & P & \mathbf{F} & & & & 1
\end{array}$$

donc cle$(\mu, m) = 1$. On a donc $\dfrac{\pi_A}{\pi_B} = \dfrac{1}{3}$ puis $\pi_A = \dfrac{1}{4}$ et $\pi_B = \dfrac{3}{4}$.

Donnons un exemple avec deux mots de longueurs différentes : $m = FPFPF$ et $\mu = PPF$.

$\diamond$ On calcule la clé de $m = FPFPF$ avec lui-même :

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & F & P & F & P & F & \\
 & & & & \mathbf{F} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & 1 \\
 & & & F & P & F & P & F & & 0 \\
 & & F & P & \mathbf{F} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & & & 1 \\
 & F & P & F & P & F & & & & 0 \\
F & P & F & P & \mathbf{F} & & & & & 1
\end{array}$$

donc cle$(m, m) = 21$ et le temps moyen d'attente de μ et 42.

$\diamond$ On calcule la clé de $\mu = PPF$ avec lui-même :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & P & P & F & \\
 & & \mathbf{P} & \mathbf{P} & \mathbf{F} & 1 \\
 & P & P & F & & 0 \\
P & P & F & & & 0
\end{array}$$

donc cle$(\mu, \mu) = 1.2^2 = 4$. Donc le temps moyen d'attente de m est 8.

$\diamond$ On calcule la clé de m avec μ :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & F & P & F & P & F & \\
 & & P & P & F & & & 0 \\
 & P & P & F & & & & 0 \\
P & P & \mathbf{F} & & & & & 1
\end{array}$$

donc cle$(m, \mu) = 1$.

$\diamond$ On calcule la clé de μ avec m :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & P & P & F & \\
 & & F & P & F & P & F & 0 \\
 & F & P & F & P & F & & 0 \\
F & P & F & P & F & & & 0
\end{array}$$

donc cle$(\mu, m) = 0$.

On a donc $\dfrac{\pi_A}{\pi_B} = \dfrac{3}{21}$ puis $\pi_A = \dfrac{1}{8}$ et $\pi_B = \dfrac{7}{8}$.

On peut ainsi s'amuser à comparer différents affrontements, et en déduire un exemple d'*intransitivité* avec des mots de même longueur :

- avec $m = PPF$ et $\mu = PFF$ on trouve : $\pi_A = \dfrac{2}{3} > \pi_B = \dfrac{1}{3}$
- avec $m = PFF$ et $\mu = FFP$ on trouve : $\pi_A = \dfrac{3}{4} > \pi_B = \dfrac{1}{4}$
- avec $m = FFP$ et $\mu = FPP$ on trouve : $\pi_A = \dfrac{2}{3} > \pi_B = \dfrac{1}{3}$

- avec $m = FPP$ et $\mu = PPF$ on trouve : $\pi_A = \dfrac{3}{4} > \pi_B = \dfrac{1}{4}$

ce qui est tout de même assez surprenant !

Dans la rubrique QR de [3], on trouve aussi un exemple qui prouve que ce ne sont pas nécessairement les séquences les plus longues qui sont défavorables pour un joueur. Avec des alphabets plus complexes, il faut des séquences très longues pour espérer que des sous-séquences coïncident.

3.4. *Simulations avec Python*

Le lecteur pourra trouver sur le site de la RMS les codes permettant de calculer les clés des motifs, l'espérance du temps d'apparition d'un motif, les probabilités de gain d'un motif par rapport à un autre dans le jeu de Conway. Par ailleurs, des simulations numériques viennent corroborer ces résultats théoriques.

Par exemple :

```
>>> pi('FPFPF','PPF',5000)
valeurs théoriques : [0.125, 0.875]
valeurs expérimentales : [0.1264, 0.8736]
```

La probabilité théorique de gain du motif « FPFPF » face à « PPF » est de 0,125. La simulation numérique sur 5000 parties corrobore ce résultat.

```
>>> temps('FPFPF',5000)
valeur théorique : 42
valeur expérimentale : 42.5808
```

L'espérance du temps d'apparition du motif « FPFPF » est de 42.

Avec un alphabet et une loi quelconque :

```
>>> pi('ACTA','CTAGG',50000,['A','C','G','T'],[0.4,0.1,0.2,0.3])
valeurs théoriques : [0.9703085581214826, 0.029691441878517 36]
valeurs expérimentales : [0.97086, 0.02914]
```

et :

```
>>> temps('ACTG',500000,['A','C','G','T'],[0.4,0.1,0.2,0.3])
valeur théorique : 416.6666666666666
valeur expérimentale : 416.42704
```

Références

[1] J.P. Delahaye, *Les surprises du jeu de pile ou face*, Pour la science, 2011, Novembre, pp. 146-151

[2] Martin Gardner, *On the paradoxical situations that arise from nontran- sitive relations*, Scientific American, 231-4, 2010, pp. 120-124. Reprinted with additions in his book Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, 1988, 55-69

[3] G. Dupont, *R819*, RMS 126-2, 2016

[4] Walter Penney, *Problem : Penney ante*, Journal of Recreational Mathematics, 1969, October

[5] R.Graham, D.Knuth and O.Patashnik, *Concrete Mathematics : a foundation for computer science. 2nd edition.*, 1994, Addison-Wesley Professional, pp. 401-410

[6] A.D. Solov'ev, *A Combinatorial Identity and Its Application to the Problem Concerning the First Occurrence of a Rare Event*, Theory Probab. Appl., 1966, vol 11(2), pp. 276-282

[7] N. Tosel. *Abracadabra*, RMS 124-4, 2014