

Résumé

Pour modéliser le nombre d'occurrences d'un événement « rare » dans un intervalle de temps donné, on utilise souvent la loi de Poisson, introduite par Simeon Denis Poisson en 1837 [7]. Dans une première partie nous présentons ses propriétés les plus connues, et dans une seconde nous introduisons le processus de Poisson.

Autour de la loi de Poisson

Bégyn Arnaud

29 août 2012

Dans tout l'article $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

1 La loi de Poisson pour une variable aléatoire discrète

1.1 Définition

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

La loi de X peut être définie par la donnée des probabilités $\mathbb{P}(X = n) = p_n$, à condition que la suite de réels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : (i) $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0$; (ii) $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

Définition 1 On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$$

On le note : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Les conditions (i) et (ii) sont bien évidemment vérifiées. . .

La figure suivante représente la loi de Poisson pour différentes valeurs du paramètre. Dans sa thèse (disponible librement sur Google Livres en version numérique) S.D Poisson l'utilise pour modéliser les chances d'erreur dans un jugement contre un accusé, à une majorité connue, par un jury composé d'un nombre de personnes également connu. Elle est introduite comme limite de la loi binomiale (voir le paragraphe 1.4).

Dans la suite la variable X suit toujours la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Remarquons qu'on peut étendre la définition au cas $\lambda = 0$: on obtient une variable aléatoire presque sûrement égale à 0. Cette convention sera utile dans la section sur le processus de Poisson.

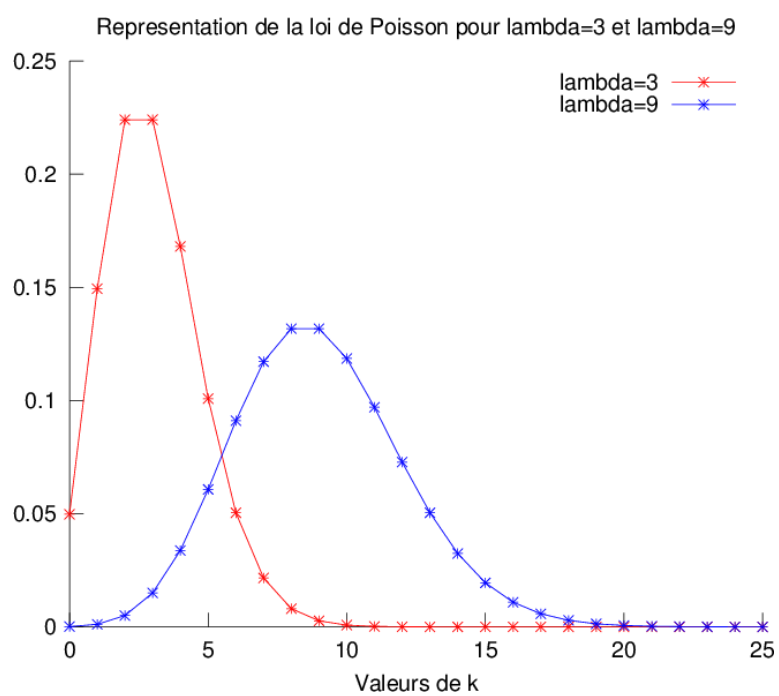


FIGURE 1 – Illustrations de la loi de Poisson

1.2 Moments

Théorème 1 *X admet des moments de tout ordre. En particulier X admet une espérance : $\mathbb{E}(X) = \lambda$; et une variance : $\text{Var}(X) = \lambda$.*

Démonstration. L'existence des moments de tout ordre est donnée par la convergence (absolue) des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot n^r \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Ensuite il vient aisément que : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot n \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda$.

Et de même : $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \cdot n^2 \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = \lambda^2 + \lambda$. Donc d'après la formule de

Koenig-Huyghens : $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda$. **CQFD**

Ces formules permettent d'interpréter le paramètre λ : si X modélise le nombre d'occurrences dans un intervalle de temps d'un phénomène donné, alors λ correspond au nombre moyen d'occurrences observées.

Dans le cas $\lambda = 1$, on peut relier les moments d'ordre quelconque aux nombres de Bell. En effet, la formule de Dobinski nous donne :

$$\forall r \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X^r) = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^r}{n!} = B_r$$

où B_r est le r -ième nombre de Bell.

1.3 Fonctions caractéristique et génératrice

Ces deux fonctions caractérisent la loi de la variable aléatoire X .

Théorème 2 *La fonction caractéristique de X est donnée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

et sa fonction génératrice par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = e^{\lambda(t-1)}$$

Démonstration. Une fonction caractéristique φ_X est toujours définie sur $\mathbb{R}$, mais une fonction génératrice G_X peut ne pas être définie en dehors de $[-1, 1]$.

Ici la convergence absolue sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot \frac{\lambda^n}{n!}$ justifie

que G_X est définie sur $\mathbb{R}$.

Des calculs simples donnent ensuite :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{itn} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$$

CQFD

En application nous proposons de démontrer la stabilité de la loi de Poisson pour l'addition.

Théorème 3 *Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$, alors la $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.*

Démonstration. L'indépendance de X_1 et X_2 assure l'indépendance de e^{tX_1} et e^{tX_2} , pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad G_{X_1+X_2}(t) &= \mathbb{E} \left(e^{t(X_1+X_2)} \right) = \mathbb{E} \left(e^{tX_1} \times e^{tX_2} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{tX_1} \right) \times \mathbb{E} \left(e^{tX_2} \right) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) \\ &= e^{\lambda_1(t-1)} \times e^{\lambda_2(t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(t-1)} \end{aligned}$$

La fonction génératrice de $X_1 + X_2$ est donc égale à celle d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. On en déduit que la loi de $X_1 + X_2$ est la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ (c'est une simple conséquence du théorème de dérivation des séries entières!). **CQFD**

On peut généraliser par récurrence à un nombre fini de variables aléatoires.

Corollaire 1 *Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi respective $\mathcal{P}(\lambda_1), \dots, \mathcal{P}(\lambda_n)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$.*

1.4 Convergence en loi vers une loi de Poisson

On dispose du théorème suivant, appelé dans la littérature « théorème de Poisson » ou encore « Théorème Central Limite poissonien ».

Théorème 4 *Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels de $]0, 1[$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_{i,n})_{n \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n}$ un tableau de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \{0, \dots, n\}$, $X_{i,n}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre*

p_n . On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{i=0}^n X_{i,n}$.

Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

La variable S_n compte le nombre d'occurrences d'un « succès » (i.e. d'un 1) dans le tirage des variables $X_0, \dots, X_n$. La rareté des occurrences est obtenue par le fait que p_n est proche de 0 pour n grand. On retrouve ainsi intuitivement le fait que la loi de Poisson s'applique à une variable comptant le nombre d'occurrences d'évènements rares.

Remarquons que $\mathbb{E}(S_n) = np_n \rightarrow \lambda$ quand $n \rightarrow +\infty$. Ce théorème montre donc qu'une somme S d'un grand nombre variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de petit paramètre suit approximativement la loi de Poisson, de paramètre $\mathbb{E}(S)$.

Fréquemment on choisit de présenter ce résultat sous la forme suivante, intitulée « approximation binomiale-Poisson ».

Théorème 5 Soient $\lambda > 0$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi binomiale de paramètres (n, p_n) , où $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels de $]0, 1[$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda > 0$.

Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathcal{P}(\lambda)$.

Le cas usuel correspond à $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

Démonstration du théorème 5. La démonstration est élémentaire. Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{k!} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \times e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

En effet on a $p_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{n}$ et donc $(n - k) \ln(1 - p_n) \sim_{n \rightarrow +\infty} -\lambda$. **CQFD**

La vitesse de convergence est précisée par l'inégalité de Le Cam (voir [3] et [6]).

Théorème 6 Sous les hypothèses du théorème 5, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-np_n} \frac{(np_n)^k}{k!} \right| \leq \frac{C}{n}$$

Notamment pour $p_n = \frac{\lambda}{n}$ on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{C}{n}$.

Démonstration du théorème 6. Dans toute la démonstration n est fixé. La démonstration repose sur une méthode de couplage. On remarque en effet que S_n a même loi que $\sum_{i=1}^n Y_i$, où les variables aléatoires $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p_n .

On se donne alors des copies indépendantes $(Y_1, Z_1), \dots, (Y_n, Z_n)$ d'une variable aléatoire (Y, Z) de $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(Y = a, Z = b) = \begin{cases} e^{-p_n} - p_n + p_n e^{-p_n} & \text{si } a = b = 0 \\ p_n - p_n e^{-p_n} & \text{si } a = 1 \text{ et } b = 0 \\ p_n e^{-p_n} & \text{si } a = b = 1 \\ \frac{p_n^b}{b!} \cdot e^{-p_n} & \text{si } a = 0 \text{ et } b \geq 2 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

Le choix de cette loi conjointe ne sera pas expliqué ici mais nous allons voir qu'il donne le résultat souhaité.

Les formules $\mathbb{P}(Y = a) = \sum_{b=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = a, Z = b)$, pour tout $a \in \mathbb{N}$, et $\mathbb{P}(Z = b) = \sum_{a=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = a, Z = b)$, pour tout $b \in \mathbb{N}$, permettent de vérifier que Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p_n et que Z suit la loi de Poisson de paramètre p_n . On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i = k\right)$ et grâce au corollaire 1, $\sum_{i=1}^n Z_i \hookrightarrow \mathcal{P}(np_n)$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Z_i = k\right) = e^{-np_n} \cdot \frac{(np_n)^k}{k!}$.

On doit donc majorer $\sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(V = k) - \mathbb{P}(W = k)|$, où on a posé $V = \sum_{i=1}^n Y_i$ et $W = \sum_{i=1}^n Z_i$. Pour cela on considère :

$$\Delta = \sup \left\{ |\mathbb{P}(V \in A) - \mathbb{P}(W \in A)|; A \subset \mathbb{N} \right\}$$

. Pour $A = \{k \in \mathbb{N}; \mathbb{P}(V = k) \geq \mathbb{P}(W = k)\}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(V = k) - \mathbb{P}(W = k)| &= \sum_{k \in A} (\mathbb{P}(V = k) - \mathbb{P}(W = k)) + \sum_{k \notin A} (\mathbb{P}(W = k) - \mathbb{P}(V = k)) \\ &= (\mathbb{P}(V \in A) - \mathbb{P}(W \in A)) + (\mathbb{P}(W \notin A) - \mathbb{P}(V \notin A)) \\ &\leq 2\Delta \end{aligned}$$

On s'intéresse donc à Δ . Si A est une partie de $\mathbb{N}$ on a les relations ensemblistes :

$$[V \in A] = ([V = W] \cap [V \in A]) \cup ([V \neq W] \cap [V \in A])$$

donc :

$$[V \in A] \subset [W \in A] \cup [V \neq W]$$

ce qui donne :

$$\mathbb{P}(V \in A) - \mathbb{P}(W \in A) \leq \mathbb{P}(V \neq W)$$

En échangeant les rôles de V et W , on arrive à $\mathbb{P}(W \in A) - \mathbb{P}(V \in A) \leq \mathbb{P}(V \neq W)$, et donc :

$$|\mathbb{P}(V \in A) - \mathbb{P}(W \in A)| \leq \mathbb{P}(V \neq W)$$

Ceci étant vrai pour toute partie A de $\mathbb{N}$, on en déduit : $\Delta \leq \mathbb{P}(V \neq W)$.

De plus si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Y_i = Z_i$, alors $V = W$. Donc par contraposée : $[V \neq W] \subset \bigcup_{i=1}^n [Y_i \neq Z_i]$. Ainsi :

$$\Delta \leq \mathbb{P}(V \neq W) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i \neq Z_i) = \sum_{i=1}^n (1 - \mathbb{P}(Y_i = Z_i))$$

Mais pour $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_i = Z_i) &= \sum_{a=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_i = a, Z_i = a) = \mathbb{P}(Y_i = 0, Z_i = 0) + \mathbb{P}(Y_i = 1, Z_i = 1) + 0 \\ &= 2p_n e^{-p_n} + e^{-p_n} - p_n \\ &\geq 1 - 2p_n^2 \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq 1 - x$. On a donc : $\Delta \leq 2np_n^2$. De plus, la suite $(np_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, donc il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n^2 p_n^2 \leq C$.

En recollant tous les morceaux :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(S_n = k) - e^{-np_n} \frac{(np_n)^k}{k!} \right| \leq 2\Delta \leq 4np_n^2 \leq \frac{C}{n}$$

CQFD

On peut étendre ces résultats à des sommes de variables non indépendantes mais peu corrélées. L'exemple le plus classique est celui du nombre N_n de points fixes d'une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$: lorsque $n \rightarrow +\infty$, on peut montrer que N_n converge en loi vers la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$. Pour cela on remarque

que $N_n = \sum_{k=1}^n X_k$, où X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si le k est

un point fixe et 0 sinon. Les variables X_k sont de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, mais ne sont pas indépendantes... La convergence en loi se montre par un calcul direct de la loi de N_n (voir [4] p.130 exemple 3.6.4).

2 Processus de Poisson

Pour cette section, de très bonnes références sont [2] et [5].

2.1 Une définition du processus de Poisson

On rappelle que $(X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus stochastique, indexé par $\mathbb{R}^+$, et défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lorsque, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, X_t est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On se donne une suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires i.i.d. (=indépendantes et identiquement distribuées) de loi exponentielle de paramètre λ ¹. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k$. D'après les résultats classiques sur les lois exponentielles, on sait que T_n suit la loi Gamma de paramètres (n, λ) .

Définition 2 On définit alors le processus de Poisson $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de paramètre λ par la formule :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[T_n \leq t]}$$

La somme définissant N_t ne contient presque sûrement qu'un nombre fini de termes non nuls puisque, d'après la loi forte des grands nombres, $T_n \rightarrow +\infty$ presque sûrement. On peut aussi remarquer que $N_0 = 0$ presque sûrement.

Si on interprète la suite croissante de variables $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme des instants où se produisent un événement (arrivée d'un client dans une file d'attente, désintégration d'un élément radioactif etc ...), alors N_t représente le nombre de fois où l'événement s'est produit avant le temps t . Le processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est donc un processus de comptage.

La durée d'attente entre deux événements est modélisé par une loi exponentielle. Ce choix n'est pas anodin, il en est en effet du à la propriété d'absence de mémoire de cette loi : si $\tau \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $\forall x, y > 0$, $\mathbb{P}(\tau > x + y | \tau > x) = \mathbb{P}(\tau > y)$.

Le théorème suivant fait le lien avec la loi de Poisson.

Théorème 7 Pour tout $t \geq 0$, N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

Démonstration. Fixons $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Partant de l'identité $[N_t \geq n] = [N_t = n] \cup [N_t \geq n + 1]$, on a :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n + 1)$$

Supposons $n \geq 1$ et reprenons la modélisation du nombre d'occurrences d'un événement avant l'instant t . L'évènement $[N_t \geq n]$ signifie qu'à l'instant t on a observé au moins n occurrences, ce qui est équivalent à ce que l'instant T_n (instant où se produit la $n^{\text{ième}}$ occurrence) soit inférieur ou égal à t . Autrement dit on a l'identité $[N_t \geq n] = [T_n \leq t]$, d'où :

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(T_n \leq t) - \mathbb{P}(T_{n+1} \leq t)$$

1. Une variable aléatoire τ suit la loi exponentielle de paramètre λ , notée $\mathcal{E}(\lambda)$, lorsqu'elle admet pour densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x > 0}$

Toujours si $n \geq 1$, T_n suit la loi Gamma de paramètres (n, λ) , elle admet pour densité $t \mapsto \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x)$. Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t = n) &= \int_0^t \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{n+1} x^n}{n!} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t d\left(\frac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x}\right) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Si $n = 0$:

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = \mathbb{P}(N_t \geq 0) - \mathbb{P}(N_t \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(T_1 \leq t)$$

et comme $T_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}(N_t = 0) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda t}$$

On obtient donc que $N_t \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda t)$. **CQFD**

2.2 Propriétés

On commence par les propriétés des accroissements du processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$.

Théorème 8 (i) $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est à accroissements indépendants :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est à accroissements stationnaires :
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n, \forall h > 0, (N_{t_1+h} - N_{t_0+h}, N_{t_2+h} - N_{t_1+h}, \dots, N_{t_n+h} - N_{t_{n-1}+h})$ a même loi que $(N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$.

On a aussi la propriété suivante.

Théorème 9 $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est localement continu en probabilité : $\forall t \geq 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 1) = 0$.

Ces propriétés sont caractéristiques des processus de Poisson.

2.3 Application à la simulation d'une loi de Poisson

On sait simuler une loi exponentielle grâce à la méthode de la fonction de répartition inverse (voir [1]) : si U est une variable uniforme sur $[0, 1]$ alors

$\tau = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ .

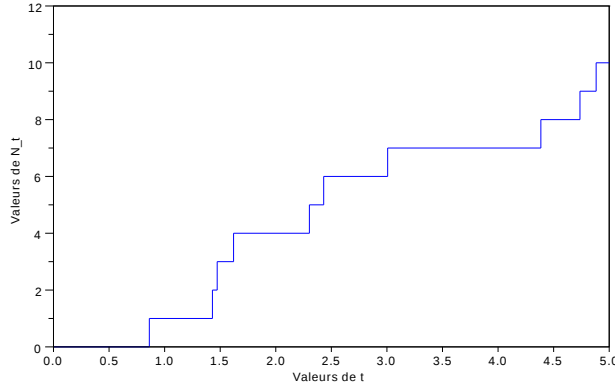


FIGURE 2 – Trajectoire d’un processus de Poisson de paramètre 2 sur $[0, 5]$

Pour simuler une trajectoire du processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ entre 0 et t_0 il suffit donc de simuler des variables $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ , où k est le plus petit entier non nul tel que $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k > t$. On a alors $N_t = 0$ pour $t \in [0, \tau_1[$, $N_t = i - 1$ pour $t \in [\tau_{i-1}, \tau_i[$ et $2 \leq i \leq k - 1$, $N_t = k - 1$ pour $t \in [\tau_{k-1}, t]$.

Pour $t_0 = 1$, N_{t_0} suit la loi de Poisson de paramètre λ . On obtient donc une méthode simple de simulation d’une loi de Poisson.

Références

- [1] D. Chafaï B. Bercu. *Modélisation stochastique et simulation*. Dunod, 2007.
- [2] P. Billingsley. *Probability and Measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 1995.
- [3] L. Le Cam. An approximation theorem for the poisson binomial distribution. *Pacific Journal of Mathematics*, 10 :1181–1197, 1960.
- [4] R. Durrett. *Probability : Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2010.
- [5] D. Foata et A. Fuchs. *Processus stochastiques - Processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Dunod, 2002.
- [6] G. Letac. *Intégration et Probabilités, Analyse de Fourier, Exercices corrigés*. Masson, Paris, 1982 (2nde édition 1997).
- [7] Siméon-Denis Poisson. *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile : précédées des règles générales du calcul des probabilités*. Bachelier, 1837.