# 2

# ALGÈBRE

---

**Exercice 2.1.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
On pose $E = \mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\ ,\ \rangle$. On note $||\ ||$ la norme euclidienne associée.
Un endomorphisme $g$ de $E$ est dit *orthogonal* si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a : $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

1. Soit $g$ un endomorphisme de $E$. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) $g$ est orthogonal.

ii) Pour tout $x \in E$, $||g(x)|| = ||x||$.

iii) L'image par $g$ d'une base orthonormée de $E$ est une base orthonormée de $E$.

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$.

2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. Montrer que $F$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $F = \{0_E\}$ ou $F = E$ (on pourra montrer que si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$, il existe un élément de $O_n(\mathbb{R})$ (que l'on exhibera) qui ne laisse pas $F$ stable).

3. Soit $f$ un endomorphisme de $E$. On suppose *pour toute la suite de l'exercice* que $f$ commute avec tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que

a) $\text{Ker}\, f$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

b) pour tout réel $\lambda$, $\text{Ker}(f - \lambda Id)$ est stable par tous les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que $\text{Ker}(f - \lambda Id) = \{0_E\}$ ou $\text{Ker}(f - \lambda Id) = E$

4. On admet que tout endomorphisme de $\mathbb{R}^{2p+1}$ admet au moins une valeur propre réelle.

On suppose que $n$ est impair. Montrer qu'il existe $\lambda_0$ tel que $f = \lambda_0 Id$.

---

**Solution :**

1. i) $\Longrightarrow$ ii) Pour tout vecteur $x$ de $E$, on a :

$$\|g(x)\|^2 = \langle g(x), g(x)\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

Donc la conservation du produit scalaire entraine celle de la norme.

ii) $\Longrightarrow$ i) Comme $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$, la conservation de la norme et la linéarité de $g$ permettent d'écrire, pour tous vecteurs $x$ et $y$ :

$$\begin{aligned}\langle g(x), g(y)\rangle &= \frac{1}{4}(\|g(x)+g(y)\|^2 - \|g(x)-g(y)\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|g(x+y)\|^2 - \|g(x-y)\|^2)\\ &= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

i) $\Longrightarrow$ iii) Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$, et $g$ un endomorphisme orthogonal, on a : $\forall\, i \neq j, \langle g(e_i), g(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, donc $g(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de $E$.

iii) $\Longrightarrow$ ii) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $E$ et $x$ un vecteur de $E$. On a : $x = \sum x_i e_i \implies g(x) = \sum x_i g(e_i)$ et comme $f(\mathcal{B})$ est aussi orthonormée :

$$\|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|^2.$$

2. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, distinct de $\{0\}$ et $E$. On considère une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de $F$ que l'on complète en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $E$.
On considère l'application linéaire $g$ définie par :

$$\forall\, i \in [\![1, n-1]\!], g(e_i) = e_{i+1} \text{ et } g(e_n) = e_1$$

$g$ est bien un endomorphisme orthogonal et puisque $g(e_p) = e_{p+1}$, l'endomorphisme $g$ ne laisse pas $F$ stable.
Comme il est clair que $E$ et $\{0\}$ sont stables par tout endomorphisme orthogonal, la question est achevée.

3. a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $g \in O_n$, on a : $f(g(x)) = f\circ g(x) = g\circ f(x) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f$ est stable par $g$.

b) Si $f$ commute avec tous les éléments de $O_n$, il en est de même de $f - \lambda Id$ et donc le résultat de a) montre que $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$ est stable par tous les éléments de $O_n$.

c) Par conséquent, le résultat de la question 2. montre que $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = \{0\}$ ou $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id) = E$.

4. Par hypothèse, $f$ admet au moins une valeur propre $\lambda_0$.
Par conséquent $\operatorname{Ker}(f - \lambda_0 Id) \neq \{0\}$ et ainsi $\operatorname{Ker}(f - \lambda_0 Id) = E$, ce qui prouve que $f$ est l'homothétie de rapport $\lambda_0$.

---

**Exercice 2.2.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice réelle $M = (m_{i,j})$, on dit que $M \geqslant 0$, si $m_{i,j} \geqslant 0$ pour tous indices $i$ et $j$.

1. Montrer que dès que le produit de matrices $MN$ a un sens, on a :

$$\begin{cases} M \geqslant 0 \\ N \geqslant 0 \end{cases} \implies MN \geqslant 0.$$

2. Donner un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M \neq 0$, $M \geqslant 0$ et $M$ non inversible.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\Big[A \in GL_n(\mathbb{R}), \text{ et } A^{-1} \geqslant 0\Big] \iff \Big[\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX \geqslant 0 \implies X \geqslant 0\Big]$$

4. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A \geqslant 0$ et $A^{-1} \geqslant 0$. On note $a_{i,j}$ les coefficients de $A$ et $a'_{i,j}$ ceux de $A^{-1}$.

a) Montrer que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \forall\, k \in [\![1,n]\!], a_{i,k}\, a'_{k,j} = 0.$$

b) En déduire que dans chaque ligne et dans chaque colonne de $A$, il y a un unique élément non nul.

---

**Solution :**

1. Avec des notations évidentes : $(MN)_{i,j} = \sum\limits_k m_{i,k} n_{k,j}$

Donc si $M$ et $N$ sont à coefficients dans $\mathbb{R}^+$, il en est de même de la matrice $MN$.

2. On peut proposer $M = E_{i,j}$ (notation canonique), qui est de rang 1, donc non inversible puisque $n \geqslant 2$.

3. $\star$ Si $AX \geqslant 0$, comme $A^{-1} \geqslant 0$, on a $X = A^{-1}(AX) \geqslant 0$.

$\star$ • Soit $X \in \operatorname{Ker} A$, on a $AX = 0 \geqslant 0$, donc l'hypothèse donne $X \geqslant 0$. Mais on a aussi $-X \in \operatorname{Ker} A$ et ainsi $-X \geqslant 0$.
Les coefficients de la colonne $X$ sont à la fois $\geqslant 0$ et $\leqslant 0$, donc sont tous nuls et $X = 0$, ce qui prouve que $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

• Soit $C_j$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $A^{-1}$ ; comme $AA^{-1} = I$, $AC_j$ est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et est donc une matrice colonne $\geqslant 0$. L'hypothèse faite entraîne alors que l'on a $C_j \geqslant 0$ et en faisant varier $j$ de 1 à $n$, tous les coefficients de $A^{-1}$ sont $\geqslant 0$. On a bien $A^{-1} \geqslant 0$.

4. a) Pour $i \neq j$, on a $(AA^{-1})_{i,j} = (I)_{i,j} = 0$, soit : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} a'_{k,j} = 0$, et comme il s'agit d'une somme de termes positifs ou nuls, il vient bien :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies \forall\, k \in [\![1,n]\!], a_{i,k}\, a'_{k,j} = 0.$$

b) $\star$ Supposons qu'il existe un indice de ligne $i$ pour lequel il existe deux indices $k$ et $\ell$ tels que $a_{i,k} \neq 0$ et $a_{i,\ell} \neq 0$. Alors pour tout indice $j$ différent de $i$, on a :

$$a'_{k,j} = a'_{\ell,j} = 0$$

Donc les lignes d'indices respectifs $k$ et $\ell$ de $A^{-1}$ ont tous leurs termes nuls, sauf peut-être le $i^{\text{ème}}$ terme. Ainsi ces lignes $L'_k$ et $L'_\ell$ forment une famille liée, ce qui contredit le fait que $A^{-1}$ est inversible.
Par contraposée, on a montré que chaque ligne de $A$ contient un terme non nul et un seul.

$\star$ On peut procéder de même pour les colonnes de $A$, ou remarquer que chaque ligne de $A$ contient un terme non nul et un seul et que le terme non nul de deux lignes distinctes ne peut se placer sur la même colonne (sinon $A$ aurait deux lignes liées) ; ainsi il y a en fait un terme non nul et un seul sur chaque ligne et sur chaque colonne.

---

**Exercice 2.3.**

On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$, par :

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ et } \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $M_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$.

1. Étudier les variations des fonctions ch et sh et tracer leur graphe dans un repère orthonormé du plan. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t$.
En déduire que si $a, b$ sont deux réels vérifiant $a^2 - b^2 = 1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que $a = \varepsilon \operatorname{ch} t$ et $b = \varepsilon \operatorname{sh} t$.

2. Montrer que la matrice $M_t$ est diagonalisable et que l'on peut choisir une base de vecteurs propres de $M_t$ indépendants de $t$.

3. Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective et vérifie pour tout $(t, t') \in \mathbb{R}^2$, $\theta(t + t') = \theta(t)\theta(t')$.

4. On pose $E = \mathbb{R}^2$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $q(x, y) = x^2 - y^2$.
On cherche les éléments $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $q \circ f = q$.
Montrer que $f$ est solution de cette équation si et seulement si sa matrice $M$ vérifie la relation $(\star)$ : ${}^tMJM = J$.
Déterminer l'ensemble des matrices qui vérifient la relation $(\star)$ et montrer qu'il contient les matrices $M_t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

---

**Solution :**

1. $\star$ Les fonctions ch et sh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\operatorname{ch}'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t\,;\ \operatorname{sh}'(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$

De plus la fonction sh est impaire sur $\mathbb{R}$ et clairement à dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$, donc positive sur $\mathbb{R}^+$ et ch est paire sur $\mathbb{R}$ et de dérivée positive sur $\mathbb{R}^+$. Les limites étant claires on obtient :

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{sh}'(t)$ | $+$ | |
| sh | $0 \nearrow$ | $+\infty$ |

| $t$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{ch}'(t)$ | $+$ | |
| ch | $1 \nearrow$ | $+\infty$ |

La représentation graphique s'en déduit ...

$\star$ On a $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = \frac{1}{4}\big(e^{2t} + e^{-2t} + 2 - e^{2t} - e^{-2t} + 2\big) = 1$

$\star$ Si $a$ et $b$ sont tels que $a^2 - b^2 = 1$, alors $|a| \geqslant 1$ et on peut trouver $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $t \in \mathbb{R}$ (et même $t \in \mathbb{R}^+$) tels que $a = \varepsilon \operatorname{ch} t$.

On en déduit $b^2 = a^2 - 1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t$, et quite à changer $t$ en $-t$ (ce qui est sans influence sur le calcul de $a$), on a alors $b = \varepsilon \operatorname{sh} t$.

2. Sans même mettre en place les méthodes de réduction, on voit que :

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $M_t$ est diagonalisable et on peut prendre comme matrice de passage diagonalisante la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$$M_t = P D_t P^{-1} \text{ avec } D_t = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t})$$

3. La fonction sh étant injective, il est clair que $t \mapsto M_t$ est injective.
D'autre part, on a : $D_t D_{t'} = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^t \mathrm{e}^{t'}, \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-t'}) = D_{t+t'}$, d'où :

$$\theta(t+t') = \theta(t)\theta(t')$$

4. Notons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $f : (x, y) \mapsto (x', y')$, d'où : $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

$q \circ f = f \iff x'^2 - y'^2 = x^2 - y^2 \iff (ax+by)^2 - (cx+dy)^2 = x^2 - y^2$.
En prenant $x = 1, y = 0$, puis $x = 0, y = 1$ et enfin $x = y = 1$, il vient :

$$q \circ f = f \implies a^2 - c^2 = 1, b^2 - d^2 = -1, ab - cd = 0$$

La réciproque étant claire, on a même équivalence.
Or : ${}^tMJM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$
donc $q \circ f = f$ est bien équivalent à ${}^tMJM = J$.
On peut alors trouver $t$ et $t'$ dans $\mathbb{R}$, $\varepsilon, \varepsilon' \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$a = \varepsilon \operatorname{ch} t, c = \varepsilon \operatorname{sh} t \,;\, b = \varepsilon' \operatorname{sh} t', d = \varepsilon' \operatorname{ch} t'$$

La condition supplémentaire $ab - cd = 0$ s'écrit $\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t' - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t' = 0$, soit en développant $\operatorname{sh}(t - t') = 0$ et donc $t = t'$.
Donc $M$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \varepsilon \operatorname{ch} t & \varepsilon' \operatorname{sh} t \\ \varepsilon \operatorname{sh} t & \varepsilon' \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

$\varepsilon = \varepsilon' = 1$ permet de retrouver les matrices $M_t$.

---

**Exercice 2.4.**

On se donne $p \in [0, 1]$ et on pose $q = 1 - p$. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^4$, de matrice $A$ dans la base canonique avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$.
Calculer $C^2$, montrer que $C$ n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable sauf pour $\alpha = 0$, et calculer $C^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que 1 et $-1$ sont valeurs propres de $A$ et donner pour chacune un vecteur colonne propre associé que l'on notera respectivement $u_1$ et $u_2$.

3. On pose $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ et donner la matrice $B$ de $f$ dans cette base. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ?

4. Calculer $B^n$ et exprimer la matrice $A^n$ en fonction de $B$ et de la matrice de passage $P$ de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathcal{B}$.

5. Un pion se déplace sur les sommets d'un carré notés $M_1, M_2, M_3, M_4$ (dans le sens trigonométrique).

À chaque déplacement, la probabilité de tourner en sens direct (sens trigonométrique) est $p$ et de tourner en sens inverse est $q$ et ces mouvements sont indépendants les uns des autres. Il ne peut avancer de plus d'un sommet. Sachant qu'il est en $M_1$ au départ, montrer que la donnée de la première ligne de $A^n$ donne la probabilité qu'il soit en $M_i$ à l'issue du $n^{\text{ème}}$ déplacement.

---

**Solution :**

1. $C^2 = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\alpha^2 \end{pmatrix} = -\alpha^2 I_2$. Si $\lambda$ est une valeur propre (réelle) de $C$, on a donc $\lambda^2 = -\alpha^2$, ce qui est impossible sauf si $\alpha = 0$, auquel cas $C = 0$. Donc, par manque de valeur propre réelle, $C$ n'est pas $\mathbb{R}$-diagonalisable (mais est $\mathbb{C}$-diagonalisable).

Comme $C^2 = -\alpha^2 I_2$, une récurrence simple donne :

$$C^{2n} = (-1)^n \alpha^{2n} I_2 \text{ et } C^{2n+1} = (-1)^n \alpha^{2n} C$$

2. On résout les systèmes $AX = X$ et $AX = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, ou on se contente de « voir » que :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+q \\ q+p \\ q+p \\ p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Les manipulations faites étant évidentes :

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $P$ est inversible, donc que $\mathcal{B}$ est une base.

On a déjà $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = -u_2$. Un calcul simple donne $f(u_3) = (q-p)u_4$ et $f(u_4) = (p-q)u_3$. Ainsi :

$$B = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \\ 0 & 0 & 1-2p & 0 \end{pmatrix}$$

Rechercher les valeurs propres de $B$ revient à chercher les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et de la matrice $C(2p-1)$ ; donc la matrice $B$ est diagonalisable si et seulement si $2p-1=0$, *i.e.* $p=\dfrac{1}{2}$.

4. On voit que le calcul de $B^p$ revient au calcul de $C^p$, et en distinguant selon la parité de $p$ :

$$B^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} \end{pmatrix}$$

$$B^{2n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n(2p-1)^{2n} \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1}(2p-1)^{2n} & 0 \end{pmatrix}$$

5. Avec des notations évidentes, on a : $P(M_{i,n+1}) = \sum\limits_{j=1}^{4} P(M_{j,n})P(M_{i,n+1}/M_{j,n})$.

Il suffit alors de poser $L_n = \big(\,P(M_{1,n}) \quad P(M_{2,n}) \quad P(M_{3,n}) \quad P(M_{4,n})\,\big)$ (matrice ligne) pour se rendre compte que les formules précédentes se réduisent à la relation matricielle $L_{n+1} = L_n A$.

Ainsi, par récurrence $L_n = L_0 A^n$ et comme $L_0 = (\,1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\,)$, la ligne $L_n$ est la première ligne de $A^n$.

---

**Exercice 2.5.**

Soit $T$ un entier naturel non nul et $(u_n)$ une suite à termes complexes. On dit que la suite $(u_n)$ est périodique de période $T$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+T} = u_n$.

1. Exemples.

Vérifier que les suites $(a_n), (b_n)$ et $(c_n)$ suivantes sont périodiques et pour chacune donner une période :

a) $(a_n)$ suite constante égale à 2.

b) $(b_n)$ est définie explicitement par $\forall\, n \in \mathbb{N}, b_n = (i)^n$, où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

c) $(c_n)$ est définie par récurrence : $c_0 = 0, c_1 = \dfrac{1}{2}$, et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_{n+2} = \sqrt{3}c_{n+1} - c_n.$$

2. On note $E$ l'ensemble des suites à termes complexes qui sont périodiques.

a) Démontrer que $E$ a une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

b) Déterminer les suites géométriques éléments de $E$.

c) Soit $(u_n) \in E$ et $T$ une période de $(u_n)$. On dira que $u \in E_0$ si $\sum\limits_{k=0}^{T-1} u_k = 0$.

Vérifier que $E_0$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et que $E = \mathrm{Vect}((a_n)) \oplus E_0$.

3. À tout élément $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E$ on associe $u' = (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u'_n = u_{n+1} - u_n.$$

Vérifier que $u'$ est une suite périodique.

a) Soit $f$ l'application de $E$ dans $E$ qui à une suite $u$ associe $f(u) = u'$. Expliciter les images des suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies à la première question.

Démontrer que $f$ est un endomorphisme de $E$.

b) Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de $f$.

---

**Solution :**

1. a) Toute suite constante est périodique de période fondamentale 1.

b) On a : $b_{4n} = 1, b_{4n+1} = i, b_{4n+2} = -1$ et $b_{4n+3} = -i$, donc $b$ est périodique de période fondamentale 4.

c) L'équation caractéristique de cette récurrence linéaire d'ordre 2 est :

$$r^2 - \sqrt{3}\,r + 1 = 0 \text{ de racines } \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Comme $c_0$ et $c_1$ sont réels, il est plus agréable de travailler sous forme trigonométrique et il existe des réels $\lambda$ et $\mu$ tels que pour tout $n$ on ait :

$$c_n = \lambda\cos(\frac{n\pi}{6}) + \mu\sin(\frac{n\pi}{6})$$

Les valeurs de $c_0$ et $c_1$ donnent alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

et $c$ est périodique de période fondamentale 12.

2. Notons que si $u$ est périodique, $T$ étant une période de $u$, alors pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, $kT$ est encore une période de $u$.

a) $E$ est non vide (on vient de montrer quelques exemples !) et si $u$ et $v$ sont périodiques de périodes respectives $T_u$ et $T_v$, alors $u$ et $v$ sont périodiques de période $T = T_1T_2$ et pour tout scalaire $\lambda$ :

$$(u + \lambda v)_{n+T} = u_{n+T} + \lambda v_{n+T} = u_n + \lambda v_n = (u + \lambda v)_n$$

Donc $u + \lambda v$ est périodique et $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

b) $\star$ La suite nulle est géométrique (de raison 0) et périodique.
$\star$ Une suite $u$ géométrique non nulle de raison $r$ avec $|r| > 1$ est telle que $\lim |u| = +\infty$, donc ne peut être périodique. De même si $|r| < 1$, $u$ est non nulle de limite nulle, donc ne peut être périodique.
$\star$ Enfin une suite de la forme $u_n = u_0(\mathrm{e}^{i\theta})^n$, est périodique de période $T$ si et seulement si $\mathrm{e}^{i\theta}$ est une racine $T^{\text{ème}}$ de l'unité, *i.e.* est de la forme $\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}}$.

c) $\star$ Soit $u$ une suite périodique de période $T$ telle que $u \in E_0$. Alors, pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, on a aussi $\sum\limits_{i=0}^{kT-1} u_i = 0$, et la condition de nullité est donc vérifiée pour toute période de $u$.
$\star$ Il est clair que si $u$ et $v$ sont périodiques, on peut choisir une période $T$ commune et si la somme de leurs $T$ premiers termes est nulle, il en est de même pour la somme des $T$ premiers termes de la suite $u + \lambda v$, pour tout scalaire $\lambda$. Donc $E_0$, qui est non vide, est un sous-espace vectoriel de $E$.

$\star$ Soit $u \in \mathrm{Vect}(a) \cap E_0$ ; $u$ est constante de somme nulle sur une période, donc est la suite nulle : $\mathrm{Vect}(a) \cap E_0 = \{0\}$.

$\star$ Soit $u \in E$ une suite périodique de période $T$ ; notons $S = \dfrac{1}{2T} \sum\limits_{i=0}^{T-1} u_i$.

En écrivant $u = (u - S.a) + S.a$, la suite $u - S.a$ est périodique de somme nulle sur une période, donc est élément de $E_0$, tandis que $S.a \in \mathrm{Vect}(a)$.
Ainsi
$$E = E_0 \oplus \mathrm{Vect}(a)$$

3. Si $u$ est périodique de période $T$, il en est de même de $n \mapsto u_{n+1}$ et $u'$ est $T$-périodique.

a) $\star$ $a$ est constante, donc $a'$ est la suite nulle. On a $b'_n = i^n(i-1)$, donc $b'$ est périodique de période 4.

$\star$ On note $D$ l'application qui à toute suite $u$ associe la suite $v$ définie par $v_n = u_{n+1}$ ($D$ pour «décalage»). Il est clair que l'application $D$ est linéaire et $f = D - Id$ est aussi linéaire. Donc $f$ est un endomorphisme de $E$ (on a d'ailleurs $f(E) \subset E_0$).

b) $u$ est un vecteur propre de $f$ associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ si $u$ est non nul et tel que :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \lambda u_n,\ i.e.\ u_{n+1} = (1+\lambda)u_n$$
Donc $u$ est géométrique de raison $1+\lambda$, et comme il faut que cette suite soit périodique, il existe $T \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $1 + \lambda = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}}$
$$\lambda \text{ est valeur propre de } f \iff \exists\, T \in \mathbb{N}^*, \exists\, k \in \mathbb{N}, \lambda = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{T}} - 1$$
Le sous-espace propre associé est alors la droite engendrée par la suite $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

---

**Exercice 2.6.**

On note $E$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments $M$ de $E$ tels que si $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3}$, alors $m_{1,2} = m_{1,3} = m_{2,1} = 0$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et donner sa dimension.

2. Soit $A \in E$ de rang égal à 1. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

a) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

b) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u \neq \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, u$. En déduire que $A$ est encore semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

3. On suppose que $A \in E$ est de rang 2. On note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A$.

a) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u = \{0\}$. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

b) On suppose que $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u \neq \{0\}$. Montrer que $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, u$. Soit alors $x$ un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, u$ et $y$ tel que $x = u(y)$. En utilisant ces deux vecteurs, montrer que $A$ est encore semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

4. Soit $A \in E$ admettant une valeur propre réelle. Montrer que $A$ est semblable à un élément de $\mathcal{F}$.

---

**Solution :**

1. Avec les notations habituelles concernant la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{2,3})$$

Cette famille étant libre, car extraite d'une base, ceci prouve que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de dimension 6.

2. a) Si $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, le théorème du rang assure que $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires. Soit alors $(e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $(e_1)$ soit une base de $\mathrm{Im}\, u$ et $(e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Le vecteur $u(e_1)$ étant colinéaire à $e_1$, la matrice de $u$ dans cette nouvelle base est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cette matrice est semblable à $A$ et appartient à $\mathcal{F}$.

b) Si $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) \neq \{0\}$, la droite $\mathrm{Im}\, u$ ($A$ est de rang 1) est contenue dans le plan $\mathrm{Ker}\, u$.
Soit alors $x$ un vecteur tel que $u(x) \neq 0$ ; comme $u(x) \in \mathrm{Im}\, u$, on peut compléter de façon à obtenir une base $(u(x), y)$ de $\mathrm{Ker}\, u$. La famille $(y, u(x), x)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$, car $x \notin \mathrm{Ker}\, u$ et la matrice de $u$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien encore une matrice de $\mathcal{F}$.

3. a) A nouveau $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$ et en construisant une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $(e_1)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, u$ et $(e_2, e_3)$ une base de $\mathrm{Im}\, u$, alors $M_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \star & \star \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix}$ qui est bien dans $\mathcal{F}$.

b) Cette fois, c'est la droite $\mathrm{Ker}\, u$ qui est contenue dans le plan $\mathrm{Im}\, u$.
Soit donc $(x)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$. Comme $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Im}\, u$, il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = u(y)$ et on peut compléter $(x)$ en une base $(x, t)$ de $\mathrm{Im}\, u$. Ainsi il existe $z \in \mathbb{R}^3$ tel que $t = u(z)$.

La famille $(z, x, y)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car la relation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ donne en appliquant $u$ : $\beta x + \gamma t = 0$, d'où $\beta = \gamma = 0$ et il reste $\alpha x = 0$, avec $x \neq 0$.

La matrice de $u$ relativement à cette base est de la forme $\begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ \star & 0 & 1 \\ \star & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et la deuxième étoile est de trop.

Ecrivons alors $u(z) = ax + by + cz$. En posant $z' = z - ay$, la famille $(z', x, y)$ est encore une base de $\mathbb{R}^3$ et $u(z') = by + cz = (b - ac)y + cz'$.

La matrice de $u$ relativement à la base $(z', x, y)$ est alors $\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b - ac & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien dans $\mathcal{F}$.

4. Si $A$ admet $\lambda \in \mathbb{R}$ pour valeur propre, alors $A - \lambda I_3$ est de rang 0 (si $A = \lambda I$) ou de rang 1 ou 2. Dans tous les cas, $A - \lambda I_3$ est semblable à une matrice $B \in \mathcal{F}$.
Alors $A$ est semblable à $B + \lambda I_3$ qui appartient encore à $\mathcal{F}$.

---

**Exercice 2.7.**

Soit $M$ une matrice carrée d'ordre $n \geqslant 3$, à coefficients réels, telle que :

— la famille $(I_3, M, M^2)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ;
— on a : $M^3 = M^2 - 2M - 4I_3$.

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles de $f$ ? L'endomorphisme $f$ est-il diagonalisable ?

2. a) Montrer que les sous-espaces $\operatorname{Ker}(f + Id)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ sont en somme directe et que $\operatorname{Im}(f + Id) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

b) En déduire que $\operatorname{Ker}(f + Id)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $\operatorname{Im}(f + Id) = \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

4. Montrer que si $e_1$ est un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$, alors $\big(e_1, f(e_1)\big)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

5. Dans cette question, on suppose $n = 3$ et que $-1$ est valeur propre de $f$.
Déterminer les dimensions de $\operatorname{Ker}(f + Id)$ et $\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$.

---

**Solution :**

1. Le polynôme $X^3 - X^2 - 2X - 4 = (X + 1)(X^2 - 2X + 4)$ est un polynôme annulateur de $f$.
Comme $X^2 - 2X + 4 = (X - 1)^2 + 3$, la seule valeur propre réelle possible de $M$ est $\lambda = -1$, ce qui montre que $f$ n'est pas diagonalisable, car autrement $f$ serait égal à $-Id$ et $M$ et $I_3$ seraient alors liées.

2. a) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f+I) \cap \operatorname{Ker}(f^2-2f+4I)$. On a alors $f(x) = -x$, $f^2(x) = x$ et $0 = (f^2 - 2f + 4I)(x) = 7x$. Donc $x = 0$.
De plus $(f^2 - 2f + 4I) \circ (f + Id) = 0$ entraîne :

$$\operatorname{Im}(f + Id) \subseteq \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id).$$

b) Par la question précédente et le théorème du rang :

$$\begin{aligned} n &= \dim \operatorname{Im}(f + Id) + \dim \operatorname{Ker}(f + Id) \\ &\leqslant \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) + \dim \operatorname{Ker}(f + Id) \\ &\leqslant \dim(\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id)) \leqslant n \end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id)) = n$, ce qui montre que

$$\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4I) \oplus \operatorname{Ker}(f + I) = E.$$

3. Par le théorème du rang et les deux questions précédentes, on obtient :

$$n = \dim \operatorname{Im}(f + Id) + \dim \operatorname{Ker}(f + Id)$$

$$n = \dim \operatorname{Ker}(f + Id) + \dim(\operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$$

d'où $\dim \operatorname{Im}(f + Id) = \dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id)$ et l'inclusion vue en 2. a) donne :

$$\operatorname{Im}(f + Id) = \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + 4Id).$$

4. Supposons que la famille $(e_1, f(e_1))$ soit liée. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$. Donc $\lambda = -1$ et $(f^2 - 2f + 4Id)(e_1) = 6e_1 = 0$ : contradiction.

5. Lorsque $n = 3$ et $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) \neq 0$, on a les cas suivants :

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 3$. Alors $f = -Id$, ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 2$. Alors $\dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + Id) = 1$, en contradiction avec la question précédente.

• $\dim \operatorname{Ker}(f + Id) = 1$. Alors $\dim \operatorname{Ker}(f^2 - 2f + Id) = 2$, ce qui est possible.

On peut proposer par exemple $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

---

**Exercice 2.8.**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u$ un endomorphisme non nul de $E$ tel que, pour tout vecteur $x \in E$, il existe un entier naturel $q_x \geqslant 1$ tel que $u^{q_x}(x) = 0$.

Montrer qu'il existe un entier $q \geqslant 2$ tel que pour tout $x \in E$, $u^q(x) = 0$.

Soit alors $p$ l'unique entier naturel tel que $p \geqslant 2$, et $u^p = 0$, $u^{p-1} \neq 0$.

2. Déterminer les valeurs propres de $u$. L'endomorphisme $u$ est-il diagonalisable ?

3. Soit $v$ l'application définie par : $v = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{u^k}{k!}$.

a) Montrer que $v$ est bien définie et est un endomorphisme de $E$.

b) Montrer que $v$ est inversible. Déterminer son inverse en fonction de $u$.

4. a) Déterminer une relation entre $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Ker}(v - Id)$.

b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de $v$.

5. Dans cette question $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n$. On définit $u$ par :

$$u : P \mapsto Q(X) = P(X + 1) - P(X)$$

Montrer que $u$ est un endomorphisme de $E$ vérifiant les hypothèses de l'exercice.

---

**Solution :**

1. On suppose que $E$ est de dimension $n$ et que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $E$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit $q_i \geqslant 1$ tel que $u^{q_i}(e_i) = 0$. Soit $q = \max(q_i)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a alors :

$$u^q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u^q(e_i) = 0$$

Ainsi il existe $q \geqslant 1$ tel que $u^q = 0$. On pose $p = \min\{q \geqslant 1 \mid u^q = 0\}$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $u$. Il existe $x \neq 0$ de $E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Donc, $0 = u^p(x) = \lambda^p x$, ce qui entraîne que $\lambda^p = 0$ et $\lambda = 0$. La seule valeur propre possible est donc 0.
En fait, 0 est effectivement valeur propre de $u$ puisque $u^p = 0$ entraîne que $u$ n'est pas inversible et donc que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$.

3. a) En fait $v = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{u^k}{k!}$ ; c'est donc un endomorphisme de $E$.

b) Soit $x \in \operatorname{Ker} v$. On a alors

$$x + u(x) + \cdots + \frac{u^k}{k!}(x) + \cdots + \frac{u^{p-1}}{(p-1)!}(x) = 0$$

On applique $u^{p-1}$ à cette égalité : il vient $u^{p-1}(x) = 0$, donc il reste

$$x + u(x) + \cdots + \frac{u^k}{k!}(x) + \cdots + \frac{u^{p-2}}{(p-2)!}(x) = 0$$

On applique alors $u^{p-2}$ : il vient $u^{p-2}(x) = 0$, etc. A la fin de ce processus, on obtient $x = 0$ et $\operatorname{Ker} v = \{0\}$.

Il reste à vérifier que $v^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{u^k}{k!}$.

Pour cela, on considère la composée $v \circ \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{u^k}{k!}$, et un calcul immédiat donne l'identité.

4. a) Si $u(x) = 0$, alors $(v - Id)(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k}{k!}(x) = 0$.
Donc $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v - Id)$.

b) La question précédente montre que 1 est valeur propre de $v$.

Soit $\lambda \neq 1$ une valeur propre éventuelle de $v$ et $x$ un vecteur propre associé ($v(x) = \lambda x$). On a alors :

$$(\lambda - 1)x = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{u^k}{k!}(x)$$

En appliquant $u^{p-1}$ ; il vient $(\lambda - 1)u^{p-1}(x) = 0$, donc $u^{p-1}(x) = 0$, qu'on réinjecte dans l'équation de départ, soit :

$$(\lambda - 1)x = \sum_{k=1}^{p-2} \frac{u^k}{k!}(x)$$

En recommençant ce processus, il vient $x = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

La seule valeur propre de $v$ est donc 1.

5. L'application $u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, puisque $\deg(u(P)) < \deg(P)$.

C'est un endomorphisme nilpotent pour la même raison ; à chaque composition par $u$, on abaisse le degré de $P$ d'au moins une unité (en fait exactement d'une unité tant que l'on n'a pas un polynme constant). Comme $u^n(X^n) \neq 0$, on a $u^{n+1} = 0$ et $u^n \neq 0$.

---

**Exercice 2.9.**

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice de terme général $a_{i,j}$ défini par :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], a_{i,i} = i \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \implies a_{i,j} = 1$$

1. Montrer que $A$ est diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $s = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$. Montrer que :

$$AX = \lambda X \text{ si et seulement si } \begin{cases} s & = \lambda x_1 \\ s & = (\lambda - 1)x_2 \\ \vdots & \qquad \vdots \\ s & = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$$

3. Montrer que si $\lambda$ est une valeur propre de $A$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$.

4. Établir la réciproque de la question précédente, à savoir :
   si $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$, alors $\lambda$ est une valeur propre de $A$.

5. En déduire que $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes.

---

**Solution :**

1. La matrice $A$ est symétrique, réelle et est donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. L'équation $AX = \lambda X$ s'écrit comme le système d'équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \lambda x_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + nx_n = \lambda x_n \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} s = \lambda x_1 \\ s = (\lambda - 1)x_2 \\ \qquad \vdots \\ s = (\lambda - n + 1)x_n \end{cases}$$

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ un vecteur propre associé.

S'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\lambda = k - 1$, alors, en utilisant la $k$-ième équation, on a $s = 0$ et $x_i = 0$, pour tout $i \neq k$ ; donc comme $s = 0$, $x_k = 0$ et $X = 0$.

Donc, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\lambda \neq k-1$ et le système d'équations précédent est équivalent au système :

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\lambda} = x_1 \\ \dfrac{s}{\lambda - 1} = x_2 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{s}{\lambda - n + 1} = x_n \end{cases}$$

avec $s \neq 0$. En sommant toutes ces équations, il vient : $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = 1$.

4. Réciproquement, l'équation $AX = \lambda X$ reste équivalente au système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{s}{\lambda} = x_1 \\ \dfrac{s}{\lambda - 1} = x_2 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{s}{\lambda - n + 1} = x_n \end{cases}$$

ce système est équivalent au système obtenu en gardant les $(n-1)$ premières équations et l'équation obtenue en les sommant toutes, soit $s \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\lambda - k} = s$. Cette dernière équation étant vérifiée, ce système est un système homogène à $n$ inconnues et $n-1$ équations ; il admet une solution non triviale.

5. La fonction $f : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{x-k} - 1$ est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{0, \ldots, n-1\}$ et est une bijection de chaque intervalle $]k, k+1[$ $(k \in [\![1, n-1]\!])$ sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule donc exactement une fois sur chacun de ces intervalles. De plus, $f(]-\infty, 0[) = ]-\infty, -1[$ et $f(]n-1, +\infty[) = ]-1, +\infty[$.

Dans ce dernier intervalle se trouve le $n$-ième zéro de $f$.

---

**Exercice 2.10.**

On désigne par $\mathcal{P}$ l'espace des polynômes à coefficients réels (on confondra polynôme et fonction polynomiale associée). Pour tout couple $(p, q)$ d'éléments de $\mathcal{P}$, on pose :

$$\langle p, q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

1. Montrer que l'intégrale précédente est convergente et que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{P}$.

2. Soit $(T_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par :

$$\begin{cases} T_0 = 1, T_1 = X \\ \forall\, n \geqslant 1, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1} \end{cases}$$

a) Vérifier que $T_n$ est un polynôme de degré $n$. Déterminer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

b) Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ et tout $t$ réel, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

c) Montrer que la suite $(T_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite orthogonale de $(\mathcal{P}, \langle ., . \rangle)$. Quelle est la norme de $T_n$ ?

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace de $\mathcal{P}$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_n$ de $\mathcal{P}_n$ tel que :

$$\forall\, p \in \mathcal{P}_n, \langle p, P_n \rangle = p(1)$$

b) Donner les coordonnées de $P_n$ dans la base $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ de $\mathcal{P}_n$. En déduire que la norme de $P_n$ vaut $\sqrt{\dfrac{2n+1}{\pi}}$.

c) Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $(1-x)P_n = aT_n + bT_{n+1}$.

---

**Solution :**

1. $P$ et $Q$ sont des fonctions polynômes, donc sont continues sur le segment $[0,1]$ et en posant $C = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |PQ(x)|$, on a : $\dfrac{|P(x)Q(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\star$ La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$.

$\star$ Au voisinage de 1 elle est équivalente à $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2(1-x)}}$, et $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$ est convergente (intégrale de référence de Riemann). On conclut de même au voisinage de $-1$, par parité de $f$.

Ainsi $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est bien définie (l'intégrale est même absolument convergente).

La bilinéarité de $\langle .,.\rangle$ est claire, ainsi que la positivité, et :

$$\langle P,P\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$$

entraîne, par positivité de $\sqrt{1-x^2}$ sur $]-1,1[$, que $P$ est identiquement nul sur $]-1,1[$ donc a une infinité de racines et est le polynôme nul.

$$\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{P}$$

2. a) $\star$ On montre par une récurrence simple que $T_n$ est un polynôme de degré $n$.

$\star$ Comme $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1)$, les conditions initiales $T_0(1) = T_1(1) = 1$ donnent $T_n(1) = 1$.

$\star$ De même $T_n(-1) = (-1)^n$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

- Le résultat est banal pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Supposons le résultat acquis pour tout $k \leqslant n$. Alors

$$T_{n+1}(\cos t) = 2\cos t\cos(nt) - \cos((n-1)t) = \cos((n+1)t)$$

( en utilisant la formule trigonométrique

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)\ )$$

c) Dans l'intégrale définissant le produit scalaire, on effectue le changement de variable $x = \cos t$ qui est de classe $C^1$ et bijectif de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Il vient, pour tout $m,n$ de $\mathbb{N}$ :

$$\langle T_n, T_m\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \frac{T_n(\cos t)T_m(\cos t)}{\sin t}(\sin t)\,dt$$

$$= \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \big(\cos(n+m)t + \cos(n-m)t\big)\,dt$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \pi/2 & \text{si } n = m \neq 0 \\ \pi & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

3. a) Soit $\varphi$ la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P(1)$. Son noyau est l'hyperplan formé des polynômes $Q$ tels que $Q(1) = 0$, soit $Q(X) = (X-1)R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Comme $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = n$, il existe $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\mathbb{R}_n[X] = \operatorname{Ker}\varphi \oplus^{\perp} \operatorname{Vect}(P_0),$$

(donc $P_0(1) \neq 0$).
De plus, pour tout $p \in \mathbb{R}_n[X]$, il existe $q \in \operatorname{Ker}\varphi$ et $\lambda$ réel (uniques) tels que $p = q + \lambda P_0$. Ainsi $p(1) = q(1) + \lambda P_0(1) = \lambda P_0(1)$ et $\langle p, P_0\rangle = \lambda ||P_0||^2$. On choisit alors :

$$P_n(X) = P_0(1)\frac{P_0(X)}{||P_0||^2}.$$

Le polynôme $P_n$ ainsi défini est unique. En effet, supposons qu'il en existe un second $Q_n$, alors $P_n - Q_n$ est orthogonal à tout $\mathbb{R}_n[X]$ donc est identiquement nul.

b) On écrit $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(X)$. Aussi, pour tout $k \in [0, n]\!]$

$$1 = T_k(1) = \langle P_n, T_k\rangle = a_k ||T_k||^2$$

Donc

$$P_n = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{T_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k\Big)$$

et

$$P_n(1) = \langle P_n, P_n\rangle = ||P_n||^2 = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{T_0(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} T_k(1)\Big) = \frac{2n+1}{\pi}$$

c) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\langle (1-X)P_n, T_k\rangle = \langle P_n, (1-x)T_k\rangle = (1-X)T_k(X)_{|X=1} = 0$$

On décompose le polynôme $(1-X)P_n$ de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ dans la base orthogonale $(T_0, \ldots, T_{n+1})$. La relation précédente montre que les coordonnées sur $T_0, \ldots, T_{n-1}$ sont nulles et qu'il existe deux réels $a, b$ (qui dépendent a priori de $n$) tels que

$$(1-X)P_n = aT_n + bT_{n+1}.$$

Pour déterminer $a$ et $b$, il suffit de trouver deux équations indépendantes : par exemple en particularisant l'égalité $(1-X)P_n = aT_n + bT_{n+1}$ en substituant à $X$ les valeurs 1 et $-1$.

---

**Exercice 2.11.**

Soit $E$ un espace vectoriel réel.
1. Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie, et $L$ l'application de $F \times G$ vers $E$ définie par $L(x, y) = x + y$.

a) Déterminer le noyau de $L$.

b) En déduire que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

2. a) Dans cette question, on suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $f$ et $g$ deux endomorphismes de $E$ tels que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) \qquad (*).$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

b) Donner un exemple de deux endomorphismes $f$ et $g$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant la relation $(*)$ et tels que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.(1, 1, \ldots, 1)$.

3. Soit $\Gamma$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par : $\Gamma(P) = P''$.

a) Déterminer $\mathrm{Im}(\Gamma)$ et $\mathrm{Ker}(\Gamma)$.

b) Montrer qu'il existe deux endomorphismes $f$ et $g$ de $E$ vérifiant la relation $(*)$ et tels que aucune des deux sommes de $(*)$ ne soit directe.

---

**Solution :**

1. a) On a : $\mathrm{Ker}\, L = \{(x, y) \in E \times F / x = -y\} = F \cap G$.
(on montre cette dernière égalité par double inclusion).

b) On sait que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ et que $\mathrm{Im}(L) = F + G$. Le théorème du rang donne

$$\dim F + \dim G = \dim(F \cap G) + \dim(F + G)$$

Pour montrer que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$, on montre que $F \times G$ est isomorphe à $F \times \{0\} \oplus \{0\} \times G$ par l'application $\theta : (x, y) \to (x, 0) + (0, y)$, (on peut aussi revenir à des bases de $F$ et $G$).

2. a) On utilise le théorème du rang. On a :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = 2n$$

Par la question précédente :

$$\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, g) = n - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g)$$

et :

$$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g)$$

Donc

$$2n - \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) - \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 2n$$

et

$$\dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) + \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$
$$\Longrightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g) = \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = 0$$

b) On note $e_1 = (1, 1, \ldots, 1)$ qu'on complète en $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de $\mathbb{R}^n$. Les applications $f$, définie comme la projection sur $\mathrm{Vect}(e_1)$ et $g$, définie comme la projection sur $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_n)$ conviennent.

3. a) On a évidemment $\mathrm{Im}\, \Gamma = \mathbb{R}[X]$ et $\mathrm{Ker}\, \Gamma = \mathbb{R}_1[X]$.

b) On prend $f = \Gamma$ et $g : P \longmapsto P(0)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_0[X], \quad \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(X, \ldots, X^n)$$

Donc $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}_0[X]$ et $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Vect}(X)$.

---

**Exercice 2.12.**

Dans cet exercice $n$ désigne un entier naturel non nul et $E$ un espace euclidien de dimension $n$ dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Un vecteur de $E$ est dit unitaire s'il est de norme égale à 1.

1. Soit $k$ un réel et $A$ la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$ tel que pour tout couple $(i,j)$ d'entiers compris entre 1 et $n+1$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer pour quelles valeurs de $k$ la matrice $A$ est non inversible.

2. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs unitaires de $E$, tels que, pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,n]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = k$.

a) Justifier l'existence de $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

b) Déduire de ce qui précède que $k \in \left\{1, -\frac{1}{n}\right\}$.

c) Montrer que si $k \neq 1$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de $E$.

3. Montrer que si $n = \dim E = 2$, il existe trois vecteurs unitaires $x_0, x_1, x_2$ de $E$ tels que pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,2]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\frac{1}{2}$.

4. On se propose de montrer le résultat analogue en dimension 3.

a) Montrer que si $n = \dim E = 3$ et que $x_0, x_1, x_2, x_3$ sont 4 vecteurs unitaires de $E$ tels que pour tout couple $(i,j)$ d'indices distincts de $[\![0,3]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\frac{1}{3}$, on peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille $(x_1, x_2, x_3)$.

b) Exprimer alors les vecteurs $x_0, x_1, x_2, x_3$ dans la base orthonormée ainsi construite.

c) Conclure.

---

**Solution :**

1. Notons que l'on a : $A = kJ + (1-k)I_{n+1}$, où $J$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Des calculs simples montrent que les valeurs propres de $J$ sont 0 et $n+1$ (on a $J^2 = (n+1)J$), par conséquent les valeurs propres de $A$ sont $1-k$ et $k(n+1) + (1-k) = kn+1$.

$A$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de $A$, soit si et seulement si $k \neq 1$ et $k \neq -\frac{1}{n}$.

2. a) La famille $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de $(n+1)$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n$ : elle est donc liée.

b) Par conséquent, il existe $(n+1)$ scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Ceci entraîne que, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$ :

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$$

et comme $\langle x_i, x_i\rangle = 1$, $i \neq j \implies \langle x_i, x_j\rangle = k$, le système précédent s'écrit :

$$A\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

Comme ce système a une solution non triviale, $A$ n'est pas inversible et $k \in \{0, -\dfrac{1}{n}\}$.

c) Toute sous-famille de $n$ vecteurs, par exemple $(x_1, \dots, x_n)$ est libre car, si $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont des scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i x_i = 0$, alors pour tout $j$ de $[\![1, n]\!]$, on a : $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i \langle x_i, x_j\rangle = 0$, ce qui conduit à un système du même type, avec une matrice $A'$ d'ordre $n$. La première question montre que $A'$ est inversible, puisque $k = -\dfrac{1}{n}$ donc est différent de $-\dfrac{1}{n-1}$. Ainsi les coefficients $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont tous nuls et $(x_1, \dots, x_n)$ est libre de cardinal ad hoc, donc est une base de $E$.

3. Si $(e_1, e_2)$ est une base orthonormée de $E$, il suffit de poser :

$$x_0 = e_1,\ x_1 = -\frac{1}{2}\,e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_2 \text{ et } x_2 = -\frac{1}{2}\,e_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\,e_2$$

(pensez aux nombres complexes $1, j$ et $j^2$).

4. a) On sait que la famille $(x_1, x_2, x_3)$ est libre. On peut donc lui appliquer le processus de Gram Schmidt ; on obtient une base $(e_1, e_2, e_3)$ orthonormée de $E$ telle que pour tout $i \in [\![1, 3]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_i)$, avec $\langle x_i, e_i\rangle > 0$.

b) En appliquant ce processus, les formules de Gram-Schmidt donnent :

$$\begin{cases} x_1 = e_1\\ x_2 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}e_2\\ x_3 = -\frac{1}{3}e_1 + \big(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\big)e_2 + \big(\frac{7-\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2}\big)e_3\\ x_0 = -\frac{1}{3}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}e_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_3 \end{cases}$$

c) Réciproquement, en partant d'une base orthonormée de $E$, on définit les quatre vecteurs $x_0, \dots, x_3$ ci-dessus. On vérifie ensuite que ces vecteurs répondent à la question.

---

**Exercice 2.13.**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n \geqslant 3$.
On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. On confondra $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $S = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^2 = M \text{ et } M^T = M\}$,

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels et $M^T$ désigne la transposée de $M$.

1. a) Montrer que pour tout $M \in S$, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a : $X^T M X \geqslant 0$.

b) Caractériser $\{X \in \mathbb{R}^n / X^T M X = 0\}$.

2. Soit $(P, Q) \in S^2$ vérifiant la propriété $(\star)$ suivante : pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T(P - Q)X \geqslant 0$.

a) On note $p$ et $q$ les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$, canoniquement associés à $P$ et $Q$. Montrer que $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} q$.

b) En déduire que $Q = QP$ et $Q = PQ$.

c) Montrer que $(P - Q) \in S$ et $(I - P + Q) \in S$, où $I$ représente la matrice identité.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P - Q)^n \in S$ et $P^n - Q^n \in S$.

3. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$A_r = \sum_{k=0}^{r} (P^k - Q^k), B_s = \sum_{k=0}^{s} (P - Q)^k$$

a) Simplifier les expressions de $A_r$ et $B_s$

b) Déterminer les matrices $P$ et $Q$ telles que $A_r$ soit inversible.

c) Exprimer $B_s^2$ en fonction de $B_s$ et $I$. En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $B_s$ est inversible et déterminer son inverse $B_s^{-1}$.

d) Montrer que quels que soient $r \geqslant 1, s \geqslant 1$, les matrices $A_r$ et $B_s$ sont diagonalisables.

---

**Solution :**

1. a) On peut écrire

$$X^T MX = X^T M^2 X = X^T M^T MX = (MX)^T (MX) = ||MX||^2 \geqslant 0$$

b) Ainsi $X^T MX = 0$ si et seulement si $MX = 0$, si et seulement si $X$ appartient à $\operatorname{Ker} M$.

2. a) La relation donnée s'écrit également $X^T PX \geqslant X^T QX$. Donc si $X \in \operatorname{Ker} P$, on a $X^T PX = 0$ ce qui entraîne que $0 \leqslant X^T QX \leqslant 0$, donc que $X \in \operatorname{Ker} Q$.

b) Les endomorphismes $p$ et $q$ étant des projecteurs, on sait que $E = \operatorname{Ker} P \oplus \operatorname{Im} P$ et que si $X \in \operatorname{Im} P$, alors $PX = X$.
Donc, si $X \in \operatorname{Ker} P$, $QPX = 0$ et par la question précédente, $QX = 0$, et si $X \in \operatorname{Im} P$, $QPX = QX$. Donc, par linéarité, pour toute colonne $X$, $QX = QPX$ et $Q = QP$.
Enfin , par transposition $Q = Q^T = P^T Q^T = PQ$.

c) La transposition est linéaire et comme $PQ = QP$, on a $(P-Q)^2 = P-Q$. De même pour $I - (P - Q)$ qui est le projecteur supplémentaire de $P - Q$.

d) Comme $(P - Q)^2 = P - Q$, pour tout $n \geqslant 1$, $(P - Q)^n = P - Q \in S$, et ceci reste vérifié pour $n = 0$ ($(P - Q)^0 = I \in S$).
Comme $P^2 = P, Q^2 = Q$, on a en fait pour tout $n \geqslant 2$, $P^n = P, Q^n = Q$, donc $P^n - Q^n = P - Q \in S$, et ceci reste vérifié pour $n = 1$.

3. a) On a

$$A_r = I - I + (P - Q) + \sum_{2}^{r} (P - Q) = r(P - Q), \text{ et } B_s = I + s(P - Q)$$

b) La matrice $A_r$ est inversible si et seulement si $P-Q$ est inversible. Or $P-Q$ est un projecteur ; donc $P-Q$ est inversible si et seulement si $P-Q=I$.

c) On a

$$B_s^2 = I + 2s(P-Q) + s^2(P-Q) = (s+2)B_s - (s+1)I$$

Donc

$$(B_s-(s+2)I)\times\Big(\frac{-1}{s+1}B_s\Big) = I$$

d) La matrice $P-Q$ étant symétrique réelle, elle est diagonalisable ; il en est de même pour $A_r$ et $B_s$.

---

**Exercice 2.14.**

Soit $n \geqslant 2$. A tout polynome $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $T(P)$ défini par :

$$T(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} P\Big(\frac{k}{n}\Big)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}.$$

On note, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k(X) = X^k$.

1. Montrer que $T$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a) Calculer $T(P_0)$ et $T(P_1)$.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $Q(X) = XP(X)$.

Montrer que : $T(Q)(X) = \dfrac{X(1-X)}{n}\big(T(P)\big)'(X) + X.T(P)(X)$.

c) Montrer que pour $0 \leqslant k \leqslant n$ , $T(P_k)$ est un polynôme de degré $k$ dont le coefficient dominant est $a_k = \dfrac{n!}{n^k(n-k)!}$ .

d) $T$ est-il diagonalisable ?

3. a) Calculer $T(P_2)$.

b) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ , $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(\frac{k}{n}-x\big)^2 x^k(1-x)^{n-k}$.

c) En déduire que :

$$\forall x \in [0,1], 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big(\frac{k}{n}-x\Big)^2 x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

---

**Solution :**

1. L'application $T$ est clairement linéaire et comme, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(X^k(1-X)^{n-k}) = n$, $T(P)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n$.

2. a) On a immédiatement :

$$T(P_0)(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = (X+1-X)^n = 1$$

et

$$T(P_1)(X) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}X^k(1-X)^{n-k} = X$$

b) On a : :

$$(T(P))'(X) = \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)k\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k}$$
$$- \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)(n-k)\binom{n}{k}X^{k-1}(1-X)^{n-k-1}$$

et :

$$\begin{aligned}\frac{X(1-X)}{n}(T(P))'(X) &= \sum_{k=1}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k+1}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-1} P\big(\frac{k}{n}\big)\big(1-\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}X^{k+1}(1-X)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\frac{k}{n}\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k}\\ &\quad - X\sum_{k=0}^{n} P\big(\frac{k}{n}\big)\binom{n}{k}X^{k}(1-X)^{n-k}\\ &= T(Q)(X) - XT(P)(X)\end{aligned}$$

c) On sait que $T(P_0)(X) = 1$. Supposons que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $T(P_j)$ soit un polynôme de degré $k$ et de coefficient dominant $\dfrac{n!}{n^j(n-j)!}$.
Comme $P_{k+1} = XP_k$, la relation précédente donne :

$$T(P_{k+1})(X) = \frac{X(1-X)}{n}(T(P_k))'(X) + XT(P_k)(X)$$

et le coefficient de $X^{k+1}$ dans $T(P_{k+1})$ est :

$$a_{k+1} = -\frac{1}{n}ka_k + a_k = \frac{n!}{n^{k+1}(n-k-1)!}$$

d) La matrice associée à l'application $T$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale :

$$\big(1, 1, \frac{n!}{n^2(n-2)!}, \dots, \frac{n!}{n^k(n-k)!}, \dots, \frac{n!}{n^n}\big)$$

Ses valeurs propres se lisent sur cette diagonale, ces coefficients sont distincts, hormis les deux premiers qui sont égaux à 1. Or la question 2.a montre que 1 et $X$ sont vecteurs propres de $T$ associés à la valeur propre 1. L'endomorphisme $T$ est donc diagonalisable.

3. a) On applique le résultat de la question 2.a. Il vient

$$T(P_2)(X) = \frac{X(1-X)}{n} + X^2$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\big(\frac{k}{n}-x\big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= T(P_2)(x) - 2xT(P_1)(x) + x^2T(P_0)(x)\\ &= \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

c) Comme $\sup\limits_{x\in[0,1]}(x(1-x)) = \dfrac{1}{4}$, il vient :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\big(\frac{k}{n}-x\big)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n}$$

**Exercice 2.15.**

Soit $n$ un entier $\geqslant 2$.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :
$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i=1 \text{ ou } i=n \text{ ou } j=1 \text{ ou } j=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $A$.

1. Diagonaliser $A$, dans le cas $n = 2$.

*Dans la suite on suppose $n \geqslant 3$.*

2. a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
 b) Comparer $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.
 c) Diagonaliser $f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ (endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ induit par $f$).
 d) Diagonaliser $A$.

On considère l'équation $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Dans cette question, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une solution particulière de cette équation et en déduire sa solution générale.

b) Donner la forme générale des matrices $B$ pour lesquelles le problème admet au moins une solution. Quelle est alors la solution générale de l'équation ?

c) On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Pour $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
existe-t-il des vecteurs $X$ qui minimisent $\|AX - B\|$ ? Si oui, les déterminer.

---

**Solution :**

1. Dans le cas où $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de rang 1, donc 0 est valeur propre et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Comme $A$ est symétrique réelle, on sait que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui est orthogonal au précédent vecteur, est également un vecteur propre. La valeur propre associée est 2.
En conclusion, la matrice symétrique réelle est diagonalisable ; ses valeurs propres sont 0 et 2, de vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. a) La matrice $A$ est clairement de rang 2, car ses deux premières colonnes forment une famille libre, alors que les autres colonnes sont liées à ces deux premières colonnes.
Ainsi, $\dim \operatorname{Ker} f = n-2$, et par définition de la matrice associée à un endomorphisme dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$, une base de $\operatorname{Ker} f$ est :

$$(e_2 - e_2, e_4 - e_2, \ldots, e_{n-1} - e_2, e_n - e_1)$$

b) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} n & 2 & \ldots & 2 & n \\ 2 & & \ldots & & 2 \\ \vdots & & 2 & & \vdots \\ 2 & & \ldots & & 2 \\ n & 2 & \ldots & 2 & n \end{pmatrix}$

On remarque que $\dim \operatorname{Ker} f^2 = n-2$, et comme, pour tout endomorphisme, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker} f^2$, il vient ici $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Alors $x = f(y)$ et $f(x) = 0$. Donc $f^2(y) = f(x) = 0$, ce qui entraîne que $y \in \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$, donc que $x = f(y) = 0$. On termine cette question à l'aide du théorème du rang.

c) Notons $\tilde{f}$ l'endomorphisme de $\operatorname{Im} f$ induit par $f$. L'endomorphisme $\tilde{f}$ agit sur un espace de dimension 2 et dans la base de $\operatorname{Im} f$ déterminée dans la question précédente, sa matrice associée est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ n-2 & 0 \end{pmatrix}$.

On détermine ses valeurs propres par la méthode du pivot (par exemple) et on trouve :

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2n-3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2n-3}$$

Cette matrice étant diagonalisable (deux valeurs propres distinctes), l'endomorphisme $\tilde{f}$ est diagonalisable dans une base $(u_1, u_2)$ de $\operatorname{Im} f$.

d) Dans la base $(u_1, u_2)$ complétée par une base de $\operatorname{Ker} f$, les questions précédentes montrent que $f$ est diagonalisable et que la matrice $A$ est semblable à la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1+\sqrt{2n-3}, 1-\sqrt{2n-3}, 0, \ldots, 0)$.

3. a) On remarque que $B = f(5e_1 - 4e_2)$. Le vecteur $X_0 = 5e_1 - 4e_2$ est donc solution de l'équation $AX = B$. L'ensemble des solutions de cette équation est alors $X_0 + \operatorname{Ker} f$.

b) L'équation $AX = B$ admet une solution si et seulement si $B$ appartient à $\operatorname{Im} f$ ; donc lorsque le vecteur $B$ est de la forme : $\begin{pmatrix} \lambda+\mu \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ \lambda+\mu \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, la solution générale appartient à $\lambda e_1 + \mu e_2 + \operatorname{Ker} f$.

c) On sait que $||AX - B||$ est minimal pour $X_0$ égal à la projection orthogonale de $B$ sur $\operatorname{Im} f$. Pour déterminer cette projection, on écrit $B = \alpha u_1 + \beta u_2 + v$, avec $v \in [\operatorname{Vect}(u_1, u_2)]^\perp$. On résout alors le système :

$$\begin{cases} \langle B, u_1 \rangle = \alpha \langle u_1, u_1 \rangle + \beta \langle u_1, u_2 \rangle \\ \langle B, u_2 \rangle = \alpha \langle u_1, u_2 \rangle + \beta \langle u_2, u_2 \rangle \end{cases} \text{c'est-à-dire : } \begin{cases} 1 = n\alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

dont la solution est $\alpha = 0$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$.

Les solutions sont les antécédents du vecteur $\frac{u_2}{2}$.

On résout donc l'équation $AX = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On trouve comme condition $\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{2}$.

---

**Exercice 2.16.**

On note $E$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $n$ entier naturel, $F_n$ est le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à $n$.

On munit $E$ du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ défini par :

$$\forall (f, g) \in E^2, \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$$

1. Soit $g$ l'élément de $E$ défini par : $\forall\, t \in [-1, 1], g(t) = t^3 - \frac{3}{5}\,t$.
Montrer que $g$ est orthogonal à tout élément de $F_2$.

2. Montrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c)$ de réels, que l'on déterminera, tel que pour tout $P$ de $F_2$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = aP\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) + bP(0) + cP\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)$$

3. Si $(a, b, c)$ est le triplet déterminé à la question précédente, montrer que pour tout $P$ de $F_5$ :

$$\int_{-1}^{1} P(t)\,dt = aP\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) + bP(0) + cP\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)$$

4. Montrer que l'application $\theta : F_2 \to \mathbb{R}^3, P \mapsto \big(P\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big), P(0), P\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\big)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^3$. On note $P = \theta^{-1}\big(f\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big), f(0), f\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\big)$.

a) Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, il existe $c \in ]-1, 1[$ tel que :

$$f(t) = P(t) + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}\,g(t)$$

[Pour cela, si $t$ fixé n'est pas une racine de $g$, on pourra introduire la fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - P(x) - A.g(x)$, où $A$ est tel que $\varphi(t) = 0$, et appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.]

b) En déduire l'existence d'un réel positif $M$ indépendant de $f$ tel que si $(a, b, c)$ désigne le triplet déterminé à la question 2 :

$$\Big|\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - af\big(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big) - bf(0) - cf\big(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\big)\Big| \leqslant M. \max_{u \in [-1,1]} |f^{(3)}(u)|$$

---

**Solution :**

1. Il suffit de vérifier que :

$$\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)dt=\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)t\,dt=\int_{-1}^{1}(t^3-\frac{3}{5}t)t^2\,dt=0$$

seule la deuxième intégrale demande un petit calcul (ne pas oublier que si $h$ est une fonction impaire, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(t)\,dt=0$).

2. L'égalité $\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)dt=aP\big(-\sqrt{\frac{3}{5}}\big)+bP(0)+cP\big(\sqrt{\frac{3}{5}}\big)$ est vérifiée pour tout $P\in F_2$ si et seulement si elle est vérifiée pour $P(t)=1$, $P(t)=t$ et $P(t)=t^2$.

Cela conduit au système $\begin{cases}2=a+b+c\\ 0=-\sqrt{\frac{3}{5}}\,a+\sqrt{\frac{3}{5}}\,c\\ \frac{2}{3}=\frac{3}{5}a+\frac{3}{5}c\end{cases}$, qui donne :

$$a=c=\frac{5}{9},b=\frac{8}{9}$$

3.Il suffit maintenant de le vérifier pour $P(t)=t^4$ et $P(t)=t^5$, ce qui ne pose pas de problème.

4. On sait que $\dim F_2=\dim\mathbb{R}^3=3$. Il est évident que l'application $\theta$ est linéaire. Pour montrer que c'est un isomorphisme, montrons que son noyau est réduit au vecteur nul.
En effet, si $P\in\operatorname{Ker}\theta$, alors, le polynôme $P$ qui est de degré au plus 2, admet 3 racines distinctes : c'est le polynôme nul.

5. a) Soit $t\in[-1,1]$ fixé.
• Si $t$ est une des racines de $g$, l'égalité est vérifiée quel que soit $c$, puisque les deux membres de l'équation sont nuls.
• Sinon, soit $\varphi$ la fonction définie par $\varphi(x)=f(x)-P(x)-Ag(x)$, où $A$ est choisi de façon que $\varphi(t)=0$.

Cette fonction est de classe $C^3$ sur $[-1,1]$ et s'annule en 4 points : les trois racines de $g$ et le point $t$. Par le théorème de Rolle, $\varphi'$ s'annule en trois points distincts, $\varphi''$ s'annule en deux points distincts et $\varphi^{(3)}$ s'annule en un point $c$. Il existe donc $c\in]-1,1[$ tel que

$$0=\varphi^{(3)}(c)=f^{(3)}(c)-6A$$

Comme $A=\dfrac{f(t)-P(t)}{g(t)}$, il vient :

$$f(t)=P(t)+\frac{f^{(3)}(c)}{6}g(t)$$

b) Par construction $\big(f(-\sqrt{\frac{3}{5}}),f(0),f(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)=\big(P(-\sqrt{\frac{3}{5}}),P(0),P(\sqrt{\frac{3}{5}})\big)$
Donc :

$$\begin{aligned}\Delta&=\Big|\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\big(\tfrac{5}{9}f(-\sqrt{\tfrac{3}{5}})+\tfrac{8}{9}f(0)+\tfrac{5}{9}f(\sqrt{\tfrac{3}{5}})\big)\Big|\\ &=\Big|\int_{-1}^{1}f(t)\,dt-\big(\tfrac{5}{9}P(-\sqrt{\tfrac{3}{5}})+\tfrac{8}{9}P(0)+\tfrac{5}{9}P(\sqrt{\tfrac{3}{5}})\big)\Big|\\ &=\Big|\int_{-1}^{1}(f(t)-P(t))\,dt\Big|\leqslant\int_{-1}^{1}|f(t)-P(t)|\,dt\end{aligned}$$

D'après la question a), on a, pour tout $t\in[-1,1]$

$$|f(t) - P(t)| \leqslant \frac{\sup\limits_{u\in[-1,1]} |f'''(u)|}{6} |g(t)|$$

Donc

$$\Delta \leqslant M \times \sup_{u\in[-1,1]} |f'''(u)|, \text{ avec } M = \frac{1}{6}\int_{-1}^{1} |g(t)|\, dt$$

---

**Exercice 2.17.**

On note $E$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients complexes.
Une matrice $A$ de $E$ vérifie la propriété $(\Delta)$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = \lambda I_n$, où $I_n$ désigne la matrice identité de $E$.

1. Soit $A$ une matrice vérifiant la propriété $(\Delta)$. Montrer que $A$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$. Montrer que, dans ce cas, $A^{-1}$ vérifie la propriété $(\Delta)$.

2. Soient $A, B$ telles que $A, B$ et $A + B$ vérifient la propriété $(\Delta)$. Montrer que $AB + BA$ est une matrice scalaire.

3. Soit $A$ une matrice vérifiant la propriété $(\Delta)$, et $\lambda$ le scalaire ainsi associé à $A$.

a) Quelles sont les valeurs propres possibles de $A$ ?

b) Montrer que si $\lambda = 0$ et $A \neq 0$, la matrice $A$ n'est pas diagonalisable.

c) Montrer que si $\lambda \neq 0$, la matrice $A$ est diagonalisable (on pourra utiliser les deux racines carrées $\mu_1, \mu_2$ de $\lambda$).

4. Dans cette question $n = 4$. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $F$ le sous espace vectoriel de $E$ engendré par les trois matrices $M, N, P$.

a) Montrer que tout élément de $F$ vérifie la propriété $(\Delta)$.

b) Déterminer les éléments de $F$ qui sont diagonalisables.

---

**Solution :**

1. Si $\lambda \neq 0$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}A$, et si $\lambda = 0$, alors $A^2 = 0$ et si $A$ était inversible, alors, en multipliant par $A^{-1}$, on aurait $A = 0$, ce qui est absurde.

De plus

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{\lambda^2}\, A^2 = \frac{1}{\lambda} I$$

2. On a $A^2 = \lambda I, B^2 = \mu I$ et $(A + B)^2 = \nu I$. Donc

$$AB + BA = (\nu - \lambda - \mu)I$$

3. a) Le polynôme $P(X) = X^2 - \lambda$ est un polynôme annulateur de $A$. Les valeurs propres possibles sont les racines de ce polynôme.

b) Si $\lambda = 0$, le polynôme ci dessus admet une unique racine qui est 0. Ainsi si la matrice $A$ est diagonalisable, elle est semblable (donc égale) à 0.

c) Si $\lambda \neq 0$, notons $\mu_1, \mu_2$ les deux racines complexes de $\lambda$. On a :

$$0 = A^2 - \lambda I = (A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I)$$

On montre alors que $E = \operatorname{Ker}(A - \mu_1 I) \oplus \operatorname{Ker}(A - \mu_2 I)$. Pour cela, on analyse le problème en écrivant, pour $x$ dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, que si on a :
$x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in \operatorname{Ker}(A - \mu_1 I)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker}(A - \mu_2 I)$, alors :
$Ax = Ax_1 + Ax_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$, ce qui conduit à $x_1 = \dfrac{1}{\mu_1 - \mu_2}(Ax - \mu_2 x)$ et $x_2 = \dfrac{1}{\mu_2 - \mu_1}(Ax - \mu_1 x)$
On vérifie alors que ces valeurs conviennent.

4. a) On vérifie par le calcul les relations suivantes $M^2 = I, N^2 = -I, P^2 = I$. Puis, les matrices suivantes (hors la matrice $J$) étant formé de 4 blocs de matrices $2 \times 2$, que l'on a :

$$MN = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \ NM = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

$$NP = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}, \ PN = \begin{pmatrix} -J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$MP = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J & 0 \end{pmatrix}, \ NM = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

et si $A = aM + bN + cP$, alors $A^2 = (a^2 - b^2 + c^2)I$.

b) Par les questions précédentes :

$A$ est diagonalisable si et seulement si $a^2 - b^2 + c^2 \neq 0$.

---

**Exercice 2.18.**

On note $\mathcal{C}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Partie A**

1. Soit $f$ un élément de $\mathcal{C}$. On pose pour tout $x$ réel :

$$g(x) = f(x) - \int_0^x f(t)\,dt \text{ et } h(x) = f(x) + e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt.$$

Montrer que $g$ et $h$ sont éléments de $\mathcal{C}$.

2. On considère les applications $T$ et $T'$ définies par :

pour tout $f$ de $\mathcal{C}$, $T(f) = g$ et $T'(f) = h$.

où $g$ et $h$ sont définies en 1.
Montrer que $T$ et $T'$ sont des endomorphismes de $\mathcal{C}$.

3. Calculer, pour $f$ élément de $\mathcal{C}$, $T \circ T'(f)$. Peut-on en déduire que $T$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$ ? Montrer que $T$ est un automorphisme de $\mathcal{C}$.

**Partie B**

1. A tout élément $f$ de $\mathcal{C}$ on associe la fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} f(t)\, dt.$$

Montrer que $F$ est élément de $\mathcal{C}$.

2. Soit $G$ définie sur $\mathcal{C}$ par $G(f) = F$, où $F$ est définie en 1. Montrer que $G$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}$. Etudier l'injectivité et la surjectivité de $G$.

---

**Solution :**

A. 1. La fonction $f$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on sait que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'argument est identique pour $h$.

2. Par linéarité de l'intégration, les applications $T$ et $T'$ sont linéaires. La question précédente montre que ce sont des endomorphismes de $\mathcal{C}$.

3. On a pour tout $x$ :

$$\begin{aligned}(T \circ T')(f)(x) &= T(h)(x) = h(x) - \int_0^x h(t)\, dt \\ &= f(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt - \int_0^x (\mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-u} f(u)\, du)\, dt\end{aligned}$$

En posant $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (\mathrm{e}^t \int_0^t \mathrm{e}^{-u} f(u)\, du)\, dt = \mathrm{e}^x \Phi(x) - \int_0^x f(t)\, dt$$

et donc $(T \circ T')(f)(x) = f(x)$, soit $(T \circ T')(f) = f$.

Ceci ne montre pas que $T'$ est l'inverse de $T$, puisque l'espace sur lequel $T$ opère n'est pas de dimension finie. Il faut calculer aussi $(T' \circ T)(f)$.

Pour tout $x$ :

$$\begin{aligned}(T' \circ T)(f)(x) &= T'(g)(x) = g(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} g(t)\, dt \\ &= f(x) - \int_0^x f(t)\, dt + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t}(f(t) - \int_0^t f(u)\, du)\, dt \\ &= f(x) - \int_0^x f(t)\, dt + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt - \mathrm{e}^x \int_0^x (\mathrm{e}^{-t} \int_0^t f(u)\, du)\, dt\end{aligned}$$

Une intégration par parties donne :

$$\int_0^x (\mathrm{e}^{-t} \int_0^t f(u)\, du)\, dt = -\mathrm{e}^{-x} \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} f(t)\, dt$$

et on obtient : $(T' \circ T)(f)(x) = f(x)$.

Finalement, l'endomorphisme $T$ est bijectif, d'inverse $T'$.

B. 1. La fonction $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. La linéarité de l'intégration prouve que l'application $G$ est linéaire et la question précédente montre que c'est un endomorphisme de $\mathcal{C}$.

L'application $G$ est injective. En effet si $G(f) = 0$, alors en dérivant :

$$\forall\, x, \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{-t^2} dt = 0 \implies \forall\, x, f(x)\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \implies f = 0$$

L'application $G$ n'est pas surjective sur $\mathcal{C}$, puisque, par exemple, la fonction continue $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

[On peut remarquer que l'image de $G$ est l'ensemble des fonctions de classe $C^1$. En effet, si $h \in C^1(\mathbb{R})$, alors son antécédent par $G$ sera $f(x) = h'(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$.

---

**Exercice 2.19.**

1. On se donne un réel $a$ et à chaque polynôme $P$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe le polynôme $\ell(P)$ défini par :

$$\ell(P)(X) = XP(X) + (X - X^2)P'(X) + (aX^3 - X^2 + X - 1)P''(X)$$

a) Vérifier que l'application $\ell$ est linéaire. Déterminer une valeur de $a$ pour laquelle $\ell$ est un endomorphisme de $R_2[X]$.

b) Le réel $a$ étant ainsi choisi, décrire le noyau et l'image de $\ell$, puis comparer $\ell^2 = \ell \circ \ell$ et $\ell^3 = \ell^2 \circ \ell$.

c) Montrer que $\big(X, X - 1, \frac{1}{2}X^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Écrire la matrice de $\ell$ dans cette base.

2. Soit $f$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ qui vérifie $f^2 = f^3$.

a) Vérifier que $f^2$ est un projecteur.

b) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f - Id) = \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$.

c) Dans cette question on suppose de plus que $f$ est injectif. Démontrer que $f = Id$.

3. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $M^2 = M^3$ et telles que $\dim \mathrm{Ker}(M - I_3) = 1$.
Démontrer que :

a) Les matrices diagonalisables de $\mathcal{E}$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Les matrices non diagonalisables de $\mathcal{E}$ sont semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

---

**Solution :**

1. a) La linéarité de $\ell$ résulte de la linéarité de la dérivation et des propriétéés des opérations. Si $P$ s'écrit $\alpha + \beta X + \gamma X^2$, alors :

$$\ell(P)(X) = -2\gamma + (\alpha + \beta + 2\gamma)X + \gamma(2a - 1)X^3$$

Ainsi pour $a = 1/2$, on a $\ell(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$.

b) Et alors : $\ell(P)(X) = -2\gamma + (\alpha + \beta + 2\gamma)X$.

D'où : $\mathrm{Ker}(\ell) = \mathrm{Vect}(X - 1)$ et $\mathrm{Im}(\ell) = \mathbb{R}_1[X]$.

De plus $\ell^2(P) = (\alpha + \beta)X$, et une récurrence facile montre que pour tout $n \geqslant 2$ :

$$\ell^n(P)(X) = (\alpha + \beta)X$$

c) On remarque que $1 = X - (X - 1)$. Ceci est suffisant pour montrer que la famille proposée est une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Dans cette base, la matrice associée à $f$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. a) On a $f^2 \circ f^2 = f^3 \circ f = f^2 \circ f = f^3 = f^2$. Ainsi $f^2$ est un projecteur.

b) Si $f(x) = x$, alors $f^2(x) = f(x) = x$. Donc $\mathrm{Ker}(f - Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$. Réciproquement, si $f^2(x) = x$, alors $f^2(x) = f^3(x) = f(x)$, donc $f(x) = x$, et $\mathrm{Ker}(f^2 - Id) \subseteq \mathrm{Ker}(f - Id)$, d'où l'égalité.

c) Puisque $f^2$ est un projecteur, on sait que $E = \mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$. Si $f$ est injectif et si $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$, alors $f^2(x) = 0$ entraîne $f(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ donc $f(x) = 0$, et par injectivité de $f$ : $x = 0$ et $\mathrm{Ker}\, f^2 = \{0\}$.

Ainsi : $E = \mathrm{Ker}(f^2 - Id) = \mathrm{Ker}(f - Id)$, et $f = Id$.

3. On utilisera ici les résultats de la question précédente avec $E = \mathbb{R}^3$.
Comme $1 = \dim \mathrm{Ker}(f - Id) = \dim \mathrm{Ker}(f^2 - Id)$, on a $\dim \mathrm{Ker}\, f^2 = 2$. Donc $f$ n'est pas injective, et sachant que $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2$, deux cas sont possibles :

• $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f - Id) \oplus \mathrm{Ker}\, f$. Dans ce cas, $f$ est diagonalisable, ses valeurs propres étant 1 et 0, les sous-espaces propres associés étant respectivement de dimension 1 et 2.

• $\mathrm{Ker}\, f$ est strictement inclus dans $\mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $\mathrm{Ker}\, f$ est une droite vectorielle et $\mathrm{Ker}\, f^2$ un plan.
Soit $e_3$ un vecteur de $\mathrm{Ker}\, f^2$, tel que $e_3 \notin \mathrm{Ker}\, f$. Si $e_2 = f(e_3)$, alors $e_2 \in \mathrm{Ker}\, f$, et la famille $(e_2, e_3)$ est libre dans $\mathrm{Ker}\, f^2$.
On la complète par un vecteur $e_1 \in \mathrm{Ker}(f - Id)$. La famille $(e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et la matrice associée à $f$ dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice n'est pas diagonalisable, puisque les valeurs propres sont 0 et 1, les sous-espaces propres associés étant tous deux des droites.

---

**Exercice 2.20.**

On considère dans cet exercice un entier $n \geqslant 1$ fixé et deux matrices symétriques $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit qu'une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive (resp. définie négative) si, pour toute colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX > 0$ (resp. ${}^tXMX < 0$).
On suppose que la matrice $B$ est définie positive.

1. La matrice $B$ est-elle diagonalisable ? Montrer que toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $C_x$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$.

Montrer que l'application $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $b(x,y) = {}^tC_xBC_y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

*On suppose dans la suite que $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire $b$.*

3. Soit $\mathcal{B}_1$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et $Q_1$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{C}$. Montrer que l'on a : $B = {}^tQ_1Q_1$.

4. On note $A' = {}^tQ_1^{-1}AQ_1^{-1}$. Montrer qu'il existe une matrice $Q_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tQ_2Q_2 = I_n$ et que ${}^tQ_2A'Q_2$ soit une matrice diagonale.

5. En déduire qu'il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B = {}^tPP$ et $A = {}^tPAP$.

6. Montrer que les matrices $D + iI_n$ et $A + iB$ appartiennent à $GL_n(\mathbb{C})$ (où $i$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$).

7. On note $\Delta_1$ et $\Delta_2$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(D+iI_n)^{-1} = \Delta_1+i\Delta_2$. Montrer que les coefficients diagonaux de $\Delta_2$ sont strictement négatifs.

On note $U$ et $V$ les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $(A + iB)^{-1} = U + iV$. Montrer que $V$ est définie négative.

---

**Solution :**

1. La matrice $B$ est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de $B$ associé à la valeur propre $\lambda$. On peut alors écrire
$$0 < X^TBX = \lambda X^TX = \lambda||X||^2$$
ce qui implique que $\lambda > 0$.

2. Il faut montrer que l'application $b$ est une forme bilinéaire symétrique, définie positive.
• L'application $b$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ : c'est une « forme ».
• L'application $b$ est symétrique, puisque :
$$b(y,x) = C_y^TBC_x = (C_y^TBC_x)^T = C_x^TBC_y = b(x,y).$$
• L'application $b$ est clairement linéaire par rapport à son deuxième argument, et par symétrie ...
• On a $b(x,x) = C_x^TBC_x > 0$, par la première question, et toujours grâce à cette question $b(x,x) = 0$ entraîne $x = 0$.

3. Notons, pour $x \in \mathbb{R}^n$, $C'_x$ la colonne des coordonnées de $x$ dans la base $b$-orthonormée $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^n$. Par changement de base, on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $C_x = Q_1C'_x$ et que :
$$b(x,y) = C_x^TBC_y = (C'_x)^TC'_y$$
Donc, pour tout $x, y$ de $\mathbb{R}^n$ :
$$C_x^TQ_1^TQ_1C_y = C_x^TBC_y$$
ce qui entraîne que $B = Q_1^TQ_1$.

4. La matrice $A'$ étant symétrique réelle, il existe une matrice $Q_2$ orthogonale ($Q_2^{-1} = Q_2^T$) telle que $Q_2^TA'Q_2$ est diagonale.

5. En posant $P = Q_2^{-1}Q_1$, on obtient une matrice inversible vérifiant :
$$A = Q_1^T(Q_2^{-1})^TDQ_2^{-1}Q_1 = P^TDP$$

et :

$$P^T P = Q_1^T (Q_2^{-1})^T Q_2^{-1} Q_1 = Q_1^T (Q_2 Q_2^T) Q_1 = Q_1^T Q_1 = B$$

6. Les éléments diagonaux de la matrice $D$ sont réels, donc ceux de la matrice $D + iI_n$ sont non nuls, puisque de partie imaginaire égale à 1. De plus $A + iB = P^T(D + iI_n)P$ implique que la matrice $A + iB$ est inversible, puisque $P$ l'est.

7. On sait que $(a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$. Les éléments de $\Delta_2$ sont donc de la forme $-\dfrac{1}{a^2+1} < 0$.

Comme $A + iB = P^T(D + iI_n)P$, il vient :

$$U + iV = (A+iB)^{-1} = P^{-1}(D+iI_n)^{-1}(P^T)^{-1} = P^{-1}(\Delta_1 + i\Delta_2)(P^T)^{-1}$$

Par conséquent $V = P^{-1}\Delta_2(P^T)^{-1}$ est une matrice symétrique réelle et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ non nul :

$$X^T V X = ((P^T)^{-1}X)^T \Delta_2((P^T)^{-1}X) < 0$$

puisque les éléments de la matrice diagonale $\Delta_2$ sont tous strictement négatifs.