2

ALGÈBRE

Exercice 2-1

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.
Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $(n+1)$ réels distincts ou non. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j du polynôme P.
Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \sum_{j=0}^{n} P^{(j)}(a_j) Q^{(j)}(a_j)$$

définit un produit scalaire sur E.

Solution :

On montre facilement que $(\ ,\ )$ est une forme bilinéaire, symétrique, grâce à la linéarité de la dérivation et la commutativité du produit. Elle est également positive, puisque $(P, P) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (P^{(j)})^2(a_j)$.
Il reste à démontrer qu'elle est définie. Or :

$$(P, P) = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^{n} (P^{(j)})^2(a_j) = 0 \Rightarrow P^{(j)}(a_j) = 0, \quad \forall j \in \{0, \ldots, n\}$$

Mais, P étant un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P^{(n)}(x)$ est une constante et $P^{(n)}(a_n) = 0$ entraîne que $P^{(n)}$ est identiquement nul. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Mais alors $P^{(n-1)}(x)$ est une constante et $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$ entraîne que $P^{(n-1)}$ est identiquement nul. Ainsi P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-2)$. On termine aisément ce raisonnement.

Exercice 2-2

Soit d un nombre entier strictement positif et soient $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d$, des nombres réels deux à deux distincts, et différents de 1 et de -1.

On considère la fonction polynomiale $L : x \mapsto \prod_{k=1}^{d} (x - \tau_k)$, et la fonction rationnelle $R : x \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)L^2(x)}$.

On notera E, l'ensemble des nombres réels privé de $\{1, -1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d\}$.

On admet qu'il existe $2d+2$ nombres réels $\alpha, \beta, A_1, \ldots, A_d, B_1, \ldots, B_d$, tels que :

pour tout x appartenant à E,

$$R(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{A_k}{(x-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{x-\tau_k} \qquad (*)$$

1. Calculer α et β en fonction de $L(1)$ et de $L(-1)$.

2. Exprimer A_k en fonction de τ_k et de $L'(\tau_k)$.

3. On pourra admettre que $B_k = -\dfrac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2 - 1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)(L'(\tau_k))^3}$.

4. On définit la fonction polynôme S par : $S(x) = (x^2-1)L''(x) + 2xL'(x)$, pour tout réel x.

Prouver l'équivalence :

$$(\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, d\}, B_k = 0) \iff (\exists\, \mu \in \mathbb{R} \;/\; S = \mu L)$$

Exprimer μ , quand il existe, en fonction de d.

5. Dans le cas où d est égal à 2, déterminer le polynôme L tel que :

$$\forall\, k \in \{1, 2\}, B_k = 0.$$

Solution :

1. On admet que :

$$R(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \sum_{k=1}^{d} \frac{A_k}{(x-\tau_k)^2} + \sum_{k=1}^{d} \frac{B_k}{x-\tau_k}$$

Multiplions cette expression par $(x-1)$. Il vient :

$$\frac{1}{(x+1)L^2(x)} = \alpha + (x-1)g(x)$$

où g est une fonction continue en $x = 1$. En remplaçant x par 1, on obtient : $\dfrac{1}{2L^2(1)} = \alpha$.

De même, en multipliant l'expression par $(x+1)$, il vient :

$$\frac{1}{(x-1)L^2(x)} = \beta + (x+1)h(x)$$

où h est une fonction continue en $x = -1$. En remplaçant x par -1, on obtient : $-\dfrac{1}{2L^2(-1)} = \beta$.

2. Reprenons la même idée que précédemment. Multiplions l'expression de $R(x)$ par $(x-\tau_k)^2$. On obtient :

$$\frac{1}{(x^2-1)\prod_{i\neq k}(x-\tau_i)^2} = A_k + (x-\tau_k)^2 g_k(x)$$

où g_k est une fonction continue en $x = \tau_k$. En remplaçant x par τ_k, on obtient :

$$A_k = \frac{1}{(\tau_k^2-1)\prod_{i\neq k}(\tau_k-\tau_i)^2} = \frac{1}{(\tau_k^2-1)L'^2(\tau_k)}$$

En effet, si $L(x) = \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(x-\tau_k)$, la formule de dérivation d'un produit de fonctions donne :

$$L'(x) = \sum_{k=1}^{d}\prod_{i\neq k}(x-\tau_i)$$

et :

$$L'(\tau_k) = \prod_{i\neq k}(\tau_k-\tau_i)$$

3. Obtenir B_k est un peu plus compliqué. Multiplions $R(x)$ par $(x-\tau_k)^2$, puis dérivons l'xpression obtenue. Il vient :

$$(x-\tau_k)^2 R(x) = (x-\tau_k)^2\ell(x) + A_k + (x-\tau_k)B_k$$

où ℓ est une fonction continue et dérivable en $x = \tau_k$. En dérivant, il vient :

$$\left(\frac{1}{(x^2-1)L_k^2(x)}\right)' = (x-\tau_k)(2\ell(x) + (x-\tau_k)\ell'(x)) + B_k$$

avec

$$L_k(x) = \prod_{i \neq k} (x - \tau_i)$$

En posant dans cette dernière expression $x = \tau_k$, il vient :

$$B_k = \left(\frac{1}{(x^2-1)L_k^2(x)} \right)'_{x=\tau_k}$$

Enfin :

$$\left(\frac{1}{(x^2-1)L_k^2(x)} \right)' = -\frac{2xL_k^2(x) + 2(x^2-1)L_k(x)L_k'(x)}{(x^2-1)^2 L_k^4(x)}$$

Or :

$$L(x) = (x-\tau_k)L_k(x) \Rightarrow L'(\tau_k) = L_k(\tau_k), \quad L''(\tau_k) = 2L_k'(\tau_k)$$

Finalement :

$$B_k = \left(\frac{1}{(x^2-1)L_k^2(x)} \right)'_{x=\tau_k} = -\frac{2\tau_k L'(\tau_k) + (\tau_k^2 - 1)L''(\tau_k)}{(\tau_k^2-1)(L'(\tau_k))^3}$$

4. Supposons que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, d\}, B_k = 0$. Il en résulte que le numérateur de l'expression qui définit B_k est nul, sans que le dénominateur le soit, et que le polynôme S admet $(\tau_k)_{1 \leq k \leq d}$ comme racines.

Ainsi S est de même degré que L et admet les même racines. Ces deux polynômes sont donc proportionnels.

Réciproquement, si S est proportionnel à L, il admet les (τ_k) comme racines et $B_k = 0$, pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$.

Pour déterminer μ lorsque la condition est remplie, il suffit de regarder les coefficients dominants de chacun des polynômes. Il vient $\mu = d^2 + d$, ou, bien sr, $\mu = 0$.

5. Dans le cas où $d = 2$, $\mu \in \{0, 6\}$.

• $\mu = 0$. Dans ce cas, L est un polynôme normalisé de degré 2 vérifiant $(x^2-1)L''(x) + 2xL'(x) = 0$. Or $(x^2-1)L''(x) + 2xL'(x) = ((x^2-1)L'(x))'$. Il existe donc une constante C réelle telle que $(x^2-1)L'(x) = C$. Ceci n'est pas possible, puisque $L'(x)$ est un polynôme de degré 1.

• $\mu = 6$. Dans ce cas, L est un polynôme normalisé de degré 2 vérifiant $(x^2-1)L''(x) + 2xL'(x) = 6L(x)$. Appelons Q une primitive de L. Il vient $(x^2-1)L'(x) = 6Q(x)$ ou $(x^2-1)Q''(x) = 6Q(x)$.

Si $L(x) = x^2 + ax + b$, alors $Q(x) = \dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} + bx$ (par exemple) et notre équation se traduit par $(x^2-1)(2x+a) = 6\left(\dfrac{x^3}{3} + a\dfrac{x^2}{2} + bx\right)$, ce qui conduit, par identification des coefficients à : $a = 0, b = -1/3$. Le polynôme L ainsi obtenu est $L(x) = x^2 - 1/3$.

Exercice 2-3

On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$ par :

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad \text{ et } \forall\ n \geq 2\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

Etudier la parité de T_n en fonction de n.

2. Montrer que pour tout $n \geq 0, T_n(\cos x) = \cos(nx)$. En déduire que T_n admet n racines réelles distinctes. Les déterminer. Calculer $T_n(0), T_n(1), T_n(-1)$.

3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales. A tout $P \in E$, on associe la fonction $u(P)$ définie pour tout x réel par :

$$u(P)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} P(t)\,dt$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer un développement limité de $u(T_n)$ en 0 à l'ordre 2.

c) Déterminer un équivalent de $u(T_n)(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

4. Déterminer le noyau de u. En déduire son image.

Solution :

1. Montrons les relations demandées par récurrence sur n. Pour $n = 0, T_0$ et T_1 sont des polynômes de degrés respectifs 0 et 1 et le coefficient dominant de T_1 est $1 = 2^0$.
Supposons que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, T_k soit un polynôme de degré k et de coefficient dominant 2^{k-1}. Comme $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, T_n est un polynôme de degré n (c'est $2xT_{n-1}(x)$ qui l'emporte) et de coefficient dominant $2 \times 2^{n-2} = 2^{n-1}$.

Montrons par récurrence que si n est pair T_n est pair, alors que si n est impair, T_n est impair.

Ceci est vrai pour T_0 et T_1. Supposons que ce soit vérifié pour tout $k \leq 2p-1$. Alors, comme $T_{2p}(x) = 2xT_{2p-1}(x) - T_{2p-2}(x)$, il vient :

$$T_{2p}(-x) = -2xT_{2p-1}(-x) - T_{2p-2}(-x) = 2xT_{2p-1}(x) - T_{2p-2}(x) = T_{2p}(x)$$

et :

$$T_{2p+1}(-x) = -2xT_{2p}(-x) - T_{2p-1}(-x) = -2xT_{2p}(x) + T_{2p-1}(x) = -T_{2p+1}(x)$$

2. Procédons là encore par récurrence. $T_0(\cos x) = 1 = \cos(0x)$, $T_1(\cos x) = \cos x$. Supposons que pour tout $k \leq n-1, T_k(\cos x) = \cos(kx)$. Alors, en s'aidant de la formule trigonométrique $2\cos a \cos b = \cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} T_n(\cos x) &= 2\cos x T_{n-1}(\cos x) - T_{n-2}(\cos x) \\ &= 2\cos x \cos((n-1)x) - \cos((n-2)x) = \cos(nx) \end{aligned}$$

Or $\cos(nx) = 0 \Rightarrow nx = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ce qui entraîne que :

$$T_n(\cos x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}, 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

et :

$$T_n(x) = 0 \Rightarrow x \in \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right), 0 \leq k \leq n-1\right\}$$

Nous avons ainsi déterminé n racines distinctes (car $0 < \dfrac{\pi}{2n} + \dfrac{k\pi}{n} < \pi$, pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$) de T_n qui est un polynôme de degré n. Ce sont donc toutes les racines de T_n. Enfin :

$$T_n(0) = \cos(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1 \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k \end{cases} \quad \text{et} \quad T_n(1) = 1, T_n(-1) = (-1)^n$$

3. a) La linéarité de u est évidente par linéarité de l'intégrale. Le fait que u soit un endomorphisme de E provient du fait que toute primitive d'un polynôme est un polynôme. Donc si Q est une primitive de P, alors $u(P)(x) = Q(x+1) - Q(x-1)$ est un polynôme.

b) On vient de voir que $u(T_n)$ est un polynôme. Il admet donc un développement limité en 0. On peut donc écrire, pour x au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} u(T_n)(x) &= u(T_n)(0) + x(u(T_n))'(0) + \frac{x^2}{2}(u(T_n))''(0) + o(x^2) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} T_n(x)dx + \frac{x}{2}(T_n(1) - T_n(-1)) + \frac{x^2}{4}(T_n'(1) - T_n'(-1)) + o(x^2) \end{aligned}$$

Or :
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)dx = \int_0^{\pi} T_n(\cos t)\sin t dt = \int_0^{\pi} \cos(nt)\sin(t)dt$$
et pour $n \geq 2$:
$$\int_0^{\pi} \cos(nt)\sin(t)dt = -\frac{1}{n^2-1}((-1)^n + 1)$$
De plus $-n\sin(nx) = (T_n(\cos x))' = -\sin(x)T_n'(\cos(x))$, entraîne que :
$$T_n'(\cos x) = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{\sin x} & \text{si } x \neq 0\ [2\pi] \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$
Donc :
$$T_n'(1) = n, \text{ et } T_n'(-1) = (-1)^{n+1}n$$
Finalement, pour x au voisinage de 0 :
$$u(T_n)(x) = -\frac{1}{n^2-1}((-1)^n+1) + \frac{x}{2}(1-(-1)^n) + \frac{x^2}{4}n(1-(-1)^{n+1}) + o(x^2)$$
c) On sait que T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}. Or :
$$\begin{aligned} u(T_n)(x) &= \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} T_n(t)dt = \frac{2^{n-1}}{n+1}((x+1)^{n+1} - (x-1)^{n+1}) + h_{n-1}(x) \\ &= 2^{n-1}x^n + h_{n-1}(x) \end{aligned}$$
où h_{n-1} est un polynôme de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Ainsi un équivalent de $u(T_n)$ au voisinage de l'infini est $2^{n-1}x^n$.

4. On montre, comme dans la question précédente, que si P est un polynôme de degré p, alors $u(P)$ est également de degré p. Ainsi $\ker u = \{0\}$. Pour la même raison $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}[X]$. En effet, la restriction de u à chaque $\mathbb{R}_p[X]$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_p[X]$, donc surjectif, ce qui entraîne que u est surjectif sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2-4

On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit A et B les deux matrices définies par :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et B^2. En déduire les valeurs propres de A et de B.

2. Déterminer les sous-espaces propres des endomorphismes a et b canoniquement associés à A et B.

3. Montrer qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$, dans laquelle les matrices associées à a et b sont toutes deux diagonales.

Solution :

1. Un calcul immédiat donne $A^2 = 4A$ et $B^2 = 2B$. On sait alors que les valeurs propres de A sont contenues dans l'ensemble $\{0, 4\}$ et celles de B dans $\{0, 2\}$. Or, ces deux matrices sont symétriques réelles, donc diagonalisables sur $\mathbb{R}$. Elles n'ont donc pas qu'une seule valeur propre (car autrement ce seraient des matrices scalaires). Les valeurs propres de A sont donc $\{0, 4\}$ et celles de B $\{0, 2\}$.

2. On détermine les sous-espaces propres de a en résolvant le système d'équations $AX = \lambda X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On obtient :

- pour a :
  $F_0 = \{(x, y, z, t) \mid x + y + z + t = 0\}$ de dimension 3.
  $F_4 = \{(x, y, z, t) \mid x = y = z = t\}$ de dimension 1.
- pour b :
  $E_0 = \{(x, y, z, t) \mid x = z, y = t\}$ de dimension 2.
  $E_2 = \{(x, y, z, t) \mid x = -z, y = -t\}$ de dimension 2.

3. On a $F_4 \subset E_0$ et $E_2 \subset F_0$. On peut ainsi choisir comme base commune de diagonalisation :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_4, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_0, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in F_0, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in F_0$$

Exercice 2-5

Soit (P_n) une suite de fonctions définie par $P_0(x) = 1, P_1(x) = -x$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - P_n(x)$$

1. a) Montrer que P_n est une fonction polynomiale. Déterminer son degré ainsi que son coefficient dominant.

b) Quelle est la parité de P_n ?

2. On se propose de déterminer une expression de $P_n(x)$.
a) Soit $x \in [-2, 2]$. Montrer qu'il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = 2\cos(\theta)$. En déduire l'expression de $P_n(x)$ en fonction de θ.

b) Montrer que l'on a déterminé ainsi complètement le polynôme P_n.

3. Déterminer l'ensemble des racines de P_n.

4. a) Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P(t)Q(t)\sqrt{4-t^2}\,dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) La famille $(P_n)_{n\geq 0}$ est-elle une famille orthonormale pour ce produit scalaire ?

Solution :

1. a) Effectuons une démonstration par récurrence. Pour $n = 0, 1$: P_0 et P_1 sont deux fonctions polynomiales de degrés respectifs 0 et 1 et de coefficient dominant $(-1)^n$. Supposons que pour tout $k \leq n+1$, P_k soit un polynôme de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k$.
L'équation $P_{n+2}(x) = -xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ donne immédiatement que P_{n+2} est un polynôme de degré $n+2$ et de coefficient dominant $(-1)^{n+2}$, (puisque c'est $-xP_{n+1}(x)$ qui est prépondérant).

b) On voit que P_0 est un polynôme pair, alors que P_1 est un polynôme impair. Supposons que pour tout $k \leq n+1$, P_k possède la parité de k.
• si $n+2$ est pair, $-xP_{n+1}$ est pair (produit de deux polynômes impairs), tout comme P_n.
• si $n+2$ est impair, $-xP_{n+1}$ est impair (produit de P_{n+1} pair et de x impair) tout comme P_n.

et donc par récurrence, pour tout n, P_n a la parité de n.

2. a) Si $x \in [-2, 2]$, $\dfrac{x}{2} \in [-1, 1]$, et il existe un unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = 2\cos\theta$, puisque la fonction cos est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. On a alors $P_0 = 1, P_1(\theta) = -2\cos\theta$ et pour tout $n \geq 0$:

$$P_{n+2}(2\cos\theta) = -2\cos\theta P_{n+1}(2\cos\theta) - P_n(2\cos\theta)$$

Ceci est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est :

$$X^2 + 2\cos\theta X + 1 = 0.$$

Ses racines sont $(-e^{i\theta}, -e^{-i\theta})$ et il existe deux constantes complexes λ et μ telles que pour tout $n \geq 0$:

$$P_n(2\cos\theta) = (-1)^n \left(\lambda e^{in\theta} + \mu e^{-in\theta}\right)$$

Pour $n = 0, 1$ il vient :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda e^{i\theta} + \mu e^{-i\theta} = 2\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta} \\ \mu = \dfrac{-e^{-i\theta}}{2i\sin\theta} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 0$:

$$P_n(2\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{2i\sin\theta}\left(e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}\right) = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

b) Le polynôme P_n est ainsi complètement déterminé sur $[-2, 2]$ donc sur tout $\mathbb{R}$ puisque c'est un polynôme.

3. Cherchons les racines de P_n qui appartiennent à l'intervalle $[-2, 2]$.

$$0 = P_n(2\cos\theta) = (-1)^n \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \dfrac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \neq 0 \quad [\pi] \end{cases}$$

Ainsi P_n admet sur $[-2, 2], n$ racines distinctes qui sont $\left(2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)\right)_{1\leq k\leq n}$.
Or P_n est de degré n ; ce sont là toutes ses racines.

4. a) La bilinéarité, la symétrie et la positivité de l'application sont évidentes. De même,
$(P, P) = \displaystyle\int_{-2}^{2} P^2(t)\sqrt{4-t^2}dt = 0$ entraîne (car $t \mapsto P^2(t)\sqrt{4-t^2}$ est une fonction continue positive) que P est identiquement nul sur $]-2, 2[$, donc est le polynôme identiquement nul.

b) Calculons le produit scalaire (P_n, P_m) et pour cela, effectuons le changement de variable $t = 2\cos\theta$ dans l'intégrale. Il vient :

$$\begin{aligned}
(P_n, P_m) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} P_n(t)P_m(t)\sqrt{4-t^2}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{0} P_n(2\cos\theta)P_m(2\cos\theta)(-2\sin\theta)2\sin\theta d\theta \\
&= (-1)^{n+m}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta d\theta \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}
\end{aligned}$$

Exercice 2-6

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice $B = A^2 + 2I$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que $B^2 = B + 2I$.

3. Déterminer les valeurs propres de B. En déduire les sous-espaces propres associés.

4. Vérifier que si λ est une valeur propre de A, alors $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B. En déduire que A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} en fonction des matrices B et I.

6. On s'intéresse maintenant aux puissances de B.
a) On pose, pour tout $n \geq 2, X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + R_n(X)$ où Q_n et R_n sont deux polynômes tels que $\deg(R_n) < 2$.
On note $R_n(X) = a_nX + b_n$. Déterminer le couple (a_n, b_n).
b) En déduire l'expression de B^n en fonction de I, B et n, pour $n \geq 0$.
c) Montrer que l'expression de B^n en fonction de I, de B et de n, qui a été obtenue pour $n \geqslant 0$, est encore valable pour les entiers négatifs.

Solution :

1. Un calcul élémentaire donne :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable.

2. Là encore, le calcul se fait immédiatement tout comme la vérification.

3. Le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de la matrice B. On sait alors que les valeurs propres de B sont parmi les racines de ce polynôme, soit $1, 2$. On vérifie que ces deux réels sont effectivement valeurs propres de B en déterminant les sous-espaces propres correspondants. On obtient :
• $E_{-1}(B) = \{(x, y, z) \mid x - y + z = 0\}$
• $E_2(B) = \{(x, y, z) \mid x = -y = z\}$

4. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Alors :

$$AX = \lambda X \Rightarrow BX = (\lambda^2 + 2)X$$

et $\lambda^2 + 2$ est une valeur propre de B, puisque $X \neq 0$. Ainsi $\lambda \in \{0, \pm i\sqrt{3}\}$.

La matrice A n'admet qu'une valeur propre réelle. Elle ne peut être diagonalisable car elle serait alors une matrice scalaire, ce qu'elle n'est point.

5. On a immédiatement :

$$B^2 - B = 2I \Rightarrow B\left(\frac{B - I}{2}\right) = I$$

ce qui signifie que B est inversible et que $B^{-1} = \dfrac{B - I}{2}$.

6. On pose pour tout $n \geq 2, X^n = (X^2 - X - 2)Q_n(X) + a_nX + b_n$. En substituant les réels -1 et 2 à X, il vient :

$$\begin{cases} (-1)^n & = -a_n + b_n \\ 2^n & = 2a_n + b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \\ b_n = \dfrac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n) \end{cases}$$

b) En substituant la matrice B à X, il vient $B^n = a_nB + b_nI$, puisque $X^2 - X - 2$ est annulateur de B, soit :

$$B^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)B + \frac{1}{3}(2^n + 2(-1)^n)I$$

résultat qui reste valable pour $n = 0, 1$.

c) Pour montrer que cette expression reste valable pour n négatif, posons pour $n > 0$,

$$C_n = \frac{1}{3}(2^{-n} - (-1)^{-n})B + \frac{1}{3}(2^{-n} + 2(-1)^{-n})I$$

On vérifie alors que le calcul de $C_n B_n$ donne I (car $B^2 = B + 2I$). Donc $C_n = B^{-n}$ et la forme obtenue précédemment vaut pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2-7

1. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

Montrer que la matrice A est inversible (on pourra raisonner par l'absurde et considérer une colonne X non nulle telle que $AX = 0$).

2. Soit A une matrice carrée d'ordre n quelconque. Soit λ une valeur propre de A. Montrer que :

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|)$$

où pour $\alpha \in \mathbb{C}, R > 0$, $D(\alpha, R) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - \alpha| \leq R\}$.

3. Soit $n \geq 2$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors $|\lambda| \leq 2$.
On pose alors $\lambda = 2\cos(\theta), \theta \in [0, \pi]$.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

Solution :

1. Soit $X \neq 0$ vérifiant $AX = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $|x_k| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

L'équation $AX = 0$ est équivalente au système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Choisissons la k-ième équation. On obtient :

$$-a_{kk}x_k = \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j$$

donc, de par le choix de x_k :

$$|a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{j\neq k} |a_{kj}| \cdot |x_j| \leq |x_k| \sum_{j\neq k} |a_{kj}|$$

ce qui contredit l'hypothèse $|a_{k,k}| > \sum_{j\neq k} |a_{k,j}|$. Ceci entraîne que $x_k = 0$, donc que $X = 0$.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Hadamard.

2. Le scalaire λ est une valeur propre de A si et seulement si la matrice $A-\lambda I$ n'est pas inversible c'est-à-dire si et seulement si, par la question précédente, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que :

$$|a_{ii} - \lambda| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$$

ce qui signifie que $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D(a_{i,i}, \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|)$.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Gerchgorin.

3. a) D'après la question précédente, λ est une valeur propre de A entraîne que $\lambda \in D(0,1) \cup D(0,2)$, soit $\lambda \in D(0,2)$. On peut donc poser $\lambda = 2\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, puisque la fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

b) L'équation $AX = (2\cos\theta)X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'écrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} -2\cos\theta x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2\cos\theta x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1} - 2\cos\theta x_n = 0 \end{array}\right.$$

On pose alors $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$. On obtient ainsi n équations du même type

$$x_i - 2\cos\theta x_{i+1} + x_{i+2} = 0,\ (0 \leq i \leq n-1)$$

Les scalaires $(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1})$ vérifient une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $X^2 - 2\cos\theta X + 1 = 0$, dont les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. On sait alors que pour tout $0 \leq k \leq n+1$, x_k s'écrit sous la forme :

$$x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$$

les complexes α et β et θ étant ici déterminés par les conditions limites $x_0 = x_{n+1} = 0$. Soit :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i(n+1)\theta} + \beta e^{-i(n+1)\theta} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ \alpha \sin(n+1)\theta = 0 \end{cases}$$

Si $\alpha = 0$, alors $\beta = 0$ ce qui est sans intérêt, et si $\alpha \neq 0$, alors $\sin(n+1)\theta = 0$ et :

$$\theta = \frac{k\pi}{n+1}, k \in \mathbb{Z}$$

On obtient ainsi n valeurs propres distinctes données par $2\cos\theta_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$, avec $1 \leq k \leq n$, et le sous-espace propre associé à chaque valeur propre est de dimension 1, engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} \sin(\theta_k) \\ \sin(2\theta_k) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_k) \end{pmatrix}$

Exercice 2-8

1. Soit J la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calculer J^3. En déduire les valeurs propres complexes possibles de J. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

b) Soit (a, b, c) trois nombres complexes et A la matrice $aI_3 + bJ + cJ^2$. Déterminer les valeurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$?

2. Un jeton est déplacé sur trois points A, B, C d'un cercle suivant les modalités suivantes :

une urne contient des boules rouges et blanches en proportions respectives p et $q = 1 - p$. On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée est de couleur rouge, on avance le jeton d'un point dans le sens trigonométrique. Si la boule tirée est de couleur blanche, on avance le jeton de deux points, toujours dans le sens trigonométrique. On replace la boule dans l'urne avant d'effectuer le tirage suivant.
Au départ le jeton se trouve en A.

Soit X_n la variable aléatoire représentant la position du jeton à l'issue du n-ième tirage.
Déterminer la loi de X_n en fonction de n.

Solution :

1. a) Un calcul élémentaire donne $J^3 = I$. On peut le montrer également en regardant l'endomorphisme associé à J (que l'on appellera J) qui vérifie dans la base (e_1, e_2, e_3) associée à la matrice J : $J(e_1) = e_2, J(e_2) = e_3, J(e_3) = e_1$.
Ainsi J est une permutation circulaire sur (e_1, e_2, e_3) et vérifie $J^3 = I$.
Les valeurs propres possibles de J sont donc $1, j, j^2$, où $j = e^{2i\pi/3}$. Pour vérifier si chacun de ces scalaires est effectivement valeur propre, il suffit de déterminer le sous-espace propre asssocié. Après calculs :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = 1$.
- $\begin{pmatrix} j \\ 1 \\ j^2 \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = j$.
- $\begin{pmatrix} j^2 \\ 1 \\ j \end{pmatrix}$ engendre le sous-espace propre associé à $\lambda = j^2$.

Ainsi J est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

b) La matrice A étant un polynôme en J, on sait que ses valeurs propres sont :

$$a + b + c,\ a + bj + cj^2,\ a + bj^2 + cj$$

les vecteurs propres associés étant identiques à ceux trouvés ci-dessus. La matrice A est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminons la matrice de passage de l'état n à l'état $(n + 1)$. Notons a_n, b_n, c_n les probabilités des événements « le jeton se trouve en A (respectivement B, C) à l'issue du n-ième tirage ».

Les modalités du jeu et la formule des probabilités totales (les trois événements ci-dessus forment un système complet d'événements) donnent :

$$\begin{cases} a_{n+1} = qb_n + pc_n \\ b_{n+1} = pa_n + qc_n \\ c_{n+1} = qa_n + pb_n \end{cases}$$

ou, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = (pJ + qJ^2) \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Posons $A = pJ + qJ^2$. On sait que J est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, avec comme matrice de passage la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

On pourra ainsi écrire, pour tout $n \geq 0$, $A^n = P(pD + qD^2)^n P^{-1}$, ce qui donne après calculs :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 + \alpha^n + \beta^n & 1 + j\alpha^n + j^2\beta^n & 1 + j^2\alpha^n + j\beta^n \\ 1 + j^2\alpha^n + j\beta^n & 1 + \alpha^n + \beta^n & 1 + j\alpha^n + j^2\beta^n \\ 1 + j\alpha^n + j^2\beta^n & 1 + j^2\alpha^n + j\beta^n & 1 + \alpha^n + \beta^n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = pj + qj^2$ et $\beta = pj^2 + qj$.

La loi de X_n est alors donnée par :

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \alpha^n + \beta^n \\ 1 + j^2\alpha^n + j\beta^n \\ 1 + j\alpha^n + j^2\beta^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2-9

Soient n et p des éléments de $\mathbb{N}^*$. On désigne par $E_{n,p}$ le nombre de solutions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans $\mathbb{Z}^n$ de l'équation :

$$(*) \quad \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = p.$$

1. Déterminer les nombres $E_{1,p}$ et $E_{2,p}$.

2. a) Déterminer, en fonction de n et p, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'inéquation :

$$\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p.$$

b) En déduire l'expression de $E_{n,p}$ en fonction de n et p.

3. a) Développer $(a+b+c)^n$.

b) Déterminer en fonction des paramètres n, p et q dans $\mathbb{N}^*$, le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ du système :

$$\begin{cases} \min(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = q \\ \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) = p \end{cases}.$$

(On pourra commencer par les cas $n = 1, n = 2$, et dans le cas général raisonner sur le nombre de fois ou le min et le max sont atteints)

4. Déterminer une constante C telle que la suite de terme général $E_{n,n}$ soit équivalente à la suite de terme général $C(2n)^n$.

Solution :

1. Manifestement $E_{1,p} = 2, (|x_1| = p)$. Pour déterminer $E_{2,p}$, il faut déterminer le nombre d'éléments $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\max(|x_1|, |x_2|) = p$. Ces deux entiers jouant un rôle symétrique, on peut supposer $\max(|x_1|, |x_2|) = |x_1|$. Dans ce cas, $|x_2| \leq p$, ce qui donne $2(2p+1)$ possibilités (pour $x_1 = p$ et $x_1 = -p$). On multiplie par 2 ce résultat (rôle symétrique de x_1 et x_2) et on enlève 4 éléments qui ont été comptés 2 fois (les quatre couples $(\pm p, \pm p)$). Finalement $E_{2,p} = 8p$.

2. a) On a $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p$ si et seulement si pour chaque i appartenant à $\{1, \dots, n\}, |x_i| \leq p$. Cela donne pour chaque x_i, $(2p+1)$ possibilités et si $S_{n,p}$ est le nombre de solutions dans $\mathbb{Z}^n$ de l'inéquation $\max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \leq p$, alors $S_{n,p} = (2p+1)^n$.

b) On a bien évidemment :

$$E_{n,p} = S_{n,p} - S_{n,p-1} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$$

3. a) Un calcul immédiat donne :

$$(a+b+c)^n = ((a+b)+c)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p (a+b)^{n-p} c^p$$

$$= \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} C_n^p C_{n-p}^q a^q b^{n-p-q} c^p$$

b) Pour $n = 1$, il n'y a pas de solutions si $p \neq q$ et 1 solution si $p = q$.
Si $n \geq 2$, il n'y a pas de solutions si $p < q$, et 2^n solutions lorsque $p = q$.

Si $p > q$, on peut supposer que l'on atteint α fois le maximum parmi les (x_i) et β fois le minimum. On a alors :

$$S = \sum_{\alpha \geq 1} \sum_{\beta \geq 1} C_n^{\alpha} C_{n-\alpha}^{\beta} 2^{\alpha+\beta} (2(p-q-1))^{n-\alpha-\beta}$$

et d'après la question précédente :

$$S = (2(p-q+1))^n - 2 \sum_{\beta=0}^{n} C_n^{\beta} 2^{\beta} (2(p-q-1))^{n-\beta} + (2(p-q-1))^n$$

(la seconde somme correspond aux cas $\alpha = 0, \beta \neq 0$ et $\alpha \neq 0, \beta = 0$, et la troisième au cas $\alpha = \beta = 0$).

Après calculs, il vient :

$$S = (2p - 2q + 2)^n - 2(2(p-q))^n + (2(p-q-1))^n$$

4. On sait que $E_{n,n} = (2n+1)^n - (2n-1)^n$. Donc :

$$\begin{aligned} E_{n,n} &= (2n+1)^n \left(1 - \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n\right) \\ &= e^{n \ln(2n+1)} \left(1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)}\right) \\ &= e^{n \ln 2n} e^{n \ln(1 + \frac{1}{2n})} \left(1 - e^{n \ln\left(1 - \frac{2}{2n+1}\right)}\right) \\ &\sim (2n)^n e^{1/2} (1 - e^{-1}) = (e^{1/2} - e^{-1/2})(2n)^n \end{aligned}$$

Exercice 2-10

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Soit $a > 0$ un réel donné. A tout $f \in E$ on associe la fonction $T_a(f)$ définie pour tout x réel par :

$$T_a(f)(x) = \frac{1}{2a} \int_{x-a}^{x+a} f(t) dt$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $T_a(f)$ est bien définie et est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $T_a(f)$ est constante si et seulement si f est périodique de période $T = 2a$.

3. Montrer que l'application T_a est un endomorphisme de E. Déterminer son noyau. T_a est-il surjectif ?

4. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que la restriction de T_a à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
On notera encore T_a cette restriction.

5. a) Montrer que la matrice associée à T_a dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. En déduire les valeurs propres de T_a. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

b) Soit $f \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que si le degré de f est égal à 2, f n'est pas vecteur propre de T_a.

c) Montrer que si f est vecteur propre de T_a, sa dérivée f' l'est également. En déduire les sous-espaces propres de T_a.

Solution :

1. Comme f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $T_a(f)(x) = \dfrac{1}{2a}(F(x+a) - F(x-a))$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. La question précédente permet d'écrire, pour tout x réel :

$$T_a(f)'(x) = \frac{1}{2a}(f(x+a) - f(x-a))$$

• si f est $2a$–périodique, alors $T_a(f)'(x) = 0$, pour tout x réel et $T_a(f)$ est constante.

• réciproquement, si $T_a(f)$ est constante, pour tout x réel, $f(x+a) - f(x-a) = 0$, et pour tout x réel $f(x+2a) = f(x)$.

3. L'application T_a est linéaire par linéarité de l'intégrale. Par la question 1, T_a est un endomorphisme de E qui n'est pas surjectif, puisque $\operatorname{Im} T_a \subset C^1(\mathbb{R})$. Déterminons le noyau $\ker T_a$.

• si $f \in \ker T_a$, alors par la question 2, f est $2a$–périodique et :

$$0 = T_a(f)(0) = \int_{-a}^{a} f(t)dt = \int_0^{2a} f(t)dt$$

Donc : $\ker T_a \subseteq E_{2a}^0 = \left\{ f \in E | f \text{ est } 2a - \text{périodique et } \int_0^{2a} f(t)dt = 0 \right\}$.

• réciproquement, soit $f \in E_{2a}^0$. Alors, par la question 2, $T_a(f)$ est constante et $T_a(f)(0) = 0$ entraîne que $f \in \ker T_a$. Finalement :

$$\ker T_a = E_{2a}^0 = \left\{ f \in E | f \text{ est } 2a - \text{périodique et } \int_0^{2a} f(t)dt = 0 \right\}$$

4. Déterminons l'image du polynôme X^n par T_a.

$$T_a(X^n)(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} t^n dt = \frac{1}{2a(n+1)}\left((x+a)^{n+1} - (x-a)^{n+1}\right) = x^n + \cdots$$

qui est un polynôme de degré n. Ainsi $T_a(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$.

5. a) On vient de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, T_a(X^k) \in \text{Vect}(1, X, \ldots, X^k)$, ce qui signifie que la matrice associée à T_a est triangulaire supérieure, la diagonale étant exclusivement composée de 1. L'unique valeur propre est donc 1 et l'endomorphisme T_a n'est pas diagonalisable, car autrement il serait scalaire.

b) Supposons que $f = X^2 + \alpha X + \beta$. Alors $T_a(f)(x) = x^2 + \alpha x + \dfrac{a^2}{3} + \beta$, et l'équation $T_a(f) = f$ est impossible. Ainsi, un polynôme de degré 2 ne peut être vecteur propre de T_a.

c) Si $T_a(f) = f$, en dérivant $(T_a(f))' = f'$. Or :

$$(T_a(f))' = \frac{1}{2a}\left(f(x+1) - f(x-a)\right) = T_a(f')$$

Donc $T_a(f') = f'$.

Par une récurrence immédiate, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}, T_a(f^{(k)}) = f^{(k)}$. Or si f est un vecteur propre de degré $n \geq 3$, alors $f^{(n-2)}$ sera un vecteur propre de degré 2, ce qui est impossible.

Les seuls vecteurs propres possibles sont donc de degré 0 ou 1, et on vérifie que $T_a(1) = 1, T_a(X) = X$. Ainsi $E_1(T_a) = \text{Vect}(1, X)$ est de dimension 2.

Exercice 2-11

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées $(3,3)$ à coefficients réels.

On définit la trace d'une matrice carrée par la somme de ses termes diagonaux. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on la notera $\text{tr}(A)$.

1. On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A, B) = \langle A, B \rangle = \text{tr}(A.{}^tB).$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

2. a) On pose $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'orthogonal de J.

b) Soit F le sous-espace vectoriel engendré par J, et $F^\perp$ son orthogonal.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de E. On note A' la projection orthogonale de A sur F et A'' sa projection orthogonale sur $F^{\perp}$.
Déterminer A' et A''.

c) Application. Déterminer les projections orthogonales sur F et $F^{\perp}$ de la matrice identité I_3.

Solution :

1. La trace étant une forme linéaire sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'application φ est bilinéaire. Comme $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA)$, on a :

$$\varphi(A, B) = \operatorname{tr}(B^tA) = \operatorname{tr}(A^tB) = \varphi(B, A)$$

Enfin $\varphi(A, A) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}^2 \geq 0$ et $\varphi(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0$. Donc φ est un produit scalaire.

2. a) La matrice J étant symétrique, un calcul immédiat montre que $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$ est orthogonale à J si et seulement si $\operatorname{tr}(AJ) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=1}^{3} a_{1,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} = 0$$

L'orthogonal de J est donc l'hyperplan de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'équation $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} = 0$.

b) A' est multiple de J. On écrit donc $A = \lambda J + (A - \lambda J)$, le scalaire λ étant déterminé par la condition $A - \lambda J \in F^{\perp}$ ou $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} - 9\lambda = 0$. Ainsi :

$$A' = \frac{1}{9}\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}\right) J, \quad \text{et } A'' = A - \frac{1}{9}\left(\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j}\right) J$$

c) Dans le cas de la matrice identité I, il vient $I' = \dfrac{1}{3}J$ et $I'' = I - \dfrac{1}{3}J$.

Exercice 2-12

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A relativement à la base canonique.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

2. Montrer que les deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(f - id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 3id)^2$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En déduire qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A'^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire A^n.

Solution :

1. La réduction de A par la méthode du pivot de Gauss donne que $1, 3$ sont les deux valeurs propres de A, les sous-espaces propres associés étant :

$$E_1 = \ker(A - I) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \ker(A - 3I) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice A n'est pas diagonalisable, puisque $\mathbb{R}^3$ n'est pas la somme directe des sous-espaces propres de A.

2. On a $(A - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De même $F = \ker(A - 3I)^2$ est le plan d'équation $x = y$. Le vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'appartenant pas à ce plan. compte tenu des dimensions de chacun de ces sous-espaces vectoriels, on en déduit que E_1 et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

D'après la forme de la matrice que l'on souhaite obtenir, la base (v_1, v_2, v_3) recherchée vérifie $f(v_1) = 3v_1, f(v_3) = v_3$. On choisit donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le vecteur v_2 doit vérifier $(f - 3I)v_2 = v_1$ donc $(f - 3I)^2(v_2) = 0$. Il suffit donc de le choisir différent de v_1 et dans $\ker(A - 3I)$; par exemple $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, on en déduit immédiatement que le système (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut écrire :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + J$$

avec $DJ = JD$ et $J^2 = 0$. Le binôme de Newton donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A'^n = D^n + nD^{n-1}J = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^n se fait ensuite par changement de base en utilisant la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2-13

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, à coefficients réels.
On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) \ = \ P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$$

1. Pour tout réel a, exprimer $P(X+a)$ en fonction de $P(X)$ et des n premières dérivées de $P, P^{(i)}(X)$, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Que peut-on dire de $\varphi(P) - P''$?

En déduire le degré de $\varphi(P)$ en fonction du degré de P puis le noyau et l'image de l'endomorphisme φ.

c) Soit $Q \in \mathrm{Im}(\varphi)$ et $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P_0) = Q$.
Déterminer, en fonction de P_0, tous les polynômes P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\varphi(P) = Q$.

3.a) On considère une suite de polynômes $P_0,\ P_1, \ldots,\ P_n$ tels que :

$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = X$ et

$\forall\, k \in \{2, \cdots, n\},\ \varphi(P_k) = P_{k-2},\ P_k(0) = P_k(1) = 0.$

Montrer que si cette suite existe elle est unique.

b) Vérifier que pour tout $k \in \{1, \dots, n\},\ P_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

c) Montrer que les polynômes $P_0,\ P_1, \dots,\ P_n$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ecrire la matrice de φ sur cette base. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. La formule de Taylor pour les polynômes est une formule «exacte», c'est-à-dire, pour tout polynôme P de degré n :

$$P(X+a) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)a^i}{i!}$$

2. a) De façon évidente φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

b) En utilisant la question précédente, on peut écrire :

$$\varphi(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)2^i}{i!} + P(X) - 2\sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(X)}{i!} = P''(X) + R(X)$$

où $R(X)$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $(n-2)$. Donc :
- si $\deg(P) < 2$, on a $\varphi(P) = 0$,
- si $\deg(P) \geq 2$, on a $\deg(\varphi(P))=\deg(P) - 2$. On a alors $\ker\varphi = \mathbb{R}_1[X]$, et $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

c) L'équation $\varphi(P) = Q$ est équivalente à $\varphi(P - P_0) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$P(X) = P_0(X) + \alpha X + \beta$$

3. a) Supposons qu'il existe deux suites (P_k) et (R_k) qui vérifient les conditions données.

Par la question précédente, il existe des réels (α_k, β_k) tels que $P_k = R_k + \alpha_k X + \beta_k$.

Les conditions $P_k(0) = P_k(1) = R_k(0) = R_k(1) = 0$ entraînent que $\alpha_k = \beta_k = 0$.

b) On a pour tout $k \geq 2, P_k(0) = P_k(1) = 0$. Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$. On a alors $\varphi = T^2$. De plus :

$$\begin{aligned} T(P_k) &= \frac{(X+1)(X)\cdots(X-k+2)}{k!} - \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}((X+1)-(X-k+1)) = P_{k-1} \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi(P_k) = T^2(P_k) = P_{k-2}$.

c) La famille $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ de degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme φ n'est pas diagonalisable, puisque si P est un polynôme de degré $k \geq 2$, alors $\varphi(P)$ est de degré $k-2$. L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ n'est donc pas possible pour $\lambda \neq 0$. Seul $\mathbb{R}_1[X]$ (de dimension 2) est sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Exercice 2-14

Soit $n \geq 3$ un entier naturel et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & (0) & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

soit :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, si } i = 1 \text{ ou } i = n, 1 \leq j \leq n \\ 1 & \text{, si } j = 1 \text{ ou } j = n, 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{, autrement} \end{cases}$$

Déterminer les éléments propres de A.

Solution :

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 2 (toutes les colonnes sont liées aux deux premières colonnes qui sont libres). On sait ainsi que 0 est valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est $\ker A$ de dimension $n-2$.

Soit $\lambda \neq 0$ une autre valeur propre et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

L'équation $AX = \lambda X$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \lambda x_n \\ x_1 + x_n = \lambda x_2 \\ x_1 + x_n = \lambda x_3 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_n = \lambda x_{n-1} \end{cases}$$

Or, comme $\lambda \neq 0$, ce système est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 = x_n = \frac{1}{\lambda}\sum x_i \\ x_2 = x_3 = \cdots = x_{n-1} = \frac{1}{\lambda}(x_1 + x_n) \end{cases}$$

donc $x_1 \neq 0$ et le couple (λ, x_1) vérifie l'équation $2x_1 + (n-2)\dfrac{2x_1}{\lambda} = \lambda x_1$ ou :

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n-2) = 0$$

Ainsi, $\lambda \in \{1+\sqrt{2n-3}, 1-\sqrt{2n-3}\}$ et un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs de λ est $\begin{pmatrix} \lambda \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

Exercice 2-15

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire φ défini par :

$$\forall\ A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij})\ \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$$

On note $||A||$ la norme de A associée à ce produit scalaire.

Soit J la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On considère l'application f de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associe la matrice JM.

1. Déterminer l'image de f, $\mathrm{Im}(f)$.

2. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que B n'est pas élément de $\mathrm{Im}(f)$.
Déterminer les matrices pour lesquelles la distance de B à $\mathrm{Im}(f)$ est atteinte.

Solution :

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$. Le calcul de JM donne :

$$JM = \begin{pmatrix} a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \\ a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \\ a+b+c & a'+b'+c' & a''+b''+c'' \end{pmatrix}$$

Ainsi si l'on pose :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$JM = (a+b+c)E_1 + (a'+b'+c')E_2 + (a''+b''+c'')E_3$$

et

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(E_1, E_2, E_3)$$

2. Trivialement $B \notin \mathrm{Im}(f)$. On sait que la distance de B à $\mathrm{Im}(f)$ est minimale lorsque $f(M)$ est la projection orthogonale de B sur $\mathrm{Im}(f)$. On sait alors que $f(M) - B$ est orthogonal à $\mathrm{Im}(f)$, donc à sa base, soit :

$$\varphi(E_1, f(M) - B) = \varphi(E_2, f(M) - B) = \varphi(E_3, f(M) - B) = 0$$

ou

$$\begin{cases} 3(a+b+c) - 3 = 0 \\ 3(a'+b'+c') - 3 = 0 \\ 3(a''+b''+c'') - 3 = 0 \end{cases}$$

Toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ telle que $a+b+c = a'+b'+c' = a''+b''+c'' = 1$ convient, la projection orthogonale $f(M)$ étant la matrice J.

Exercice 2-16

On considère l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)dt$.

1. Quelles sont les dimensions respectives du noyau et de l'image de φ ?

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ (on pourra chercher la forme générale des primitives qui s'annulent en 0 des polynômes P de $\mathrm{Ker}(\varphi)$).

Solution :

1) L'application φ est linéaire et différente de l'application nulle, puisque $\varphi(1) = 1$.

L'image de φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, non réduit au vecteur nul. Donc $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, qui est de dimension 1 et, par le théorème du rang, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension $(n+1) - 1 = n$.

2) Si $P = \sum a_k X^k$, notons Q la primitive de P nulle en 0.

(On a donc $Q = \sum \dfrac{a_k}{k+1} X^{k+1}$).

Alors $\varphi(P) = Q(1) - Q(0) = Q(1)$ et $P \in \operatorname{Ker}\varphi$ si et seulement si Q (qui s'annule déjà en 0) s'annule aussi en 1. Par conséquent si et seulement si Q est de la forme :

$$Q = (X-1)\sum_{k=1}^{n} b_k X^k = \sum_{k=1}^{n} b_k (X^{k+1} - X^k)$$

Par dérivation, on en déduit que ceci se produit si et seulement si P est de la forme :

$$P = \sum_{k=1}^{n} b_k \big[(k+1)X^k - kX^{k-1}\big]$$

Les polynômes $(k+1)X^k - kX^{k-1}$, pour $1 \le k \le n$ forment une famille échelonnée en degrés, donc une famille libre, de cardinal n dont tous les éléments sont dans $\operatorname{Ker}\varphi$. On a bien construit une base du noyau de φ.

Exercice 2-17

Soit A une matrice carrée d'ordre 3. On suppose que A admet trois valeurs propres distinctes λ_1, λ_2 et λ_3. Soient U_1, U_2 et U_3 des vecteurs colonnes propres de A respectivement associés à ces trois valeurs propres. On pose $V = U_1 + U_2 + U_3$.

1. Montrer que V, AV, A^2V forment un système libre.

2. Soit M une matrice vérifiant $AM = MA$.

Vérifier que $A^2M = MA^2$.

Montrer qu'il existe trois scalaires α, β et γ tels que $MV = \alpha V + \beta AV + \gamma A^2 V$.

Exprimer MAV et MA^2V.

En déduire que $AM = MA$ si et seulement si M appartient au sous-espace vectoriel engendré par I_3, A, A^2.

Solution :

1. Soit $\alpha V + \beta AV + \gamma A^2 V = 0$ une relation de dépendance entre ces trois vecteurs. Cela s'écrit :

$$(\alpha+\beta\lambda_1+\gamma\lambda_1^2)U_1+(\alpha+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_2^2)U_2+(\alpha+\beta\lambda_3+\gamma\lambda_3^2)U_3=0$$

Soit, par liberté de la famille (U_1, U_2, U_3) (vecteurs colonnes associés à des valeurs propres deux à deux distinctes) :

$$\begin{cases} \alpha+\beta\lambda_1+\gamma\lambda_1^2=0 \\ \alpha+\beta\lambda_2+\gamma\lambda_2^2=0 \\ \alpha+\beta\lambda_3+\gamma\lambda_3^2=0 \end{cases}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois racines du polynôme $\alpha+\beta X+\gamma X^2$, qui est donc le polynôme nul et $\alpha=\beta=\gamma=0$: la famille est libre.

2. $\star$ $AM = MA \implies A^2M = AAM = AMA = MAA = MA^2$.

$\star$ (V, AV, A^2V) est libre de cardinal 3 dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, donc est une base de cet espace et le vecteur colonne MV se décompose sur cette base.

$\star$ $MV = \alpha V + \beta AV + \gamma A^2V = (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)V$ donne successivement :

$MAV = AMV = A(\alpha V + \beta AV + \gamma A^2V) = (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)AV$

$MA^2V = A^2MV = A^2(\alpha V + \beta AV + \gamma A^2V) = (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)A^2V$

Ainsi, si $AM = MA$, les endomorphismes canoniquement associés à M et $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ (où α, β, γ sont définis par la décomposition du vecteur colonne MV) concident sur une base. Donc ces endomorphismes sont égaux et l'on a : $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.
Réciproquement, il est clair que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$ commute avec A et le commutant de A est $\mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.

Exercice 2-18

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et E un espace vectoriel réel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres réelles distinctes.

1. Montrer que pour tout endomorphisme g de E, $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g. En déduire alors que g est diagonalisable.

2. Montrer qu'il existe un endomorphisme h de E non nul tel que $h \circ f = -f \circ h$ si et seulement si f possède deux valeurs propres opposées.

Solution :

1. $\star$ Si $f \circ g = g \circ f$, soit e_i un vecteur propre de f et λ_i la valeur propre associée. On a :

$$f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i), \text{ soit } f\big(g(e_i)\big) = g(\lambda_i e_i) = \lambda_i g(e_i)$$

Mais f admettant n valeurs propres, les sous-espaces propres associés sont des droites et $g(e_i)$ appartient à la droite engendrée par e_i : le vecteur e_i est propre pour g, associée à une valeur propre μ_i (mais on peut avoir $\mu_i = \mu_j$, avec ij). La base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ qui est propre pour f l'est aussi pour g et f et g sont (co)-diagonalisables.

$\star$ Réciproquement, si les vecteurs propres de f sont propres pour g, alors les matrices de f et g relativement à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont toutes deux diagonales et f et g commutent.

2. $\star$ Supposons qu'il existe h, non nul, tel que $h \circ f = -f \circ h$. Alors, il existe au moins un vecteur e_i de B tel que $h(e_i)0$ et on a :

$$-h\big(f(e_i)\big) = f\big(h(e_i)\big), \text{ d'où : } f\big(h(e_i)\big) = -\lambda_i h(e_i)$$

Le vecteur $h(e_i)$ étant non nul, $-\lambda_i$ est valeur propre de f.

$\star$ Supposons que f ait deux valeurs propres opposées.

S'il s'agit de la valeur propre 0, quitte à renuméroter les vecteurs de B, on peut supposer que $f(e_1) = 0$. On définit alors l'endomorphisme h par : $h(e_1) = e_1$ et pour $i \geq 2, h(e_i) = e_i$: on vérifie que h convient.

Sinon, quitte à renuméroter les vecteurs de B, on peut supposer que l'on a $f(e_1) = \lambda e_1$ et $f(e_2) = -\lambda e_2$. On vérifie alors que l'endomorphisme h défini par : $h(e_1) = e_2$ et pour $i \geq 2, h(e_i) = 0$, convient.

Exercice 2-19

On considère l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, c'est-à-dire tel que la base canonique $\mathcal{B} = (i, j, k)$ soit orthonormée.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que ${}^tAA = I_3$.

2. On pose $v = I - f$, où I désigne l'endomorphisme identité de E. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont deux sous-espaces orthogonaux de E. Donner une base orthogonale de chacun d'eux.

3. On considère l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Montrer que g est une projection orthogonale dont on déterminera le noyau et l'image.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} f^k$, où f^k désigne la composée de f avec elle-même k fois (on pose $f^0 = I$).
Montrer que pour tout $x \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = g(x)$ (la limite d'une suite de vecteurs s'entendant coordonnée par coordonnée).

Solution :

1. Il suffit de faire le calcul.

2. La matrice de v relativement à la base $\mathcal{B}$ est $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Cette matrice est de rang 1, le noyau de v est le plan P d'équation $(1-\sqrt{2})x + y = 0$ et l'image est la droite D engendrée par le vecteur $(\sqrt{2}-1, -1, 0)$.
Une base orthogonale du plan P est, par exemple : $\big((1, \sqrt{2}-1, 0), (0, 0, 1)\big)$
3. On constate que $C^2 = C$, donc g est un projecteur. De plus l'image de g est P et son noyau est D. Ces deux sous-espaces étant supplémentaires orthogonaux, g est bien une projection orthogonale.
4. Dans la base $\big((1, \sqrt{2}-1, 0), (0, 0, 1), (\sqrt{2}-1, -1, 0)\big)$, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(il suffit de déterminer, par exemple par un calcul direct, les images des vecteurs de cette nouvelle base)
Par conséquent, la matrice dans cette même base de f_n est :

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \end{pmatrix}$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k$ vaut 0 ou 1, selon la parité, on en déduit que la limite de F_n est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est justement la matrice de g dans la nouvelle base. Donc, en revenant aux matrices associées, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$.

Exercice 2-20

Soit n un entier naturel, avec $n \geq 2$. On note $E = O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n, c'est-à-dire l'ensemble des matrices A telles que ${}^tAA = I_n$.

1. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $O_n(\mathbb{R})$. Soit X la matrice à n lignes et une colonne définie par : $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer ${}^tXAX$.

2. Déterminer la valeur de $\sup\limits_{(a_{i,j}) \in E} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

Solution :

1. On a ${}^tXAX = \sum\limits_{i,j} a_{i,j}$.

2. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Pour tout vecteur y, on a en notant Y sa matrice colonne relativement à la base canonique :

$$\|f(y)\|^2 = \langle f(y), f(y) \rangle = {}^t(AY))(AY) = {}^tY{}^tAAY = {}^tYY = \|y\|^2$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne donc, pour tout vecteur y :

$$\langle y, f(y) \rangle \leq \|y\|.\|f(y)\| = \|y\|^2$$

Et en appliquant ceci au vecteur $y = (1, 1, \ldots, 1)$ de matrice colonne X :

$${}^tXAX = \langle x, f(x) \rangle \leq \|x\|^2 = n$$

Par conséquent, d'après le résultat de la question 1) :

$$\forall A \in O_n(\mathbb{R}), \sum_{i,j} a_{i,j} \leq n$$

L'égalité ayant lieu pour la matrice I_n (qui est bien dans $O_n(\mathbb{R})$), le sup est donc un max et vaut n.

Exercice 2-21

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension $n \geq 1$.

Soit f_1 et f_2 deux endomorphismes de E.

1. En considérant la restriction de f_1 au noyau de $f_2 \circ f_1$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \leq \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

2. Généraliser le résultat précédent à p endomorphismes de E, $f_1, \dots, f_p$, avec $p \geq 2$.

3. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^4 = id$, où id représente l'endomorphisme identité. Montrer que f est diagonalisable.

Solution :

1. Notons g la restriction de f_1 à $\operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$.

$\star$ $\operatorname{Ker} g = \{x \in \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \mid f_1(x) = 0\} = \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) \cap \operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_1$, car l'inclusion $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$ est banale.

$\star$ $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f_2$, puisque pour tout x de $\operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$, $g(x) = f_1(x)$ est tel que $f_2\big(f_1(x)\big) = 0$.

Le théorème du rang indique que $\dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Ker} g = \dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1)$, soit :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_2 \circ f_1) = \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Im} g \leq \dim \operatorname{Ker} f_1 + \dim \operatorname{Ker} f_2$$

2. Par une récurrence évidente, on a donc :

$$\dim \operatorname{Ker}(f_p \circ f_{p-1} \circ \cdots \circ f_1) \leq \sum_{k=1}^{p} \dim \operatorname{Ker} f_k$$

3. E étant un espace vactoriel complexe, $f^4 - id = 0$ s'écrit :

$$(f - id) \circ (f + id) \circ (f - i.id) \circ (f + i.id) = 0$$

et, par application du résultat de la question 2) :

$$n = \dim E = \dim \operatorname{Ker}(f - id) \circ (f + id) \circ (f - i.id) \circ (f + i.id)$$

Soit :

$$n \leq \dim \operatorname{Ker}(f - id) + \dim \operatorname{Ker}(f + id) + \dim \operatorname{Ker}(f - i.id) + \dim \operatorname{Ker}(f + i.id)$$

Or les sous-espaces précédents qui ne se réduisent pas à $\{0\}$ sont des sous-espaces propres de f, ils sont donc en somme directe et :

$$n \leq \dim(\operatorname{Ker}(f - id) \oplus \operatorname{Ker}(f + id) \oplus \operatorname{Ker}(f - i.id) \oplus \operatorname{Ker}(f + i.id)) \leq n$$

La somme des dimensions de ces noyaux est donc exactement n, ce qui signifie que f est diagonalisable.

Exercice 2-22

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On note E, l'espace vectoriel des applications continues de $[0, n]$ dans $\mathbb{R}$.

On note F, l'ensemble des applications f de E telles que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $[k, k+1]$ est affine.

1. a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que l'application

$$\theta : F \to \mathbb{R}^{n+1}, f \mapsto \big(f(0), f(1), \ldots, f(n)\big)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Qu'en déduit-on pour F ?

Dans la suite de l'exercice, on se place dans le cas où $n = 2$.

2. On note $f_0 = \theta^{-1}\big((1,0,0)\big), f_1 = \theta^{-1}\big((0,1,0)\big), f_2 = \theta^{-1}\big((0,0,1)\big)$.

a) Représenter graphiquement les applications f_0, f_1 et f_2.

b) Que peut-on dire de la famille (f_0, f_1, f_2) ?

3. On munit E du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ défini par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^2 f(t)g(t)\,dt$ et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.
On note f l'élément de E défini par $\forall\, x \in [0,2], f(x) = x^2$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément g de F tel que :

$$\forall\, i \in [\![0,2]\!], \langle f - g, f_i\rangle = 0$$

et déterminer cette application g.

b) Que représente g vis-à-vis de f et quelle propriété a-t-on concernant $\|\cdot\|$?

Solution :

1. a) F est inclus dans E (les éléments de F sont continus aussi aux points entiers), est non vide car il contient la fonction nulle, et si f et g sont telles que chaque restriction à $[k, k+1]$ est affine, il en est de même de toute combinaison linéaire $f + \lambda g$.

b) L'application θ est linéaire, et un élément de F est parfaitement défini par ses valeurs aux points entiers. En d'autres termes θ réalise une bijection linéaire de F sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Ainsi F est de dimension $n+1$.

2. a)

b) La famille (f_0, f_1, f_2) est l'image par l'isomorphisme θ^{-1} de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette famille est donc une base de F.

3. a) On cherche donc g sous la forme $g = x_0 f_0 + x_1 f_1 + x_2 f_2$ et, en calculant tous les produits scalaires, g est solution si et seulement si (x_0, x_1, x_2) est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\,x_0 + \frac{1}{6}\,x_1 = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{6}\,x_0 + \frac{2}{3}\,x_1 + \frac{1}{6}\,x_2 = \frac{7}{6} \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{1}{3}\,x_2 = \frac{17}{12} \end{cases}$$

D'où l'unique solution : $x_0 = -\frac{1}{6}; x_1 = \frac{5}{6}; x_2 = \frac{23}{6}$

et g est définie par : $g(x) = x - \frac{1}{6}$ si $0 \leq x \leq 1$ et $g(x) = 3x - \frac{13}{6}$ si $1 \leq x \leq 2$.

b) La fonction g est la projection orthogonale de la fonction f sur F, donc pour toute fonction h de F, on a : $\|f - h\| \geq \|f - g\|$, avec égalité seulement pour $h = g$.

Exercice 2-23

Soit p un entier supérieur ou égal à 2.

On note $A_p = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ la matrice de terme général :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{, si } j = i + 1 \text{ ou si } (i, j) = (p, 1) \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

1. a) Si $r \in [\![0, p - 1]\!]$, on pose $\omega_r = \mathrm{e}^{2ir\pi/p}$ et $X_r = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_r \\ \omega_r^2 \\ \vdots \\ \omega_r^{p-1} \end{pmatrix}$

Montrer que X_r est un vecteur propre de A_p et préciser la valeur propre associée.

b) A_p est-elle diagonalisable ?

Dans la suite de l'exercice, on se donne un réel $c \in]0, 1[$ et on considère trois suites de nombres complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = cu_n + (1 - c)v_n \\ v_{n+1} = cv_n + (1 - c)w_n \\ w_{n+1} = cw_n + (1 - c)u_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

2. a) Déterminer $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = MX_n$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de M et préciser l'espace propre associé.

c) Comparer le module des autres valeurs propres de M à 1.

3. a) Montrer que les trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note ℓ, ℓ' et ℓ'' leurs limites respectives et $X_\infty = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell' \\ \ell'' \end{pmatrix}$

b) Montrer que $MX_\infty = X_\infty$. Qu'en déduit-on ?

c) Généraliser le résultat obtenu.

Solution :

1. a) La matrice A_p est une matrice de « permutation circulaire » et on obtient facilement : $A_pX_r = \begin{pmatrix} \omega_r \\ \omega_r^2 \\ \vdots \\ \omega_r^p \end{pmatrix} = \omega_r X_r$. Donc X_r est une colonne propre pour A_p, associée à la valeur propre ω_r.

b) A_p possède p valeurs propres : $1 = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{p-1}$, donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

2. a) On a : $M = \begin{pmatrix} c & 1-c & 0 \\ 0 & c & 1-c \\ 1-c & 0 & c \end{pmatrix}$.

b) 1 est valeur propre de M, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) On a $M = c.I_3 + (1-c)A_3$, d'après la première question, les valeurs propres de M sont donc : $c+(1-c) = 1$ (déjà vu) et les nombres $\mu = c+(1-c)j$ et $\overline{\mu} = c + (1-c)j^2$.

On a : $|\mu|^2 = |\overline{\mu}|^2 = 1 - \dfrac{3}{2}c(1-c) < 1$.

3. a) La matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et il existe $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que : $M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu} \end{pmatrix} P^{-1}$. D'où :

$$X_n = M^n X_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^n & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\mu}^n \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

La limite d'une suite de matrices s'entendant terme à terme, on obtient donc :

$$X_\infty = \lim_{n\to\infty} X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

b) On a $X_{n+1} = MX_n$ et donc, par propriétés des limites (limites de sommes et produits) : $X_\infty = MX_\infty$. Ainsi X_∞ est une colonne propre de M pour la valeur propre 1, donc est colinéaire à la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\ell = \ell' = \ell''$.

c) Plus généralement, si on a p suites complexes $(z_n^{(1)}), \dots, (z_n^{(p)})$ telles que, pour tout $r \leq p-1$ et $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1}^{(r)} = cz_n^{(r)} + (1-c)z_n^{(r+1)}$ et $z_{n+1}^{(p)} = cz_n^{(p)} + (1-c)z_n^{(1)}$, alors ces suites sont convergentes de même limite, car les valeurs propres de $M_p = c.I_p + (1-c)A_p$ autres que 1 sont toutes de module strictement inférieur à 1.

Exercice 2-24

Soit E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, muni de sa structure euclidienne canonique (c'est-à-dire telle que la base canonique soit orthonormée).

On pose $F = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$.

1.) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2. Déterminer une base de F.

3. Déterminer $d(X, F)$ (distance du polynôme X au sous-espace F, c'est-à-dire $\inf\limits_{P\in F} \|X - P\|$).

Solution :

1. F n'est pas vide, puisqu'il contient le polynôme nul (ou le polynôme $X-1$) et clairement : $P(1) = 0, Q(1) = 0 \implies, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, (P + \lambda Q)(1) = 0$. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Un polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ appartient à F si et seulement si il est divisible par $X-1$. Une base de F est donc $\big(X-1, X(X-1)\big)$.

3. On cherche une base orthonormée de F et pour cela on orthonormalise la base précédente par le procédé de Gram-Schmidt, le produit scalaire étant $\langle \sum a_i X^i, \sum b_i X^i \rangle = \sum a_i b_i$ et donc $\| \sum a_i X^i \|^2 = \sum a_i^2$.

$e_1 = \dfrac{X-1}{\|X-1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$

$e_2 = \dfrac{X(X-1) - \langle X(X-1), e_1 \rangle e_1}{\|X(X-1) - \langle X(X-1), e_1 \rangle e_1\|} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}(X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{2})$

On a alors : $d^2(X,F) = \|X\|^2 - \langle X, e_1\rangle^2 - \langle X, e_2 \rangle^2 = \dfrac{2}{6}$ et donc :

$$d(X,F) = \sqrt{\frac{2}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 2-25

On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le plan d'équation : $x+y-z=0$.

Déterminer les matrices A et B, dans la base canonique, des projections orthogonales sur F et sur $F^\perp$.

Solution :

Notons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⋆ Le plan F est normal au vecteur unitaire $\vec{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$. Si q désigne la projection orthogonale sur la droite $F^\perp$ (qui est engendrée par $\vec{n}$), on a :

$$q(\vec{e}_1) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$$

et de la même façon :

$$q(\vec{e}_2) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3),\ q(\vec{e}_3) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{n})\vec{n} = -\frac{1}{3}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3).$$

D'où : $M(q) = B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

⋆ Si p est la projection orthogonale sur F, on a $p + q = id$, soit :

$$A = M(p) = I - B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2-26

I. Étude d'un exemple :

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique et $f \in \mathcal{L}(E)$ de matrice
$M = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de E. Montrer que : $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

2. Montrer que f est un projecteur.

3. Déterminer le noyau et l'image de f et montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

4. Caractériser f et retrouver le résultat de la question 1).

II. Cas général :

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie et p un projecteur de E.

1. On suppose $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ orthogonaux. Montrer que pour tout vecteur x de E, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

2. On suppose $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ non orthogonaux. Montrer que l'on peut trouver un vecteur x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$.

3. En déduire qu'un projecteur p, non nul, est orthogonal si et seulement si :

$$\sup_{x0} \frac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1.$$

Solution :

I. 1. On a : $f(x) = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}(1, 1, \dots, 1)$ et donc :

$$\|f(x)\|^2 = \frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2}{n}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a : $\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} 1.x_k\Big)^2 \leq n \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$, ce qui signifie exactement que $\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2$.

I. 2. On a $M^2 = M$, donc f est un projecteur.

I. 3. L'image de f est engendrée par le vecteur $u = (1, 1, \ldots, 1)$ et son noyau est le sous-espace d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$. Or un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est orthogonal à u si et seulement si $\sum x_k = 0$ (expression du produit scalaire, la base canonique étant orthonormée). Donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

I. 4. f est donc la projection orthogonale sur la droite engendrée par u et, par le théorème de Pythagore, pour tout vecteur x, on a : $\|f(x)\| \leq \|x\|$

II. 1. Pour tout x de E, on écrit $x = p(x) + (x - p(x))$ et comme $x - p(x)$ est orthogonal à x, le théorème de Pythagore donne :

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

II. 2. Si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ ne sont pas orthogonaux, on peut trouver un vecteur x non nul tel que x soit orthogonal à $\operatorname{Ker} p$ et $x \notin \operatorname{Im} p$. Alors $x - p(x)$ est non nul et orthogonal à x et le théorème de Pythagore donne ici :

$$\|p(x)\|^2 = \|p(x) - x + x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|x\|^2 > \|x\|^2$$

II. 3. $\star$ Si p est un projecteur orthogonal non nul, on a, pour tout vecteur x de E : $\|p(x)\| \leq \|x\|$, avec égalité pour $x \in \operatorname{Im} p \setminus \{0\}$. Donc $\sup\limits_{x0} \dfrac{\|p(x)\|}{\|x\|} = 1$

$\star$ Si p est un projecteur non orthogonal, il existe x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$ et la borne supérieure précédente (si elle existe) ne peut être égale à 1.

D'où l'équivalence demandée.

Exercice 2-27

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel S des suites réelles, on considère :

$E = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+3} - x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0\}$

$E_1 = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} + x_n = 0\}$

$E_2 = \{(x_n) \in S \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S

2. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E et donner une base de chacun d'eux.

3. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E. En déduire une base de E.

Solution :

1. E est une partie non vide de S (elle contient la suite nulle), clairement stable par combinaisons linéaires : E est un sous-espace vectoriel de S.

2. $\star$ E_1 est l'ensemble des suites géométriques de raison -1, donc est la droite engendrée par la suite $a = (a_n)_n = \big((-1)^n\big)_n$. On vérifie que a est un élément de E, donc E_1 est un sous-espace vectoriel de E de base (a).

$\star$ E_2 est l'ensemble des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire à deux termes d'équation caractéristique :

$$r^2 - 2r + 1 = 0$$

1 est racine double de cette équation et on sait alors que tout élément de E_2 est une suite de la forme $n \mapsto \lambda.1^n + \mu n.1^n = \lambda + n.\mu$, les paramètres λ et μ étant définis par les deux premiers termes de la suite. Tout élément de E_2 est donc combinaison linéaire des suites $b = (1)_n$ et $c = (n)_n$. L'ensemble E_2 est donc le sous-espace engendré par b et c et ces deux suites étant non proportionnelles elles forment une base de E_2.

(On peut aussi écrire la relation de définition sous la forme $x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, ce qui caractérise les suites arithmétiques)

3. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi\big((x_n)_n\big) = (x_0, x_1, x_2)$ est clairement linéaire et bijective, puisque la relation de récurrence définit parfaitement (justement par ... récurrence !) une suite x de E à partir du triplet quelconque de ses trois premiers termes.

Donc E est un espace vectoriel de dimension 3 et comme on a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ (vérification facile), E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
Ainsi (a, b, c) est une base de E.

Exercice 2-28

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels et $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$.

1. Dire pourquoi il existe une matrice carrée d'ordre n inversible P, telle que ${}^tPSP$ soit diagonale, avec $P^{-1} = {}^tP$.

On note α la plus petite et β la plus grande valeur propre de S.

2. Soit λ une valeur propre réelle de A, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une colonne propre associée.

a) Calculer ${}^tXSX$ en fonction de λ et des coefficients x_i.

b) Soit $Y = {}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Exprimer ${}^tXSX$ à l'aide des valeurs propres de S et des coefficient y_i. En déduire que $\alpha \leq \lambda \leq \beta$.

3. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Solution :

1. La matrice S est symétrique réelle, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on peut choisir la matrice de passage diagonalisante P telle que $P^{-1} = {}^tP$ (matrice de changement de bases orthonormées).

2. a) On a $AX = \lambda X$ et donc ${}^tX{}^tA = \lambda{}^tX$, d'où :

$$ {}^tXSX = \lambda{}^tXX = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 $$

b) Notons ${}^tPSP = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, où les λ_i sont rangés par ordre croissant (au sens large). On a alors :

$$ {}^tXSX = {}^tXPD{}^tPX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 $$

Et donc :

$$ \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 $$

Mais $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = {}^tYY = {}^tXP{}^tPX = {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, et comme X n'est pas la colonne nulle, il vient bien :

$$ \alpha = \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_n = \beta $$

3. Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, on obtient $S = 2I$, d'où $\alpha = \beta = 2$ et la seule valeur propre réelle possible de A est $\lambda = 2$.

Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle serait semblable à $2I$, donc égale à $2I$, ce qui est évidemment faux.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2-29

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont notés en colonne.

Trois réels a, b, c étant donnés tels que $a^2+b^2+c^2=1$ et $c \neq 0$, on pose :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

1.Montrer que pour tous vecteurs U et V de $\mathbb{R}^3$, on a : $\langle MU, V\rangle = -\langle MV, U\rangle$.

2. En déduire la seule valeur propre réelle possible de M et le sous-espace propre associé.

3. Déterminer une base orthonormée $\mathcal{B} = (U, V, W)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $MW = 0$.

4. Déterminer la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$: $X \mapsto MX$ dans cette base $\mathcal{B}$ (on la notera A dans la suite de cet exercice).

5. On définit sur $\mathbb{R}^3$ la fonction $f : X \mapsto {}^tXM^2X$, où ${}^tX$ désigne la matrice transposée de X.

Rechercher ses extremums locaux. (Il n'est pas nécessaire de dériver)

6. Calculer A^2, en déduire une relation entre M^2X et X lorsque $\langle \Omega, X\rangle = 0$.

7. M^2 est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. On a :

$$\langle MU, V\rangle = {}^t(MU)V = {}^tU{}^tMV = -{}^tUMV = -\langle U, MV\rangle$$

On conclut par symétrie du produit scalaire.

2. Soit X un vecteur quelconque, on a : $\langle MX, X\rangle = -\langle MX, X\rangle$, c'est-à-dire : $\langle MX, X\rangle = 0$, et si X est propre pour la valeur propre réelle λ : $\lambda \|X\|^2 = 0$.

Comme X n'est pas la colonne nulle, il reste $\lambda = 0$.

La matrice M est de rang 2, donc son noyau est de dimension 1. On voit que $\Omega \in \operatorname{Ker} M$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est la droite engendrée par Ω.

3. On prend $W = \Omega$ (on pourrait prendre $-\Omega$). Tout vecteur de la forme $\begin{pmatrix} kc \\ 0 \\ -ka \end{pmatrix}$ est orthogonal à Ω et pour prendre U unitaire, on peut choisir $k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}$.
Enfin, MU est orthogonal à U et aussi à Ω, puisque

$$\langle MU, \Omega\rangle = -\langle U, M\Omega\rangle = -\langle U, 0\rangle = 0.$$

On peut donc prendre V colinéaire à $MU = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\begin{pmatrix} -ab \\ a^2+c^2 \\ -bc \end{pmatrix}$ et ce vecteur étant unitaire, on prend $V = MU$.

4. On a déjà $M\Omega = 0$ et $MU = V$, on calcule alors MV et on trouve $-U$. Ainsi la matrice relativement à $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme canoniquement associé à M est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Comme M est antisymétrique : ${}^tXM^2X = -{}^t(MX)(MX) = -\|MX\|^2$. Il est alors clair que le *maximum* de f vaut 0 (et il est atteint pour les colonnes X colinéaires à Ω), tandis que f n'a pas d'extremum en un point X tel que $f(X)0$, puisque $f(tX) = t^2f(X)$, qui n'a pas d'extremum au voisinage de $t = 1$.

6. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui signifie que $M^2U = -U$ et $M^2V = -V$ (ce sont les deux premiers vecteurs de la nouvelle base, à un coefficient multiplicatif près), donc tout vecteur orthogonal à Ω est transformé par M^2 en son opposé.

7. A et M sont semblables, donc A^2 et M^2 aussi et M^2 est diagonalisable (on peut aussi remarquer que M^2 est symétrique réelle).

Exercice 2-30

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, avec $n > 0$.

1. Soient f et g deux endomorphismes de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante, portant sur $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} f$, pour que $f \circ g$ soit l'endomorphisme nul de l'espace E.

2. Soit F un sous-espace de E et p sa dimension.
Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_F$ des endomorphismes g de E tels que $\operatorname{Im} g$ est incluse dans F est un espace vectoriel réel de dimension np.

3. Soit u un endomorphisme quelconque de E.
On considère l'application φ_u de $\mathcal{L}(E)$ (ensemble des endomorphismes de E) dans lui-même définie par la relation : $\varphi_u(f) = u \circ f$.

a) Montrer que φ_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

b) Montrer que si le réel λ est valeur propre de u, alors λ est valeur propre de φ_u, et que la dimension du sous-espace propre de φ_u associé à λ est égale à $n.d_\lambda$, où d_λ est la dimension du sous-espace propre de u associé à cette valeur propre λ.

c) En déduire que si u est diagonalisable, alors φ_u est diagonalisable.

d) **Application** : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. L'endomorphisme ψ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels) défini par la relation : $\psi(M) = AM$ est-il diagonalisable ?

e) Montrer que si le réel λ est valeur propre de φ_u, alors λ est valeur propre de u.
Montrer que si φ_u est diagonalisable, alors u est diagonalisable.

Solution :

1. On a :
$$f \circ g = 0 \iff \forall\, x \in E, f\big(g(x)\big) = 0 \iff \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f.$$

2. L'ensemble $\mathcal{E}_F$ n'est pas vide, car il contient l'endomorphisme nul, et est stable par combinaisons linéaires (car $\operatorname{Im} f_1 \subset F$ et $\operatorname{Im} f_2 \subset F \implies \operatorname{Im}(f_1 + \lambda f_2) \subset F$), donc $\mathcal{E}_F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

D'autre part, l'application $j : \mathcal{E}_F \to \mathcal{L}(E, F)$, qui à un endomorphisme g dont l'image est incluse dans F associe l'unique application linéaire $\widehat{g}$ de E vers F définie par : pour tout x de E, $\widehat{g}(x) = g(x)$, est clairement linéaire et bijective (opération de restriction à l'arrivée), donc est un isomorphisme de $\mathcal{E}_F$ sur $\mathcal{L}(E, F)$. Ces deux espaces ont donc la même dimension, ce qui donne la conclusion.

3. a) Déjà φ_u applique bien $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même et la linéarité découle facilement de la linéarité de u.

b) $\mathrm{Ker}(\varphi_u - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ est l'ensemble des endomorphismes f de E tels que $\varphi_u(f) = \lambda f$, c'est-à-dire tels que $(u - \lambda Id_E) \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
D'après le résultat de la première question, ceci a lieu si et seulement si l'image de f est contenue dans $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$. Cet espace est de dimension $d_\lambda \geq 1$, donc $\mathrm{Ker}(\varphi_u - \lambda Id_{\mathcal{L}(E)})$ est de dimension $n.d_\lambda > 0$. Ce qui prouve que λ est effectivement valeur propre de φ_u et donne en prime la dimension du sous-espace propre associé.

c) Si u est diagonalisable, alors $\sum d_\lambda = n$, la sommation étant étendue à toutes les valeurs propres de u. Par conséquent $\sum n.d_\lambda = n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$, ce qui signifie que φ_u est diagonalisable ($\mathcal{L}(E)$ est somme directe de sous-espaces propres pour l'endomorphisme φ_u de $\mathcal{L}(E)$, sans qu'il soit nécessaire de savoir si l'on connaît toutes les valeurs propres de φ_u).

d) Des calculs simples montrent que A admet trois valeurs propres : $0, 1$ et 2. Ainsi A est diagonalisable et, en confondant matrice et application linéaire canoniquement associée, les résultats précèdents montrent que ψ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

e) Si λ est valeur propre de φ_u, il existe f non nulle telle que $u \circ f = \lambda f$. Pour tout vecteur x tel que $y = f(x)0$ (il en existe !), on a alors $u(y) = \lambda y$ et λ est valeur propre de u. Ainsi il y a égalité entre l'ensemble des valeurs propres de u et l'ensemble des valeurs propres de φ_u. On peut donc maintenant écrire :

$$\sum_{\lambda \in spec(\varphi_u)} n.d_\lambda = n. \sum_{\lambda \in spec(u)} d_\lambda$$

Ainsi u est diagonalisable ($\sum_{\lambda \in spec(u)} d_\lambda = n$) si et seulement si φ_u est diagonalisable ($\sum_{\lambda \in spec(\varphi_u)} n.d_\lambda = n^2$).