2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

A toute matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on associe le nombre réel $\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, appelé « trace » de la matrice M.

1. Montrer que pour toutes matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ et que si deux matrices sont semblables, leurs traces sont égales.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. On suppose que chaque coefficient de A vaut 0 ou 1 et qu'il existe un entier naturel non nul k tel que

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & k & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & k \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. En déduire que U est vecteur propre de A^2 et que que $n = k^2 - k + 1$.

3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A^2.

Solution :

1. Avec des notations évidentes, on écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(MN) &= \sum_{i=1}^{n}(MN)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{k,i}m_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}(NM)_{k,k} = \mathrm{tr}(NM)\end{aligned}$$

Soit alors A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables, il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$ et :

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$$

2. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On sait que $a_{i,j} = a_{j,i}$. L'élément générique de A^2 s'écrit $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{j,k}$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$k = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}a_{i,\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell}^2$$

Comme chaque $a_{i,\ell}$ appartient à $\{0, 1\}$, il en résulte que A possède un nombre de 1 exactement égal à k sur chaque ligne, le reste étant des 0. Donc :

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = kU$$

Ainsi $A^2U = k^2U$, d'où $k + (n-1) = k^2$, soit :

$$n = k^2 - k + 1$$

3. Posons $J = \begin{pmatrix}1 & \dots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \dots & 1\end{pmatrix}$. Alors $A^2 = J + (k-1)I$.

La matrice J admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n-1)$ (car J est de rang 1). C'est l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

La matrice J est symétrique réelle, donc diagonalisable. La diagonale de la matrice D diagonale semblable à J est formée des valeur propres de J, et deux matrices semblables ont même trace. La valeur propre manquante de J est donc n et le sous-espace propre associé est de dimension 1. C'est l'orthogonal de l'hyperplan précédent donc, $\mathrm{Vect}(U)$.

Enfin, comme $A^2 = J + (k-1)I$, les valeurs propres de A^2 sont $k-1$, le sous-espace propre étant l'hyperplan H, et $n - k + 1 = k^2$ de sous-espace propre associé $\mathrm{Vect}(U)$.

Exercice 2.2.

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Soit λ une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

On note
$\|X\| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} (|x_i|)$. Montrer que $\forall\, i \in [\![1, n]\!], |\lambda x_i| \leq r_i \|X\|$ et en déduire qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$, tel que $|\lambda| \leq r_i$.

2. Soit $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose $P(X) = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k X^k$ et on note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général :

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ -c_{j-1} & \text{si } i = n \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$$

a) Montrer que les valeurs propres complexes de M sont les racines du polynôme P.

b) On pose $R = \max(|c_0|, 1 + |c_1|, 1 + |c_2|, \dots, 1 + |c_{n-1}|)$.
Déduire de ce qui précède que toutes les racines complexes de P ont un module inférieur ou égal à R.

3. Soit a, b, c, d quatre entiers naturels non nuls deux à deux distincts.
Montrer que l'équation, d'inconnue x,

$$x^a + x^b = x^c + x^d$$

n'admet pas d'autre solution que 0 et 1 dans $\mathbb{N}$.

Solution :

1. Par hypothèse, on a $AX = \lambda X$. Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Ainsi :

$$|\lambda x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ |x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\ ||X|| = r_i ||X||$$

De plus, comme $X \neq 0$, il existe i_0 tel que $x_{i_0} = ||X||$, ce qui entraîne :

$$|\lambda x_{i_0}| = |\lambda|\ ||X|| \leqslant r_{i_0} ||X|| \text{ et donc } |\lambda| \leqslant r_{i_0}$$

2. a) La matrice M s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & \dots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, λ est valeur propre de M si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$ c'est-à-dire si et seulement s'il existe $X \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \quad \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ -c_0 x_1 - c_1 x_2 - \cdots - c_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda^2 x_1 \\ \qquad \vdots \\ x_n = \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) x_1 = 0 \end{cases}$$

Or $X \neq 0$ si et seulement si $x_1 \neq 0$ (car $x_1 = 0$ donne banalement en remplaant dans les équations successives : $x_2 = x_3 = \ldots = 0$) et donc λ valeur propre de $M \implies P(\lambda) = 0$.

b) Les matrices M et M^T ont les mêmes valeurs propres (car $M - \lambda I$ et $(M - \lambda I)^T = M^T - \lambda I$ ont même rang).
Avec les notations de la première question, on a, pour M^T :

$$r_1 = |c_0|, r_2 = 1 + |c_1|, \ldots, r_n = 1 + |c_{n-1}|$$

Donc, $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de P si et seulement si λ est valeur propre de M^T et il existe r_i tel que $|\lambda| \leqslant r_i$. Donc $|\lambda| \leqslant \max(r_i) = R$.

3. Les solutions de $n^a + n^b = n^c + n^d$ sont les racines d'un polynôme P pour lequel $R = 2$. Les solutions dans $\mathbb{N}$ ne peuvent donc être que $0, 1, 2$ (question 2.b).
On remarque que $0, 1$ sont solutions. Par contre 2 ne peut être solution. En effet, on peut supposer, par symétrie des rôles, que $a = \min(a, b, c, d)$. On aurait alors

$$1 + 2^{b-a} = 2^{c-a} + 2^{d-a}$$

ce qui est absurde car le membre de gauche est impair et celui de droite pair.

Exercice 2.3.

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On considère l'application f de E dans E définie par

$$f(P) = (X - 1)\big(P - \frac{(X-1)^3}{6} P'''\big)$$

où P''' désigne la dérivée tierce (troisième) de P.

1. a) Montrer que f est linéaire.

b) Montrer que si $P \in \operatorname{Im} f$, alors 1 est racine de P.

c) L'application f est-elle surjective ?

2. a) Calculer $\deg f(P)$ en fonction de $\deg P$ si $\deg P \neq 3$.

b) Soit P un vecteur propre de f. Montrer que $\deg P = 3$.

3. a) Montrer que $f(E_3) \subset E_3$. On appelle g l'endomorphisme de E_3 défini par $f(P) = g(P)$ pour tout $P \in E_3$.

b) Montrer que g n'est pas injectif.

c) On note $Q_k = (X-1)^k$ pour $k \in [\![0,3]\!]$. Donner la matrice A de g dans la base $\mathcal{B} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

d) En déduire que A est de rang 3 et que seul 0 est valeur propre de g.

4. On revient à l'étude de f et on recherche les sous-espaces vectoriels de E de dimension finie stables par f, c'est-à-dire tels que $f(F) \subset F$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker} f^3$ sont des sous-espaces vectoriels de E de dimension finie, stables par f.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, stable par f. Montrer que $F \subset E_3$ puis que $F = \{0\}$ ou $F = \operatorname{Ker} f$, ou $F = \operatorname{Ker} f^2$ ou $F = \operatorname{Ker} f^3$.

Solution :

1. a) La linéarité de f est celle de la dérivation.

b) Il est évident que $f(P)(1) = 0$.

c) L'application f n'est pas surjective, puisque $\operatorname{Im} f$ est contenu dans le sous-espace vectoriel, strictement inclus dans $\mathbb{R}[X]$, des polynômes s'annulant en 1.

2. a) Choisissons comme base de $\mathbb{R}[X]$ la famille $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, \ldots, (X-1)^n, \ldots)$, et regardons, pour tout $k \geqslant 0$, $f((X-1)^k)$.

- si $k \leqslant 2$, $f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}$.
- si $k \geqslant 3$, $f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}\big(1 - \dfrac{k(k-1)(k-2)}{6}\big)$.

Ainsi, pour tout $k \geqslant 0$:

$$f((X-1)^k) = (X-1)^{k+1}\big(1 - \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\big)$$

Ainsi, si le degré de P est p, celui de $f(P)$ est $p+1$.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \neq 0$ tel que $f(P) = \lambda P$. On a alors $\deg f(P) = \deg P$, si $\lambda \neq 0$.

La seule valeur propre possible est donc $\lambda = 0$ et dans ce cas $f(P) = 0$. En écrivant P dans la base $\mathcal{B}$, la seule possibilité est $1 - \dfrac{p(p-1)(p-2)}{6} = 0$, soit $p = 3$

3. a) Le choix de la base $\mathcal{B}$ et l'expression de f dans cette base rend cette question évidente.

b) Comme dans la première question g n'est pas surjective.

c) La matrice demandée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Il est évident que A est de rang 3 (les trois première colonnes sont libres, la dernière est nulle) et que $A^4 = 0$. Ainsi 0 est la seule valeur propre de A.

4. a) Un calcul immédiat donne :

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((X-1)^3)$, $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2)$,

$\operatorname{Ker} f^3 = \operatorname{Vect}((X-1)^3, (X-1)^2, (X-1))$, $\operatorname{Ker} f^4 = E_3$.

b) Soit F un sous-espace de dimension finie stable par f. Supposons que F contienne un polynôme P de degré $p > 3$. Alors F contient $f(P)$ de degré $p+1$, contient également $f^2(P)$ de degré $p+2$, etc. en contradiction avec sa dimension finie. Donc $F \subseteq E_3$

Evidemment $\{0\}$ est stable. Si $F \neq \{0\}$, notons $k = \dim F$, avec $1 \leqslant k \leqslant 3$. L'application restreinte f_F est un endomorphisme de F et est nilpotent (puisque f l'est). L'ordre de nilpotence de f_F est inférieur ou égal à la dimension de F, soit k. Donc $(f_F)^k = 0$, et

$$F = \operatorname{Ker}(f_F)^k \subseteq \operatorname{Ker} f^k$$

On conclut que $F = \operatorname{Ker} f^k$ par égalité des dimensions.

Exercice 2.4.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$. On suppose qu'il existe deux endomorphismes de E, u et v vérifiant la relation suivante :

$$u^3 + u^2 + u = v.$$

1. Soit λ une valeur propre de u associée à un vecteur propre x. Montrer que x est vecteur propre de v associé à une valeur propre que l'on déterminera.

2. On suppose dans cette question uniquement que u admet n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Montrer que v admet également n valeurs propres distinctes, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ que l'on exprimera à l'aide des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

3. Montrer que si u est diagonalisable, alors v l'est également.

4. Montrer que si v est inversible, alors u l'est également. Donner un exemple en dimension 2 où la réciproque n'est pas vérifiée.

Solution :

1. Soit x un vecteur non nul tel que $u(x) = \lambda x$.
Une récurrence facile monre que, pour tout $k \geqslant 1, u^k(x) = \lambda^k x$, d'où :

$$v(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

2. On vient que montrer que si λ est une valeur propre de u, alors $\lambda^3+\lambda^2+\lambda$ est valeur propre de v. Démontrer la question revient à montrer que, pour tout (λ, μ) valeurs propres de u :

$$\lambda \neq \mu \implies \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda \neq \mu^3 + \mu^2 + \mu$$

Pour cela, il suffit d'étudier la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 + x^2 + x$ et de vérifier qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est quasiment évident puisque sa dérivée est $x \mapsto 3x^2 + 2x + 1$ qui reste strictement positive sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. La première question montre que $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de v. L'endomorphisme v est donc diagonalisable.

4. a) Supposons que u ne soit pas inversible. Alors 0 est valeur propre de u et il existe au moins un vecteur propre (donc non nul) x associé. La première question montre que 0 est valeur propre de v et que le même vecteur x lui est associé. Donc v n'est pas inversible. Ainsi, par contraposée, v inversible $\implies$ u inversible.

b) En dimension 2, prenons la rotation d'angle $2\pi/3$ de matrice

$$U = \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Par calculs, les valeurs propres de U sont complexes et valent $j = \mathrm{e}^{2i\pi/3}$ et j^2. Sur $\mathbb{C}$, U admet deux valeurs propres distinctes non nulles et donc U est inversible.
Mais comme $0 = j(j^2 + j + 1) = j^3 + j^2 + j$, la seule valeur propre de $V = U^3 + U^2 + U$ est 0 et V n'est pas inversible.

Exercice 2.5.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On recherche les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AM - MA = A$.

1. Traiter le cas particulier $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que si l'équation proposée a au moins une solution, alors elle en admet une infinité.

3. On suppose que l'équation proposée admet M pour solution.

a) Montrer que pour tout entier naturel p, on a alors $A^pM - MA^p = pA^p$.

b) En considérant l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(N) = NM - MN$, en déduire qu'il existe un entier k tel que $A^k = 0$.

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$.
Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Montrer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ tel que $\big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. En déduire une matrice A' simple semblable à A.

Proposer alors une méthode pour trouver les matrices M solutions.

Solution :

1. On pose $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis on effectue le calcul $AM - MA$, et on résout l'équation $AM - MA = A$, ce qui donne les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a+1 & b \\ 0 & 0 & a+2 \end{pmatrix}$$

2. S'il existe M telle que $AM - MA = A$, alors pour tout réel λ, $M + \lambda I$ vérifie la même relation.

3. a) La relation demandée est banale pour $p = 0$ et vérifiée pour $p = 1$. Supposons qu'elle soit vérifiée pour un certain entier p, soit : $A^pM - MA^p = pA^p$. Alors :

$$A^{p+1}M - AMA^p = pA^{p+1}$$

et en multipliant à droite $AM - MA = A$ par A^p, il vient :

$$AMA^p - MA^{p+1} = A^{p+1}$$

Il reste à sommer ces deux dernières égalités, ce qui donne :

$$A^{p+1}M - MA^{p+1} = pA^{p+1} + A^{p+1} = (p+1)A^{p+1}$$

et la relation est encore valide au rang $p+1$, d'où la conclusion.

b) Soit M une solution de l'équation. Dans ce cas, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \neq 0$, A^p est vecteur propre de φ associé à la valeur propre p. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, φ ne peut admettre une infinité de valeurs propres : il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$.

4. La matrice A vérifie $A^{n-1} \neq 0, A^n = 0$; elle représente un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, nilpotent d'ordre n. Soit x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Il est classique (et on montre aisément) que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre donc constitue une base de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette base, u s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il existe une matrice inversible P telle que $A = P^{-1}A'P$. On a alors :

$$AM - MA = A \Longleftrightarrow A'(PMP^{-1}) - (PMP^{-1})A' = A'$$

soit $A'N - NA' = A'$, ce qui est plus simple à résoudre par un calcul direct, vu le nombre d'éléments nuls de A'.

Exercice 2.6.

Si k est un entier naturel, $\mathbb{R}_k[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à k. Dans l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. a) Déterminer trois polynômes A, B, C à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$\begin{cases} A(-1) = 1 \\ A(0) = 0 \\ A(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(-1) = 0 \\ B(0) = 1 \\ B(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C(-1) = 0 \\ C(0) = 0 \\ C(1) = 1 \end{cases}$$

b) La famille (A, B, C) obtenue est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

2. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$$

Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on déterminera le noyau et l'image.

3. On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X] v(P) = P(0)A + P(1)B + P(-1)C$$

a) Déterminer les valeurs et vecteurs propres de v.

b) L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

c) Existe-t-il un polynôme R tel que $u = R(v)$? Existe-t-il un polynôme S tel que $v = S(u)$?

Solution :

1. a) Les conditions $A(0) = A(1) = 0$ et $A \in \mathbb{R}_2[X]$ entraînent que

$$A(X) = \lambda X(X - 1).$$

La condition $A(-1) = 1$ donne $\lambda = 1/2$, et $A = \frac{1}{2}\, X(X - 1)$.

On trouve de même que $B = (1 - X^2)$ et $C = \frac{1}{2}\, X(X + 1)$.

b) Si $P = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, alors :

$$\alpha = P(-1) = 0, \qquad \beta = P(0) = 0, \qquad \gamma = P(1) = 0$$

La famille (A, B, C) est formée d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, libre de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est une base de cet espace.

2. Au vu de la définition de u, il vient : $u^2(A) = u(A)$, $u^2(B) = u(B)$, et $u^2(C) = u(C)$, donc par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$u^2(P) = u(P)$$

ce qui signifie que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

Le noyau $\operatorname{Ker} u$ est formé des polynômes s'annulant en $\{-1, 0, 1\}$ donc de la forme $(X+1)X(X-1)Q(X)$. L'image $\operatorname{Im} u$ est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$, et comme la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$ est l'identité, on a $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_2[X]$.

3. a) On constate que :

$$\operatorname{Ker} v = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(-1) = P(0) = P(1) = 0\} = \operatorname{Ker} u$$

D'autre part, $v(A) = C, v(B) = A, v(C) = B$. Cela montre que $v^3 = u$.

Les valeurs propres de v vérifient $\lambda^3 \in \{0, 1\}$ et comme elles sont réelles, il vient $\lambda \in \{0, 1\}$.

On a vu que $\operatorname{Ker} v = \operatorname{Ker} u$. Donc 0 est valeur propre de v, le sous–espace propre associé étant $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P = (X^3 - X)Q(X)\}$, qui est de dimension $n - 2$.

D'autre part, $v(A + B + C) = A + B + C$ montre que 1 est valeur propre de v. De plus le sous–espace propre $E_1(v)$ est inclus dans $\operatorname{Im} v = \mathbb{R}_2[X]$. Ainsi l'équation $v(P) = P$ donne $P(0) = P(1) = P(-1)$, et $P \in \operatorname{Vect}(A+B+C)$. Le sous–espace propre associé à la valeur propre 1 est donc une droite vectorielle.

b) La somme des dimensions des sous–espaces propres est égale à $n - 1 < n + 1$. L'endomorphisme v n'est pas diagonalisable.

c) On a $u = R(v)$, avec $R(X) = X^3$. Il ne peut exister un polynôme S tel que $v = S(u)$, car sinon, v serait diagonalisable puisque u l'est.

Exercice 2.7.

Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle trace d'une matrice carrée A et on note $\operatorname{tr} A$ la somme de ses coefficients diagonaux. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques (c'est-à-dire telles que ${}^tA = -A$).

1. Vérifier que :

$\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

la trace est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$;

$\forall (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2, \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA), \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA)$.

En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant :

$$\forall (A,B) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$$

On notera $\|A\| = \sqrt{\langle A, A\rangle}$.

3. On suppose dans cette question que A est symétrique.
Montrer que $\mathrm{tr}(A^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ sont les termes diagonaux d'une matrice diagonale D, semblable à A.

4. Calculer $\langle A, I_n\rangle$ et montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}.$$

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\min_{B\in\mathcal{S}} \|A - B\|$.

Solution :

1. Cette question, sur la trace d'une matrice, a été résolue maintes fois dans les annales des années précédentes.

2. Il est évident que $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A^TB)$ est bilinéaire, car l'application trace est linéaire, comme la transposition.
Cette application est symétrique, par la question précédente.
De plus $\mathrm{tr}(A^TA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2 \geqslant 0$ et donc $\mathrm{tr}(A^TA) = 0 \Longleftrightarrow A = 0$.

On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Si A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe ainsi une matrice P orthogonale, une matrice D diagonale telle que $A = P^TAP$. Par les deux questions précédentes, il vient :

$$\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A^TA) = \mathrm{tr}(P^TD^2P) = \mathrm{tr}(D^2)$$

et par définition de D, $\mathrm{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, où les (λ_i) sont les valeurs propres de A.

4. On sait que $\langle A, I_n\rangle = \mathrm{tr}(A)$. De plus, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$|\,\mathrm{tr}(A)| = |\langle A, I_n\rangle| \leqslant ||I_n||.||A|| = \sqrt{n}\sqrt{\mathrm{tr}(A^TA)}$$

5. Le cours nous dit que le minimum recherché est atteint par le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$. Or on sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$. On écrit donc A sous la forme $S + U$, avec $S \in \mathcal{S}, U \in \mathcal{A}$. Mais :

$$\langle S, U\rangle = \mathrm{tr}(SU) = \mathrm{tr}(-US) = -\,\mathrm{tr}(SU) \implies \langle S, U\rangle = 0$$

Le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}$ est donc $S = \dfrac{1}{2}(A + A^T)$. Ainsi :

$$\min_{B\in\mathcal{S}} ||A - B|| = ||A - S|| = ||U||.$$

Exercice 2.8.

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme 1. On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a.$$

1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

2. Montrer que f_a est diagonalisable.

3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal
(c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E, alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

5. Soit b un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.

Solution :

1. Il est évident que f_a est un endomorphisme de E. Déterminons son noyau.

$$f_a(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 2\langle x, a\rangle a \implies \langle x, a\rangle = 2\langle x, a\rangle \|a\|^2 = 2\langle x, a\rangle$$

Donc $\langle x, a\rangle = 0$ et $x = 0$. Ainsi f_a est injectif et est un automorphisme de E.

Pour déterminer f_a^-1, il suffit de résoudre l'équation $y = x - 2\langle x, a\rangle a$ d'inconnue x. Or :

$$y = x - 2\langle x, a\rangle a \implies \langle y, a\rangle = -\langle x, a\rangle$$

Donc $x = y - 2\langle y, a\rangle a$, soit $f_a^{-1} = f_a$.

2. L'automorphisme f_a est une involution puisque $f_a^2 = I$. C'est donc une symétrie. Ses valeurs propres sont à prendre dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ et :

$$E_1(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = x\} = (\overrightarrow{a})^\perp$$
$$E_{-1}(f_a) = \{x \in E \mid f_a(x) = -x\} = \overrightarrow{a}$$

Ainsi f_a est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. On a :

$$\begin{aligned}\langle f_a(x), f_a(y)\rangle &= \langle x - 2\langle x, a\rangle a, y - 2\langle y, a\rangle a\rangle \\ &= \langle x, y\rangle - 2\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle - 2\langle y, a\rangle\langle x, a\rangle + 4\langle x, a\rangle\langle y, a\rangle ||a||^2 \\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

4. Soit $x \in E$,

$$f_{g_a}(g(x)) = g(x) - 2\langle g(x), g(a)\rangle g(a) = g(x) - 2\langle x, a\rangle g(a)$$

$$= g(x - 2\langle x, a\rangle a) = g(f_a(x))$$

Donc, comme g est orthogonal, il est bijectif et

$$f_{g(a)} \circ g = g \circ f_a \text{ et donc } g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$$

5. a) Supposons que $f_a = f_b$. Alors pour tout $x \in E$:

$$\langle x, a\rangle a = \langle x, b\rangle b$$

En prenant $x = a$, il vient $a = \langle a, b\rangle b$, ce qui signifie que a et b sont colinéaires. Comme ils sont de norme 1, cela entraîne que $a = \pm b$.

La réciproque est évidente.

b) Soit c unitaire tel que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$. Alors $f_c \circ f_a \circ f_c^{-1} = f_a$. Par la question 4, il vient $f_{f_c(a)} = f_a$. Comme f_c est un endomorphisme orthogonal et comme a est unitaire, $f_a(c) = b$ est unitaire et par la question précédente, on a

$$a = \pm b = \pm f_a(c) = \pm(c - 2\langle c, a\rangle a)$$

Les vecteurs a et c sont liés et de norme 1. Donc $a = \pm c$.

Exercice 2.9.

On considère $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $u \otimes v$ l'endomorphisme défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$(u \otimes v)(x) = \langle x, v\rangle u.$$

1.a) Soient u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$; quelle est l'image de l'endomorphisme $u \otimes v$? Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de $u \otimes v$. Quand est-il diagonalisable ?

b) Prouver que

$$(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2) = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)$$

où $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit λ un réel qui n'est pas une valeur propre de $u \otimes v$; montrer que l'inverse de l'endomorphisme $\lambda Id - u \otimes v$ est donné par

$$(\lambda Id - u \otimes v)^{-1} = \frac{1}{\lambda} Id + \frac{1}{\lambda\,(\lambda - \langle u, v\rangle)} u \otimes v$$

d) On note ${}^t f$ l'adjoint de l'endomorphisme f, il est determiné par l'égalité

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, {}^t f\,(y)\rangle$$

valable pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^n$.
Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^n$. Quel est l'adjoint de l'endomorphisme $u \otimes v$?

e) Soient u_1, v_1, u_2, v_2 quatre vecteurs de $\mathbb{R}^n$; sous quelles conditions a-t-on $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$?

2. Soient g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et u, v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et ${}^t g(v) = \alpha v$.

3. On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Déterminer les matrices des endomorphismes qui commutent avec $u \otimes v$. Quel est la dimension de cet espace vectoriel ?

Solution :

1. a) Posons $f = u \otimes v$. Il est clair que l'image de f est la droite engendrée par le vecteur u. On voit immédiatement que 0 est valeur propre de f et que $\operatorname{Ker} f$ est l'hyperplan $\big(\operatorname{Vect}(v)\big)^{\perp}$.
Comme tout vecteur propre associé à une valeur propre non nulle appartient à $\operatorname{Im} f$, il suffit d'examiner u. Or $f(u) = \langle u, v\rangle u$; donc $\lambda = \langle u, v\rangle$ est valeur propre de f.

• si u est orthogonal à v, la seule valeur propre de f est 0. Comme $f \neq 0$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable (en revanche $f^2 = 0$).

• si u n'est pas orthogonal à v, f admet deux valeurs propres (0 et λ) et la somme des dimensions des sous–espaces propres est égale à la dimension de E ; l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Soit $x \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}(u_1 \otimes v_1) \circ (u_2 \otimes v_2)(x) &= (u_1 \otimes v_1)(\langle x, v_2\rangle u_2) \\ &= \langle u_2, v_1\rangle.\langle x, v_2\rangle u_1 = \langle u_2, v_1\rangle (u_1 \otimes v_2)(x)\end{aligned}$$

c) Le scalaire λ n'étant pas valeur propre de f, on sait que $\lambda \neq 0$ et que $\lambda \neq \langle u, v\rangle$. L'endomorphisme proposé est donc bien défini.

Il suffit ensuite de faire le produit de $\lambda I - u \otimes v$ par l'endomorphisme proposé dans cette question, et d'utiliser la question précédente pour obtenir le résultat demandé.

d) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}\langle (u \otimes v)^T(x), y\rangle &= \langle x, (u \otimes v)(y)\rangle = \langle y, v\rangle.\langle x, u\rangle \\ &= \langle v, y\rangle.\langle x, u\rangle = \langle (v \otimes u)(x), y\rangle\end{aligned}$$
Donc $(u \otimes v)^T = v \otimes u$.

e) Si u_1 ou v_1 est nul et si u_2 ou v_2 est nul, alors $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$.

Supposons qu'aucun de ces quatre vecteurs ne soit nul. L'équation $u_1 \otimes v_1 = u_2 \otimes v_2$, s'écrit, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$
$$\langle x, u_2\rangle v_2 = \langle x, u_1\rangle v_1$$

Avec $x = u_2 \neq 0$, il s'ensuit que les vecteurs (v_1, v_2) sont liés ($v_2 = \beta v_1$). En passant au transposé, la même méthode montre que les vecteurs (u_1, u_2) sont liés ($u_2 = \alpha u_1$), et $\alpha\beta = 1$.

Réciproquement, si $v_2 = \beta v_1$, $u_2 = \alpha u_1$, et $\alpha\beta = 1$, on montre immédiatement que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, u_2\rangle v_2 = \langle x, u_1\rangle v_1$.

2. On remarque que :

$$g(u) \otimes v = g \circ (u \otimes v) = (u \otimes v) \circ g = u \otimes g^T(v)$$

En utilisant la question précédente, il existe un réel α tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^T(v) = \alpha v$. Cette condition est également suffisante.

3. Si M est la matrice associée à v, en utilisant la question précédente, il vient :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \alpha - (a_2 + b_2) \\ a_3 & b_3 & \alpha - (a_3 + b_3) \end{pmatrix}$$

Le commutant de $u \otimes v$ est donc de dimension 5.

Exercice 2.10.

1. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.
Un sous–espace vectoriel F de E est dit *stable* par f si $f(F) \subseteq F$.

Montrer que tout sous–espace propre de f est stable par f. A t–on la réciproque ? Qu'en est–il si la dimension de F est égale à 1 ?

2. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B}$. Soit f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$ et g un endomorphisme de E de matrice A^T (transposée de A) dans la base $\mathcal{B}$.

a) Vérifier que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle g(y), x\rangle = \langle y, f(x)\rangle$.

b) Soit F un sous–espace de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si l'orthogonal de F, noté $F^\perp$, est stable par g.

3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. L'endomorphisme f est–il diagonalisable ?

b) En discutant suivant leur dimension, déterminer les sous–espaces F de E stables par f.

c) Montrer que l'un des plans stables obtenus est $\mathrm{Ker}(f - 3id_E)^2$. Quel est l'autre ?

Solution :

1. Si x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ, alors $f(x) = \lambda x$. Tout sous–espace propre est donc clairement stable par f.

La réciproque est fausse. Par exemple si $E = \mathbb{R}^3$ muni d'une base (e_1, e_2, e_3), et si f est défini par $f(e_i) = ie_i$. l'endomorphisme f admet trois sous–espaces propres, et le plan $\text{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par f et n'est pas un sous–espace propre.

En revanche si F est stable par f et de dimension 1, F est engendré par un vecteur e qui vérifie (par stabilité et dimension) $f(e) = \lambda e$. Ainsi F est une droite propre.

2. a) L'écriture matricielle des endomorphismes dans un espace euclidien donne :

$$\langle g(y), x\rangle = (A^T Y)^T X = Y^T AX = \langle y, f(x)\rangle$$

b) Soit $y \in F^\perp$ et $x \in F$, avec F stable par f. On a alors $f(x) \in F$ et :

$$0 = \langle y, f(x)\rangle = \langle g(y), x\rangle, \text{ d'où } g(y) \in F^\perp$$

On a la réciproque puisque $(F^\perp)^\perp = F$.

3. a) Un calcul élémentaire donne les valeurs propres de f qui sont $1, 3$ ainsi que les sous–espaces propres associés qui sont

$$E_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad E_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

La somme des dimensions des sous–espaces propres étant $2 \neq 3$, l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

b) L'endomorphisme f admet deux sous–espaces stables « triviaux » $\{0\}$ et E.

Les sous–espaces stables de dimension 1 sont les droites engendrées par un vecteur propre, soit E_1 et E_3.

Soit F un plan stable. Alors $F^\perp$ est une droite stable par g. Les valeurs propres de g sont celle de f, et les sous–espaces propres sont

$$G_3 = \text{Vect}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad G_1 = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Ainsi f admet deux plans stables $G_1^\perp$ d'équation $x - y = 0$ et $G_3^\perp$ d'équation $z = 0$

c) On calcule $(A - 3I)^2$. Il vient :

$$B = \begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 2 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f-3I)^2$ est le plan d'équation $x-y=0$ soit $G_1^{\perp}$. L'autre plan stable, $G_3^{\perp}$ n'est autre que $E_1 \oplus E_3$.

Exercice 2.11.

Dans cet exercice, toutes les matrices considérées (M, N, P, etc.) sont des matrices d'ordre n ($n \geq 2$) à coefficients réels, c'est-à-dire des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit N une telle matrice.

a) Montrer que les éléments diagonaux de N^tN sont positifs.

b) Montrer que N^tN est symétrique et a toutes ses valeurs propres réelles positives.

2. Montrer que si une matrice M est diagonalisable, alors elle est semblable à sa transposée ${}^tM$, avec une matrice de passage symétrique et dont toutes les valeurs propres sont positives.

3. Soit M une matrice, telle qu'il existe une matrice symétrique P dont toutes les valeurs propres positives, vérifiant $M = P^tMP^{-1}$.

a) Justifier qu'il existe une matrice Q inversible telle que $P = Q^tQ$,

b) Montrer qu'alors $Q^{-1}MQ$ est symétrique, et en déduire que M est diagonalisable.

4. Quel résultat vient-on de démontrer ?

Solution :

1. a) Si $N = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, un calcul immédiat permet d'affirmer que les éléments diagonaux de N^TN sont les nombres $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}^2$ qui sont bien positifs ou nuls.

b) La matrice NN^T est une matrice symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.
Il existe donc une matrice D diagonale réelle, une matrice P orthogonale telles que $D = PNN^TP^T = (PN)(PN)^T$.
Les éléments de D (tous diagonaux) sont ainsi positifs. La matrice NN^T a toutes ses valeurs propres positives.

2. Supposons la matrice M diagonalisable. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$. Alors

$$M^T = (P^{-1})^TDP^T,\text{ d'où } D = P^TM^T(P^{-1})^T$$

D'où

$$M = PP^T\ M^T\ (PP^T)^{-1}$$

Ainsi, la matrice M est semblable à sa transposée, la matrice de passage étant symétrique avec ses valeurs propres positives.

3. a) La matrice P est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe une matrice D diagonale, une matrice P_1 orthogonale telles que

$$P = P_1 D P_1^T$$

Les éléments de D sont positifs ou nuls. Soit Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées (positives) des éléments de D. On a $\Delta^2 = D$, et

$$P = P_1 \Delta . \Delta P_1^T = QQ^T$$

b) On peut donc écrire

$$M = QQ^T M^T (Q^{-1})^T Q^{-1}$$

ou

$$Q^{-1}MQ = Q^T M (Q^{-1})^T = (Q^{-1}MQ)^T$$

Ainsi, la matrice $Q^{-1}MQ$ est symétrique, réelle, et donc diagonalisable : il existe une matrice diagonale D_1, une matrice inversible Q_1 telles que $Q^{-1}MQ = Q_1 D_1 Q_1^{-1}$, et

$$M = QQ_1 D_1 Q_1^{-1} Q^{-1}$$

ce qui signifie que la matrice M est diagonalisable.

4. On vient de démontrer le résultat suivant :

Une matrice réelle M est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à sa transposée, avec une matrice de passage symétrique, réelle, à valeurs propres positives.

Exercice 2.12.

Soit E un espace vectoriel euclidien et u un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire tel que $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$). On pose $v = Id - u$ où Id est l'application identique de E.

1. Montrer que $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker} v$ sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires.

2. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, u^k est un endomorphisme orthogonal de E.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n = \dfrac{1}{n}\big(Id + u + u^2 + \cdots + u^{n-1}\big)$ et l'on considère p, la projection orthogonale de E sur $\operatorname{Ker} v$.

a) Soit $x \in E$. En écrivant, après justification, x sous la forme $x = y + z$ où $y \in \operatorname{Ker} v$ et $z \in \operatorname{Im} v$, montrer que :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z).$$

b) Montrer qu'il existe $t \in E$ tel que : $f_n(x) = y + \dfrac{1}{n}(t - u^n(t))$.

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Solution :

1. Soit $x \in \operatorname{Ker} v$ et $y \in \operatorname{Im} v$. On sait que $x = u(x)$ et qu'il existe $z \in E$ tel que $y = z - u(z)$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle x, z - u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, u(z)\rangle \\ &= \langle x, z\rangle - \langle u(x), u(z)\rangle = \langle x, z\rangle - \langle x, z\rangle = 0\end{aligned}$$

On vient de montrer que $\operatorname{Ker} v \subseteq (\operatorname{Im} v)^\perp$.

Or, le théorème du rang et le théorème sur la dimension de l'orthogonal :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v, \dim E = \dim \operatorname{Im} v + \dim(\operatorname{Im} v)^\perp$$

entraînent que $\dim \operatorname{Ker} v = \dim(\operatorname{Im} v)^\perp$. Finalement :

$$\operatorname{Ker} v = (\operatorname{Im} v)^\perp$$

2. Cette question évidente, se traite par récurrence.

3. a) On a montré que

$$E = (\operatorname{Im} v)^\perp \oplus \operatorname{Im} v = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} v$$

Aussi, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(y, z) \in \operatorname{Ker} v \times \operatorname{Im} v$ tel que $x = y + z$.

Donc $f_n(x) = f_n(y) + f_n(z)$. Or $y \in \operatorname{Ker} v$ entraîne que $u(y) = y$ et par une récurrence immédiate, on voit que pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k(y) = y$, donc que $f_n(y) = y$. Finalement :

$$f_n(x) = y + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z)$$

b) Comme $z \in \operatorname{Im} v$, il existe $t \in E$ tel que $z = t - u(t)$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}, u^k(z) = u^k(t) - u^{k+1}(t)$, et :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) = \frac{1}{n}(t - u^n(t))$$

c) On sait que $y = p(x)$. Donc

$$\|f_n(x) - p(x)\| \leqslant \frac{1}{n}(\|t\| + \|u^n(t)\|) \leqslant \frac{2\|t\|}{n}$$

Et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x) - p(x)\| = 0$.

Exercice 2.13.

1. Soit T l'application définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$T : \theta \longmapsto M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $M(\theta + \theta') = M(\theta) \times M(\theta')$. En déduire l'expression de $M(p\,\theta)$, lorsque $p \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.

Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, déterminer une matrice $A_p \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A_p^p = -I$.

2. Soit n un entier naturel non nul, $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit f l'application définie sur E par :

$$f : P \longmapsto f(P) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X).$$

où P' et P'' désignent respectivement les polynômes dérivés de P et de P'.

a) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est–il diagonalisable ?

c) Déterminer, par exemple par sa matrice dans une base appropriée, un endomorphisme g de E tel que $g^2 = g \circ g = f$.

d) Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}, p > 2$, existe–il un endomorphisme h de E tel que $h^p = f$?

Solution :

1. a) Par les formules d'addition des fonctions trigonométriques, il vient :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix}$$

et par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M(p\theta) = M^p(\theta)$$

b) La matrice $A = M(\pi/2)$ vérifie $A^2 = M(\pi) = -I$, et de même la matrice $A_p = M(\pi/p)$ vérifie $A_p^p = M^p(\pi/p) = M(\pi) = -I$, pour tout $p \geqslant 2$.

2. a) L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ par linéarité de la dérivation, et parce que $\deg f(P) \leqslant n$.

b) Calculons l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ par f. Il vient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$f(X^k) = k(k-3)X^k + k(k-1)X^{k-2}$$

La matrice associée à f dans cette base est donc triangulaire supérieure, avec sur sa diagonale :

$$\{0, -2, -2, 0, 4, \ldots, k(k-3), \ldots, n(n-3)\}$$

Les valeurs propres de f sont ces éléments diagonaux. Ainsi

• 0 est valeur propre, et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1, X^3 + 3X)$.

• -2 est valeur propre, et $\operatorname{Ker}(f + 2I) = \operatorname{Vect}(X, X^2 - 1)$.

• les $(n-1)$ autres valeurs propres «n'apparaîssent» qu'une fois et les sous–espaces propres associés sont, comme toujours, au moins de dimansion 1.

En utilisant le théorème sur la somme des dimensions des sous–espaces propres, on montre ainsi que l'endomorphisme f est diagonalisable.

c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice associée à f s'écrit :

$$\mathrm{diag}(0, 0, -2, -2, 4, \ldots, k(k-3), \ldots, n(n-3))$$

La matrice associée à g répondant à la question est alors une matrice bloc diagonale, les deux premiers blocs étant formé de deux matrices d'ordre 2, les autres étant scalaires, de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & & & \\ & (\sqrt{2}A) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt{k(k-3)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sqrt{n(n-3)} \end{pmatrix}$$

avec $k \geqslant 4$. (Tous les autres éléments de cette matrice sont nuls).

d) De même, la matrice associée à g répondant à la question est alors une matrice bloc diagonale, les deux premiers blocs étant formés de deux matrices d'ordre 2, les autres étant scalaires, de la forme

$$\begin{pmatrix} (0) & & & & & & \\ & (\sqrt[p]{2}A_p) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sqrt[p]{k(k-3)} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \sqrt[p]{n(n-3)} \end{pmatrix}$$

avec $k \geqslant 4$. (Tous les autres éléments de cette matrice sont nuls).

Exercice 2.14.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour tout f de E, on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt.$$

1. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pour } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{pour } x \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Déterminer $T(g)$.

2. a) Montrer que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa dérivée.

b) Justifier rapidement que l'on peut choisir l'ensemble d'arrivée pour que T soit un endomorphisme de E. Est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?

3. a) Montrer que l'on peut restreindre l'ensemble de départ et celui d'arrivée à F et que l'endomorphisme ainsi obtenu est un automorphisme de F.

b) Est-il diagonalisable ?

4. Montrer que si f est bornée, il en est de même de $T(f)$ et qu'il existe alors une constante k telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant k|x-y|$$

Solution :

1. On remarque que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Il vient

- si $x \leqslant -1$, $Tf(x) = 0$.
- si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, $Tf(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} t\,dt = \frac{(x+1)^2}{2}$.
- si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $Tf(x) = \displaystyle\int_0^1 t\,dt + \int_1^{x+1} (2-t)\,dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.
- si $1 \leqslant x \leqslant 2$, $Tf(x) = \displaystyle\int_{x-1}^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = 1 - \frac{(x-1)^2}{2}$.
- si $2 \leqslant x \leqslant 3$, $Tf(x) = \displaystyle\int_{x-1}^2 (2-t)\,dt = \frac{(x-3)^2}{2}$.
- si $x \geqslant 3$, $Tf(x) = 0$.

2. a) La fonction f étant continue, si F désigne une primitive de f, alors

$$T(f)(x) = F(x+1) - F(x-1).$$

Ainsi $T(f)$ est de classe C^1. Par le théorème fondamental du calcul intégral $T(f)'(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

b) Pour tout $f \in E, T(f) \in E$.

$\star$ L'application linéaire T n'est pas injective. Par exemple si $f : x \mapsto \sin(\pi x)$, $T(f)(x) = 0$.

$\star$ L'application linéaire T n'est pas surjective, puisque si f est continue alors $T(f)$ est de classe C^1 et qu'il existe dans E des fonctions qui ne sont pas de classe C^1 (par exemple la fonction valeur absolue).

3.a) Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors :

$$T(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x+1)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-1)^{k+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}[(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}]$$

Donc $T(f)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, car
$$(x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1} = 2(k+1)x^k + \cdots.$$
La même démonstration montre que T est bijectif puisque $\deg(T(X^k)) = k$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

b) La matrice de T dans la base canonique de F est triangulaire, et les éléments de la diagonale sont tous égaux à 2.
L'endomorphisme T n'admet qu'une seule valeur propre (à savoir 2) et n'est donc pas diagonalisable, puisque T n'est pas l'homothétie de rapport 2.

4. Utilisons l'inégalité des accroissements finis
$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \leqslant |F(x+1) - F(y+1)| + |F(x-1) - F(y-1)|$$
$$\leqslant \sup|f|.|x-y| + \sup|f|.|x-y| = (2\sup|f|)|x-y|$$

Exercice 2.15.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'objet de cet exercice est de chercher une solution approchée de l'équation $AY = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne fixée.
On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |a_i| > n-1$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X = 0$, en déduire que A est inversible. (On pourra écrire le système $AX = 0$ et utiliser une ligne L_j où j est tel que $|x_j| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$).

2. a) Montrer que l'équation $AY = B$ admet une solution et une seule que l'on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = A - M$.
Montrer que $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

b) On définit la suite de vecteurs (X_m) par : $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B$.
Exprimer $X_{m+1} - Y$ en fonction de D, M et $X_m - Y$.

c) On pose $X_m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$ et on définit la suite (u_m) par :

$$\forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ u_m = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i^m - y_i|.$$

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|} u_m$.

d) En déduire la convergence la suite (X_m) vers Y (c'est-à-dire, la convergence de la suite (x_i^m) vers y_i pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$).

Solution :

1. L'équation $AX = 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} a_1x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + x_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \end{cases}$$

Supposons $X \neq 0$. Soit alors j tel que $|x_j| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. En utilisant la j–ème ligne, il vient :

$$|a_j||x_j| = \Big|\sum_{i \neq j} x_i\Big| \leqslant \sum_{i \neq j} |x_i|$$

et :

$$|a_j| \leqslant \sum_{i \neq j} \frac{|x_i|}{|x_j|} \leqslant n - 1$$

en contradiction avec l'hypothèse. Donc $X = 0$.
Le noyau de la matrice carrée A étant réduit à $\{0\}$, A est inversible.

2. a) Comme A est inversible, $Y = A^{-1}B$ est l'unique solution de l'équation $AY = B$.

La matrice D est inversible, car aucun des a_i n'est nul.

Posons $Z = -D^{-1}MY + D^{-1}B$. Alors :

$$DZ = -MY + B = (-M + A)Y = DY, \text{ donc } Z = Y$$

b) On sait que

$$\begin{cases} X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B \\ Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B \end{cases}$$

Par soustraction $X_{m+1} - Y = -D^{-1}M(X_m - Y)$.

c) Par calcul immédiat :

$$-D^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 1/a_1 & \dots & 1/a_1 \\ 1/a_2 & 0 & \dots & 1/a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1/a_n & 1/a_n & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} x_1^{m+1} - y_1 = -\dfrac{1}{a_1}\sum_{i\neq 1}(x_i^m - y_i) \\ \vdots \\ x_n^{m+1} - y_n = -\dfrac{1}{a_n}\sum_{i\neq n}(x_i^m - y_i) \end{cases}$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $|x_i^{m+1} - y_i| \leqslant \dfrac{1}{|a_i|}(n-1)u_m$

et en posant $a = \min\limits_i |a_i|$: $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{a}u_m$.

d) Par une itération immédiate, pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_m \leqslant \left(\frac{n-1}{a}\right)^m u_0$$

Comme $a > n-1$, il vient $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = 0$, c'est–à–dire $\lim\limits_{m\to+\infty} x_i^m = y_i$.

Exercice 2.16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme f de E vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que f est un projecteur si et seulement s'il existe A, B sous–espaces vectoriels de E tels que

i) $E = A \oplus B$

ii) $\forall x \in A,\ f(x) = 0$

iii) $\forall x \in B,\ f(x) = x$.

2. Soient f et g deux projecteurs de E.

a) Montrer que f et g sont deux projecteurs tels que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f et g soient deux projecteurs de même noyau.

3. Soient f, g deux projecteurs de E. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que :

$$E = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g) \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g)$$

Que peut–on dire de $f \circ g$?

Solution :

1. On sait, par le cours, que si f est un projecteur de E, alors $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$, et que $f_{|\operatorname{Im} f} = Id$, $f_{|\operatorname{Ker} f} = 0$.

Réciproquement, si les points i), ii), iii) sont vérifiés, f est le projecteur sur B parallèlement à A.

2. a) Si f, g sont deux projecteurs de E tels que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$, alors pour tout $x \in E$, $f\big(g(x)\big) = g(x)$ et $g\big(f(x)\big) = f(x)$, puisque $f_{|\operatorname{Im} f} = Id$, $g_{|\operatorname{Im} g} = Id$.

Réciproquement, supposons que f, g soient deux projecteurs de E tels que $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$. Alors :

$$f(x) \in \operatorname{Im} f \implies f(x) = g\big(f(x)\big) \in \operatorname{Im} g, \text{ et}$$

$$g(x) \in \operatorname{Im} g \implies g(x) = f\big(g(x)\big) \in \operatorname{Im} f.$$

b) Supposons que f, g sont deux projecteurs de E tels que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$. Alors :

si $x \in \operatorname{Ker} g$, $f\big(g(x)\big) = f(0) = 0$

si $x \in \operatorname{Im} g$, $g(x) = x$ et $f\big(g(x)\big) = f(x)$.

Donc $f \circ g = f$. Pour des raisons de symétrie des rôles de f et g, on a également $g \circ f = g$.

Réciproquement, si f et g sont deux projecteurs de E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$, alors :

$$x \in \operatorname{Ker} f \implies g(x) = g\big(f(x)\big) = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} g$$

$$x \in \operatorname{Ker} g \implies f(x) = f\big(g(x)\big) = 0 \implies x \in \operatorname{Ker} f.$$

3. On sait que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\operatorname{Im} f$ et $\widetilde{g} = g_{|\operatorname{Im} f}$ est un endomorphisme de $\operatorname{Im} f$. L'endomorphisme $\widetilde{g}$ reste un projecteur de $\operatorname{Im} f$ (puisque g l'est). Donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} \widetilde{g} \oplus \operatorname{Im} \widetilde{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} \widetilde{g} = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \\ \operatorname{Im} \widetilde{g} = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Im} f \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g)$.

De même, comme $f \circ g = g \circ f$, l'application linéaire g laisse stable $\operatorname{Ker} f$ et $\overline{g} = g_{|\operatorname{Ker} f}$ est un endomorphisme de $\operatorname{Ker} f$. L'endomorphisme $\overline{g}$ reste un projecteur de $\operatorname{Im} f$ (puisque g l'est). Donc

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \overline{g} \oplus \operatorname{Im} \overline{g}$$

Or, de façon immédiate

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} \overline{g} = \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Ker} f \\ \operatorname{Im} \overline{g} = \operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f \end{cases}$$

Donc $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g) \oplus (\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f)$.

Comme $f \circ g = g \circ f$, $(f \circ g)^2 = f \circ g$, et $f \circ g$ est un projecteur de E. De plus

$$\begin{cases} (f \circ g)_{|\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g} = Id, (f \circ g)_{|\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g} = 0, \\ (f \circ g)_{|\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} f} = 0, (f \circ g)_{|\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} g} = 0 \end{cases}$$

Ainsi, $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$ parallèlement à la somme directe des trois autres sous-espaces vectoriels.

Exercice 2.17.

Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^2$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On notera A et B les matrices respectives de f et g dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$.

1. On suppose dans cette question que f admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a) Montrer que chaque sous espace propre de f est stable par g. En déduire que f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) Montrer qu'on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En déduire qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P_1(K), \quad B = P_2(K)$.

2. On suppose maintenant que f et g n'admettent chacun qu'une seule valeur propre.

a) Montrer que f et g ont un vecteur propre commun que l'on notera e_1.

b) Montrer qu'il existe une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$ telle que dans cette base, les matrices respectives de f et g soient de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

c) En déduire qu'il existe deux polynômes P et Q et une matrice $K \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tels que : $A = P_1(K), \quad B = P_2(K)$.

Solution :

1. a) Soit $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$\lambda g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$$

Si $g(x) = 0$, $g(x)$ appartient au sous–espace propre de f associé à la valeur propre λ. Si $g(x) \neq 0$, ce vecteur est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Si f est diagonalisable, alors $\mathbb{C}^2 = E_1 \oplus E_2$, chaque sous–espace propre E_i étant de dimension 1. L'endomorphisme g laissant stable chaque E_i, si $x \in E_i$, alors $g(x) = \mu_i x$. Les deux sous–espaces propres de f sont donc sous–espaces propres de g (associés à des valeurs propres différentes). Les endomorphismes f et g sont diagonalisables dans une même base.

b) L'égalité matricielle demandée se vérifie immédiatement. Les matrices A et B étant diagonalisables dans une même base, il existe une matrice de passage P (inversible), deux matrices diagonales D, Δ telles que :

$$A = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}; B = P\Delta P^{-1} = P\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

En utilisant l'égalité précédente, on peut écrire :

$$D = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}I + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}J; \Delta = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}I + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}J$$

et, en posant :

$$K = PJP^{-1}, P_1(X) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}X, P_2(X) = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}X$$

on obtient le résultat demandé.

2. a) Comme on travaille sur $\mathbb{C}^2$, f admet au moins une valeur propre λ.
Si la dimension du sous–espace propre associé est égale à 2, alors f est diagonalisable et $f = \lambda Id$; donc f et g ont un vecteur propre en commun, puisque tous les vecteurs non nuls de E sont vecteurs propres de f.

Si la dimension du sous–espace propre associé est égale à 1, soit e_1 un vecteur propre associé (base du sous–espace propre). Alors :

$$\lambda g(e_1) = g(f(e_1)) = f(g(e_1))$$

Donc, $g(e_1) \in \mathrm{Ker}(f - \lambda id) = \mathrm{Vect}(e_1)$ et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $g(e_1) = \mu e_1$ et f et g ont un vecteur propre en commun.

b) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{C}^2$ (le vecteur e_1 est celui trouvé précédemment). Dans cette base, les matrices associées à f et g sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

Mais, les endomorphismes f et g n'ayant qu'une seule valeur propre, ces matrices sont de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \mu & \beta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

c) Comme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + \alpha N$,
en posant $K = PNP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ à la base $\mathcal{B}$, et

$$P_1(X) = \lambda + \alpha X, \quad P_2(X) = \mu + \beta X$$

on obtient le résultat demandé.

Exercice 2.18.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
Soit a un réel fixé.
Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2} P''(a) + X^3 P'''(X).$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Cet endomorphisme est-il inversible ?

3. a) Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de u ainsi que la dimension des sous–espaces propres associés. L'endomorphisme u est–il diagonalisable ?

Solution :

1. L'application u est clairement linéaire par linéarité de la dérivation.
• Si $n = 1$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) \in \mathbb{R}_1[X]$.
• Si $n = 2$, alors $u(P)(X) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) \in \mathbb{R}_2[X]$.
• Si $n \geqslant 3$, alors $\deg(X^3 P'''(X) = \deg P(X)$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
Dans tous les cas u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $P \in \operatorname{Ker} u$.
• Si $\deg P \leqslant 2$, alors $u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) = 0$ entraîne que l'on a : $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$, donc que $P = 0$.
• si $\deg P \geqslant 3$, alors
$u(P) = P(a) + XP'(a) + \frac{1}{2}X^2 P''(a) + X^3 P'''(X) = P_1(X) + X^3 P'''(X) = 0.$
avec $\deg P_1 \leqslant 2$ et $\deg(X^3 P'''(X) \geqslant 3$. Donc $P_1 = 0$ et $P'''(X) = 0$. Cela entraîne que P est de degré inférieur ou égal à 2 ce qui est contraire à l'hypothèse. Ce cas est donc impossible.
Ainsi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et u est injectif, donc inversible.

3. a) On cherche la matrice M associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme :

$$\begin{cases} u(1) = 1 \\ u(X) = a + X \\ u(X^2) = a^2 + 2aX + X^2 \\ u(X^3) = a^3 + 3a^2 X + 3aX^2 + 6X^3 \\ \quad \vdots \\ u(X^n) = a^n + na^{n-1}X + \dfrac{n(n-1)}{2} a^{n-2} X^2 + n(n-1)(n-2)X^n \end{cases}$$

la matrice recherchée est triangulaire supérieure. Les valeurs propres de u sont ses éléments diagonaux, soit :

$$\{1, 6, 24, \dots, n(n-1)(n-2)\}$$

(si $n < 3$, seule subsiste la valeur propre 1).

b) $\star$ Supposons $n < 3$. Alors 1 est la seule valeur propre et u est diagonalisable si et seulement si $u = id$, ce qui se produit lorsque $a = 0$.

$\star$ Supposons $n \geqslant 3$.
Pour $k \in [\![3, n]\!]$, par échelonnement, la matrice $M - k(k-1)(k-2)I$ est de rang $n+1-1$, donc le sous-espace propre associé à la valeur propre $k(k-1)(k-2)$ est de dimension 1.

Par conséquent l'endomorphisme u sera diagonalisable si et seulement si le sous- espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension 3.

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et supposons P au moins de degré 3. Alors $u(P) = P$ si et seulement si :

$$P(a) + XP'(a) + \frac{X^2}{2}P''(a) + X^3P'''(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \sum_{k=3}^{n} a_k X^k$$

En regardant les coefficients dominants de cette égalité ($a_n \neq 0$), il vient :

$$n(n-1)(n-2)a_n = a_n, \text{ soit } n(n-1)(n-2) = 1$$

Ceci n'est pas possible. Donc $P \in E_1 \implies \deg P \leqslant 2$ et $P(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. On écrit alors $P(a) + XP'(a) + \dfrac{X^2}{2}P''(a) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ et il vient :

$$\begin{cases} 2\alpha a = 0 \\ \alpha a^2 + \beta a = 0 \end{cases}$$

• Si $a = 0$, alors $E_1 = \mathbb{R}_2[X]$ qui est de dimension 3 et u est diagonalisable.

• Si $a \neq 0$, alors $\alpha = \beta = 0$ et $E_1 = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1 et u n'est pas diagonalisable.

Exercice 2.19.

Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E et I l'endomorphisme identité de E.
Soit a un réel donné non nul.

Si $k \in \mathbb{N}$, on notera f^k l'endomorphisme de E défini par récurrence par $f^0 = I$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

On suppose que f vérifie les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} f \neq aI, f^{n-1} \neq 0, f^{n-1} \circ (f - aI) = 0 \\ \forall k \in [\![0, n-2]\!],\ f^k \circ (f - aI) \neq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que les valeurs propres de f sont 0 et a.

2. a) Montrer que $\operatorname{Ker}(f^{n-1})$ et $\operatorname{Ker}(f-aI)$ sont supplémentaires dans E.

b) Montrer qu'il en est de même pour $\operatorname{Ker}(f^{n-1})$ et $\operatorname{Im}(f^{n-1})$.

3. a) Montrer que :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} f^p \subset \cdots$$

b) Montrer qu'il existe un entier naturel p, avec $p \leqslant n$, tel que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

c) Montrer qu'alors pour tout $j \geqslant 1$, on a $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+j})$.

d) Montrer que l'on a également $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$ et pour tout $j \geqslant 1$, on a $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+j})$.

e) Montrer qu'alors $\operatorname{Ker}(f^p)$ et $\operatorname{Im}(f^p)$ sont supplémentaires dans E, et qu'il en est de même pour $\operatorname{Ker}(f^p)$ et $\operatorname{Ker}(f-aI)$.

f) En déduire la valeur de p.

Solution :

1. On a : $f^{n-1} \circ (f-aI) = 0$.

Si a n'est pas valeur propre de f, alors $f-aI$ est inversible, et $f^{n-1} = 0$ en contradiction avec l'hypothèse. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $(f-aI)(x) = 0$ et a est valeur propre de f.

De même si 0 n'est pas valeur propre de f, l'endomoprhisme f, donc f^{n-1} est inversible et $f - aI = 0$, en contradiction avec l'hypothèse.
Finalement, on vient de montrer que 0 et a sont valeurs propres de f.

Réciproquement s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, alors

$$0 = f^{n-1} \circ (f-aI)(x) = \lambda^{n-1}(\lambda - a)x$$

et $\lambda \in \{0, a\}$.

2. a) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{n-1} \cap \operatorname{Ker}(f-aI)$. Alors : $f^{n-1}(x) = 0, f(x) = ax$.
Donc $f^{n-1}(x) = a^{n-1}x = 0$ et $x = 0$, soit $\operatorname{Ker} f^{n-1} \cap \operatorname{Ker}(f-aI) = \{0\}$.
Comme $f^{n-1} \circ (f-aI) = (f-aI) \circ f^{n-1} = 0$, il vient :

$$\operatorname{Im} f^{n-1} \subseteq \operatorname{Ker}(f-aI)$$

Par le théorème du rang, on obtient ainsi :

$n - \dim \operatorname{Ker} f^{n-1} \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f-aI)$, soit $\dim \operatorname{Ker} f^{n-1} + \dim \operatorname{Ker}(f-aI) \geqslant n$

D'où, la somme étant directe :

$\dim(\operatorname{Ker} f^{n-1} + \operatorname{Ker}(f-aI)) = \dim \operatorname{Ker} f^{n-1} + \dim \operatorname{Ker}(f-aI) \geqslant n$

ce qui entraîne $\dim(\operatorname{Ker} f^{n-1} + \operatorname{Ker}(f-aI)) = n$, et donc :

$$E = \operatorname{Ker} f^{n-1} \oplus \operatorname{Ker}(f-aI).$$

b) On sait déjà que $\operatorname{Im} f^{n-1} \subseteq \operatorname{Ker}(f-aI)$. Le théorème sur les dimensions et l'égalité de la question précédente montrent que $\operatorname{Im} f^{n-1} = \operatorname{Ker}(f-aI)$.

3. a) Les inclusions demandées se démontrent immédiatement.

b) La suite $(\dim(\operatorname{Ker} f^j))_{j\geqslant 1}$ est une suite croissante d'entiers naturels majorée par $n = \dim E$. Elle converge, et comme ce sont des entiers, elle est stationnaire.

Soit p le premier entier tel que $\dim \operatorname{Ker} f^p = \dim \operatorname{Ker} f^{p+1}$.
L'inclusion $\operatorname{Ker} f^p \subseteq \operatorname{Ker} f^{p+1}$ entraîne que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

c) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{p+2}$. Alors :

$0 = f^{p+2}(x) = f^{p+1}(f(x))$, d'où $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^p$ et $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^{p+1}$.

On vient donc de montrer que $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1} \implies \operatorname{Ker} f^{p+1} = \operatorname{Ker} f^{p+2}$.

d) Il est immédiat que :

$$\operatorname{Im} f \supseteq \operatorname{Im} f^2 \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{Im} f^j \supseteq \cdots$$

Si $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$, le théorème du rang et les inclusions précédentes montrent que $\operatorname{Im} f^p = \operatorname{Im} f^{p+1}$ et de même que $\operatorname{Im} f^{p+1} = \operatorname{Im} f^{p+2}$.

e) Soit $x \in \operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p$. Alors $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$. Donc :

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(y) \implies y \in \operatorname{Ker} f^{2p} = \operatorname{Ker} f^p \implies x = f^p(y) = 0$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f^p \cap \operatorname{Im} f^p = \{0\}$ et on sait alors (par le théorème du rang) que

$$E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$$

Par la définition de p et la question 2. b) , on sait que $p \leqslant n-1$. Par les questions 3. c), 3. d) et par le fait que $\operatorname{Im} f^{n-1} = \operatorname{Ker}(f-aI)$, il vient :

$$E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Ker}(f-aI)$$

f) Si $p \leqslant n-2$, on sait que $f^p \circ (f-aI) \neq 0$. Or $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Ker}(f-aI)$ entraîne que $f^p \circ (f-aI) = 0$.

En effet, pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \operatorname{Ker} f^p \times \operatorname{Ker}(f-aI)$ tel que $x = x_1 + x_2$ et :

$$\begin{aligned} f^p \circ (f-aI)(x) &= f^p \circ (f-aI)(x_1+x_2) \\ &= (f-aI)(f^p(x_1)) + f^p((f-aI)(x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.20.

1. Pour tout $(a,b) \in [0,1]^2$, on pose $M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

a) Étudier l'inversibilité de $M_{a,b}$ et calculer son inverse lorsqu'elle existe.

b) La matrice $M_{a,b}$ est–elle diagonalisable ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

- $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.
- $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n$ à coefficients positifs ou nuls.
- J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

2. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n$ si et seulement $AJ_n = J_n$.

b) Vérifier que $\mathcal{S}_n$ est stable pour la multiplication (c'est–à–dire que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}_n$ est un élément de $\mathcal{S}_n$).

c) Soit $A \in \mathcal{S}_n$ inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Vérifier que $\mathcal{S}_n^+$ est stable pour la multiplication. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible. A-t-on $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$?

3. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f_σ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini , pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, par $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

a) Quelle est la matrice M_σ de f_σ dans la base $\mathcal{B}$? Vérifier que $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Justifier que M_σ est inversible et déterminer son inverse en fonction de σ. Vérifier que $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

4. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+$ inversible telle que $A^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$. On note $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Montrer que pour tout $(i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$ on a : $(i \neq j) \implies b_{i,k} a_{k,j} = 0$.

b) En déduire que chaque colonne de A contient un unique élément non nul.

c) En déduire qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que $A = M_\sigma$.

Solution :

1. a) La matrice $M_{a,b}$ est inversible si et seulement si $a \neq b$ et dans ce cas :

$$M_{a,b}^{-1} = \frac{1}{a-b} \begin{pmatrix} 1-b & a-1 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

b) La somme des coefficient de chaque ligne valant 1, on sait que 1 est valeur propre associée au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La seconde valeur propre est $a - b$.

- Si $a - b = 1$, comme $0 \leqslant a, b \leqslant 1$, alors $a = 1, b = 0$ et $M_{1,0} = Id$ qui est diagonale.
- Si $a - b \neq 1$, la matrice $M_{a,b}$ admet deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

2. a) La matrice J_n n'étant formée que de 1, un calcul immédiat donne $AJ_n = J_n$ si et seulement si $A \in \mathcal{S}_n$.

b) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$, alors $(AB)J_n = A(BJ_n) = AJ_n = J_n$. Cela prouve que $\mathcal{S}_n$ est stable par produit matriciel.

c) On a $AJ_n = J_n \implies J_n = A^{-1}J_n$. Ainsi $A^{-1} \in \mathcal{S}_n$.

d) Si $A, B \in \mathcal{S}_n$ dont les coefficients sont positifs, la formule du produit matriciel entraîne que les coefficients de AB sont positifs. Donc $A, B \in \mathcal{S}_n^+ \implies AB \in \mathcal{S}_n^+$.
La question 1.a) fournit un contre exemple à la seconde partie de cette question.

3. a) La matrice de $M_\sigma = (a_{i,j})$ dans la base $\mathcal{B}$ vérifie :

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $M_\sigma \in \mathcal{S}_n^+$.

b) Comme $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$, il vient $M_\sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n^+$.

4. a) Avec les hypothèses de la question, on peut écrire :

$$\forall\, i, \forall\, j \neq i, \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

avec $a_{i,k} \geqslant 0, b_{k,j} \geqslant 0$. Donc :

$$\forall\, i, \forall\, j \neq i, \forall\, k \in [\![1, n]\!], a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

b) Chaque colonne de A possède au moins un coefficient non nul (autrement A ne peut être inversible). Supposons que deux colonnes de A aient un coefficient non nul sur la même ligne : $a_{k,j} \neq 0, a_{k,j'} \neq 0$. Alors, par la question précédente, $b_{i,k} = 0, \forall\, i \neq j$, $b_{i,k} = 0, \forall\, i \neq j'$, ce qui signifie que la k ème colonne de A^{-1} est nulle, en contradiction avec A^{-1} inversible.

Ainsi A ne possède qu'un unique élément non nul par ligne et par colonne.

c) On vient de montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe un unique $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,j} = 1$ (car $A \in \mathcal{S}_n$). Il existe donc une permutation σ de $[\![1, n]\!]$ telle que $A = M_\sigma$.

Exercice 2.21.

Soit $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

On considère l'ensemble F des applications Φ de E qui vérifient la relation :

$$(R) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \Phi''(x) = (1 + x^2)\Phi(x)$$

1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.

3. Soient f et g les applications définies par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}; g(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F.

4. Soit h un élément de F.

a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $h = \alpha f + \beta g$.

(On pourra calculer la dérivée de la fonction $\dfrac{h}{f}$.)

b) En déduire la dimension de F.

Solution :

1. F est un sous–espace vectoriel de E par linéarité de la dérivation.

2. Soient $(u, v) \in F^2$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u''(x) = (1 + x^2)u(x), \quad v''(x) = (1 + x^2)v(x)$$

En multipliant la première équation par $v(x)$ et la seconde par $u(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = u''(x)v(x) - v''(x)u(x) = (v'u - uv')'(x)$$

La fonction $v'u - uv'$ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

3. Il suffit de dériver les fonction f et g. On obtient :

$$f'(x) = xf(x), \text{ d'où : } f''(x) = xf'(x) + f(x) = (1 + x^2)f(x)$$

et si $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$:

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x)F(x) + \mathrm{e}^{-x^2/2} \\ g''(x) = f''(x)F(x) + f'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - x.\mathrm{e}^{-x^2/2} = (1 + x^2)g(x) \end{cases}$$

4. a) Utilisons l'indication donnée dans la question. Comme $f(x) \neq 0$, pour tout x réel, il vient, par la question 2. :

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{fh' - hf'}{f^2} = \frac{\beta}{f^2}$$

D'autre part

$$\left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{1}{f^2}$$

Donc, pour tout $h \in F$, il existe β tel que $\left(\dfrac{h}{f}\right)' = \beta\left(\dfrac{g}{f}\right)'$

et pour tout $h \in F$, il existe β, et il existe α tels que

$$\frac{h}{f} = \alpha + \beta\frac{g}{f}$$

b) L'inclusion réciproque étant évidente, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(f, g)$ et que F est de dimension 2, puisque la famille (f, g) est clairement libre.

Exercice 2.22.

Soit $n \geqslant 2$.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_1 \neq 0$ et $s = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$.

On désigne par ω une racine carrée de s.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$

1. a) Déterminer le rang de M.

Montrer que 0 est valeur propre de M, déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Montrer que M admet deux autres valeurs propres distinctes et donner pour chacune d'elles un vecteur propre associé. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^{n+1}$ canoniquement associé à M.

Montrer que $\mathbb{C}^{n+1} = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

2. a) On suppose maintenant que les a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont réels. On considère $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de sa structure euclidienne canonique et on appelle f l'endomorphisme associé à M sur la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux.

b) Ecrire la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

Solution :

1. a) Les $(n-1)$ dernières colonnes de M étant toutes proportionnelles à la seconde colonne, et les deux premières colonnes étant manifestement libres, il s'ensuit que $\mathrm{rg}(M) = 2$, et donc que $\dim \mathrm{Ker}\, M = n - 1$.

Ainsi 0 est valeur propre, le sous–espace propre associé étant de dimension $n-1$; ses équations sont, par exemple :

$$\{(x_0, \dots, x_n) \mid x_0 = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0\}$$

b) Pour déterminer les autres valeurs propres non nulles, on résout le système $MX = \lambda X$. Il vient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda x_0 \\ \forall\, i \in [\![1, n]\!], a_i x_0 = \lambda x_i \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{C} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{a_i^2}{\lambda} = \lambda \\ \forall i \in [\![1, n]\!], x_i = \dfrac{a_i}{\lambda} x_0 \end{cases}$$

Les deux valeurs propres manquantes sont donc $\lambda = \pm\omega$.

On a : $E_\omega(M) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} \omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, et $E_{-\omega}(M) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -\omega \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

La matrice M est donc diagonalisable.

On voit, enfin, que :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_\omega \oplus E_{-\omega}$$

2. a) La matrice M est désormais symétrique réelle ; elle est diagonalisable dans une base orthonormée, ce qui signifie que les sous–espaces propres sont orthogonaux.

b) Notons p la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$. On sait que si (u, v) est une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$p(x) = \langle u, x\rangle u + \langle v, x\rangle v$$

Une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{s}\begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Donc si $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, il vient $P(x) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dfrac{a_1}{s} \sum a_i x_i \\ \vdots \\ \dfrac{a_n}{s} \sum a_i x_i \end{pmatrix}$ et :

$$M_p = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} s & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ 0 & a_2 a_1 & a_n^2 & \dots & a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n a_1 & a_n a_2 & \dots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.23.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et f un endomorphisme de E. On note Id l'endomorphisme identité de E et on définit la suite $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'endomorphismes de E par $f^0 = Id$ et $\forall\, k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f^k \circ f$. On a ainsi, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ et :

$$\forall\,(p,q) \in \mathbb{N}^2,\ f^p \circ f^q = f^{p+q}.$$

On suppose qu'il existe un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et un réel a non nul tels que :

$$\begin{cases} f^n = af^{n-1} \\ f^{n-1} \neq af^{n-2} \\ f^{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la dimension de E est supérieure ou égale à 2.

b) Déterminer les valeurs propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Ker}(f - aId)$ sont supplémentaires dans E.

b) Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker}(f - aId)$ soient supplémentaires dans E.

3. a) Comparer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(f - aId)$ et $\operatorname{Im} f^{n-1}$ de E.

b) Déterminer le plus petit entier naturel ℓ non nul tel que $\operatorname{Ker} f^\ell$ et $\operatorname{Im} f^\ell$ soient supplémentaires dans E.

Solution :

1. a) E n'est pas réduit au vecteur nul car par hypothèse $f \neq 0$. De plus, E n'est pas une droite vectorielle car sinon f serait une homothétie de rapport non nul (toujours parce que $f \neq 0$) donc f serait bijective et de $f^n = af^{n-1}$ on déduirait, en composant à gauche par f^{-1}, $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses.
Finalement, on a $\dim E \geqslant 2$.

b) $P = X^{n-1}(X - a)$ est un polynôme annulateur de f donc $\operatorname{Spec}(f) \subset \{0, a\}$. Par ailleurs, 0 est bien valeur propre de f car, comme vu en a), f ne peut être bijectif. De même, a est effectivement valeur propre car sinon $f - aid$ serait bijectif et de $f^{n-1} \circ (f - aid) = 0$ on déduirait $f^{n-1} = 0$.
Finalement, $\operatorname{Spec} f = \{0, a\}$.

Si $\dim E = 2$, f est diagonalisable car endomorphisme d'un espace de dimension 2 admettant 2 valeurs propres distinctes ; si $\dim E \geqslant 3$, f n'est pas diagonalisable car sinon on aurait $f \circ (f - aid) = 0$ (vérification facile dans une base de vecteurs propres) d'où l'on déduirait $f^{n-2} \circ (f - aid) = 0$ contrairement aux hypothèses.

2. a) On montre que tout vecteur de E se décompose de manière unique en somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(f - aid)$.

$\star$ **Non multiplicité**. Si $x = y + z$ avec $(y,z) \in \operatorname{Ker} f^{n-1} \times \operatorname{Ker}(f - aid)$, alors $f^{n-1}(x) = 0 + a^{n-1}z$ donc nécessairement $z = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ et $y = x - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ d'où l'unicité de y et z possibles pour un x donné.

$\star$ **Existence**. Soit $x \in E$. Posons $y = x - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$ et $z = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{n-1}(x)$. Alors $x = y + z$, $f(z) = \dfrac{1}{a^{n-1}} f^n(x) = \dfrac{1}{a^{n-1}} a f^{n-1}(x) = az$ et
$f^{n-1}(y) = f^{n-1}(x) - \dfrac{1}{a^{n-1}} f^{2n-2}(x) = 0$. En effet, on montre facilement par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{n+k} = a^{k+1} f^{n-1}$.

b) On remarque $\operatorname{Im}(f - aid) \subset \operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Im}(f - aid) \not\subset \operatorname{Ker} f^{n-2}$ puisque $f^{n-1} \circ (f - aid) = 0$ et $f^{n-2} \circ (f - aid) \neq 0$ donc $\operatorname{Ker} f^{n-2} \neq \operatorname{Ker} f^{n-1}$.
Or pour tout $k \in [\![0, n-2]\!], \operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{n-2} \subset \operatorname{Ker} f^{n-1}$. Donc pour $k \in [\![0, n-2]\!]$, $\operatorname{Ker} f^k$ est strictement inclus dans $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Ker}(f - aid)$ ne sont pas supplémentaires dans E. L'entier cherché est donc $n - 1$.

3. a) On a $(f - aid) \circ f^{n-1} = 0$ donc $\operatorname{Im} f^{n-1} \subset \operatorname{Ker}(f - aid)$.
Réciproquement, si $x \in \operatorname{Ker}(f - aid)$, $x = f^{n-1}\big(\frac{1}{a^{n-1}} x\big)$ donc $x \in \operatorname{Im} f^{n-1}$.
Finalement, $\operatorname{Ker}(f - aid) = \operatorname{Im} f^{n-1}$.

b) D'après a) et 2., $\operatorname{Ker} f^{n-1}$ et $\operatorname{Im} f^{n-1}$ sont supplémentaires dans E.

Si $n = 2$, l'entier ℓ cherché est donc $1 = n - 1$.

Supposons $n \geqslant 3$ et montrons par l'absurde que si $k \in [\![1, n-2]\!]$, $\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ ne sont pas supplémentaires dans E.
En effet, si on avait $E = \operatorname{Ker} f^k \oplus \operatorname{Im} f^k$ pour un $k \in [\![1, n-2]\!]$, alors pour tout x de E, il existerait $(y,z) \in \operatorname{Ker} f^k \times E$ tel que $x = y + f^k(z)$ d'où l'on déduirait $f^{n-2}(x) = 0 + f^{n+k-2}(z) = f^{n+k-2}(z)$ et

$$\begin{aligned} f^{n-1}(x) = f^{n-1+k}(z) = f^n(f^{k-1}(z)) &= af^{n-1}(f^{k-1}(z)) = af^{n+k-2}(z) \\ &= af^{n-2}(x), \end{aligned}$$

donc $f^{n-1} = af^{n-2}$ contrairement aux hypothèses. Le plus petit entier naturel non nul ℓ tel que $\operatorname{Ker} f^\ell$ et $\operatorname{Im} f^\ell$ soient supplémentaires dans E est donc dans tous les cas $n - 1$.

Exercice 2.24.

Pour tout p entier positif, on note E_p l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p ; on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables. Si ψ est un endomorphisme d'un espace vectoriel et k un entier positif, on note ψ^k l'itéré k fois de ψ. Soient m et n deux entiers strictement positifs fixés. Pour $P \in E_m$ fixé de degré m, on note :

$$\varphi : E_n \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), Q \mapsto (PQ)^{(n)}$$

(où $f^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f).

1. Justifier le fait que φ est linéaire ; déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$ puis donner une condition nécessaire et suffisante sur (m,n) pour que φ soit inversible.

2. On suppose $P(X) = X^n$; déterminer les éléments propres de φ.

3. On suppose $m = n$ et on pose $P(X) = a_nX^n + \cdots + a_0$. Établir la formule :

$$\varphi(X^k + b_{k-1}X^{k-1} + \cdots + b_0) = \sum_{r=0}^{k} \frac{(n+r)!}{r!}\Big(\sum_{\ell=r}^{k} b_\ell a_{n+r-\ell}\Big)X^r$$

pour $k \leqslant n$. En déduire les valeurs propres de φ.

4 On suppose $m < n$; montrer qu'il existe un unique entier n_0 tel que $\varphi^{n_0-1} \neq 0$ et $\varphi^{n_0} = 0$.

Solution :

1. $Q \mapsto PQ$ est linéaire ainsi que la dérivation (n fois) donc φ aussi. On a $\deg\varphi(Q) = \deg Q + m - n$, avec la convention $\deg R < 0 \iff R = 0$. Il s'ensuit que si $m \leqslant n$, $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Vect}\{\varphi(1), \cdots, \varphi(X^n)\} = E_m$, parce que ces derniers vecteurs, s'ils ne sont pas nuls, sont de degrés échelonnés, et $Ker\varphi = E_{n-m-1}$.
Si $m > n$, les degrés de $\varphi(1), \cdots, \varphi(X^n)$ sont encore échelonnés donc cette famille est libre et engendre un sous-espace de dimension $n+1$ de E_m. Dans ce cas, $Ker\varphi = \{0\}$, mais φ ne peut plus être considérée comme un endomorphisme.
Si $m = n$, φ est un automorphisme, si $m > n$, φ est injective donc $\varphi : E_n \to Im\varphi$ est inversible, et si $m < n$, φ n'est pas inversible.

2. Dans ce cas, $\varphi(X^k) = \dfrac{(n+k)!}{k!}X^k$, donc la base canonique est une base de vecteurs propres pour les valeurs propres distinctes $n!, \ldots, \dfrac{(2n)!}{n!}$.

3. On a $(PQ)(X) = \sum_{\ell=0}^{n+k}\big(\sum_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i}\big)X^\ell$, avec la convention

$$a_{n+1} = \cdots = a_{n+k} = b_{k+1} = \cdots = b_{n+k} = 0 \text{ et } b_k = 1$$

donc

$$\varphi(Q)(X) = \sum_{\ell=n}^{n+k} \frac{\ell!}{(\ell-n)!}\Big(\sum_{i=0}^{\ell} b_i a_{\ell-i}\Big)X^{\ell-n} = \sum_{r=0}^{k} \frac{(n+r)!}{r!}\Big(\sum_{i=r}^{k} b_i a_{n+r-i}\Big)X^r$$

(après le changement d'indice $\ell = n + r$). Donc $\varphi(Q) = \lambda.Q$ est équivalent au système (triangulaire) :

$$\begin{cases} a_n \dfrac{(n+k)!}{k!} = \lambda \\ \dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!}(b_{k-1}a_n + a_{n-1}) = \lambda b_{k-1} \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ n!(b_0 a_n + \cdots + b_k a_{n-k}) = \lambda b_0 \end{cases}$$

Ce système admet encore une unique solution (en les inconnues $b_0, \ldots, b_{k-1}$), donc le spectre de φ est le même que précédemment à la constante multiplicative a_n près.

4. On a $\deg(\varphi^k(X^n) = n - k(n-m)$, donc on cherche le plus petit entier n_0 tel que $n - n_0(n-m) < 0$, soit $n_0 = \left\lfloor \frac{n}{n-m} \right\rfloor + 1$.