2

ALGÈBRE

Exercice 1.

Soit $s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre s à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^s$, on pose :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{s} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^s$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme euclidienne de x.

Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^s$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

1. On suppose dans cette question que $s = 4$, et on considère la matrice :

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer ${}^tP$ et P^2.

b) Déterminer les valeurs propres de P et les sous-espaces propres associés. Montrer que P est la matrice d'une projection orthogonale sur un sous–espace de $\mathbb{R}^4$ que l'on déterminera.

2. On revient maintenant au cas général (s quelconque). Montrer que la matrice $P \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ est la matrice d'une projection orthogonale si et seulement si on a $P^2 = P$ et ${}^tP = P$.

3. Soient P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$ représentant chacune une projection orthogonale. On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}^s$:

$$||Px||^2 + ||Qx||^2 \leqslant ||x||^2 \qquad (*)$$

a) Montrer que $PQ = QP = 0$.

b) En déduire que $P + Q$ est la matrice d'une projection orthogonale.

4. Soient $P_1, P_2, \dots, P_n$, n matrices représentant chacune une projection orthogonale de $\mathbb{R}^s$ et telles que $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = I$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

Montrer que pour toute partie non vide E de $\{1, 2, \dots, n\}$, $\sum\limits_{k \in E} P_k$ est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^s$.

5. On se place à nouveau dans $\mathbb{R}^4$ et on considère la matrice :

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que Q est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

b) Montrer que P et Q vérifient la relation $(*)$, où P est la matrice de la première question. Que peut-on dire de $P + Q$?

Solution :

1. a) On trouve ${}^tP = P^2 = P$.

b) P est une matrice de projecteur (non dégénéré), ses valeurs propres sont donc 0 et 1.

L'image de P est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 et est engendrée par le vecteur $(1 - 1, 1, 1)$.

Le noyau de P est l'hyperplan H d'équation $x - y + z + t = 0$ (regarder les lignes de P). Cet hyperplan est l'orthogonal de $\text{Vect}(1 - 1, 1, 1)$ et P est le projecteur orthogonal sur H.

2. $\star$ On $P^2 = P$ si et seulement si P représente un projecteur.

$\star$ P est une matrice symétrique si et seulement si elle représente, dans la base canonique de $\mathbb{R}^s$, un endomorphisme admettant une base orthonormée de vecteurs propres.

Donc une matrice de projecteur est symétrique si et seulement si $\operatorname{Im} P$ et $\operatorname{Ker} P$ (qui sont les sous-espaces propres) sont orthogonaux, donc si et seulement si P est une matrice de projecteur orthogonal.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}^s$, appliquons $(*)$ au vecteur Px :

$$\|P^2x\|^2 + \|QPx\|^2 = \|Px\|^2 + \|QPx\|^2 \leqslant \|Px\|^2$$

Donc $\|QPx\|^2 \leqslant 0$ et $QPx = 0$. On montre de même que $PQx = 0$:

$$\boxed{PQ = QP = 0}$$

b) $\star$ P et Q sont symétriques, il en est de même de $P + Q$.

$\star$ $(P+Q)^2 = P^2 + Q^2 + PQ + QP = P^2 + Q^2 = P + Q$.
Donc $P+Q$ est une matrice de projecteur orthogonal.

4. Comme $P_1, \dots, P_n$ sont n matrices de projections orthogonales telles que l'on ait $P_1 + \cdots + P_n = I$, il vient :

$$\begin{aligned}\|P_1x\|^2 + \cdots + \|P_nx\|^2 &= \langle P_1x, P_1x\rangle + \cdots + \langle P_nx, P_nx\rangle \\ &= \langle x, {}^tP_1P_1x\rangle + \cdots + \langle x, {}^tP_nP_nx\rangle \\ &= \langle x, P_1^2x\rangle + \cdots + \langle x, P_n^2x\rangle = \langle x, (P_1 + \cdots + P_n)x\rangle \\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi, si $k \neq \ell$, on a sûrement $\|P_kx\|^2 + \|P_\ell x\|^2 \leqslant \|x\|^2$ et donc $P_kP_\ell = 0$.
Il s'ensuit que : $(\sum\limits_{k\in E} P_k)^2 = \sum\limits_{k\in E} P_k^2 = \sum\limits_{k\in E} P_k$, donc $\sum\limits_{k\in E} P_k$ est une matrice de projection.
Comme $\sum\limits_{k\in E} P_k$ est encore symétrique, il s'agit même d'une projection orthogonale.

5. a) On vérifie que ${}^tQ = Q^2 = Q$.

b) Pour $m = (x, y, z, t)$ on obtient après calculs :
$\|Pm\|^2 + \|Qm\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - \frac{1}{4}(x - y - z - t)^2 \leqslant \|x\|^2$.
Donc $P+Q$ est une matrice de projecteur orthogonal, ce qui se vérifie facilement directement.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout x réel : $T_n(\cos x) = \cos(nx)$.
Déterminer le degré de T_n.

2. a) Montrer que l'application :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer que la famille $(T_n)_{n\geqslant 0}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$ muni de ce produit scalaire. Déterminer la norme de T_n.

Solution :

1. $T_0(\cos x) = \cos(0.x) \implies T_0 = 1$;
$T_1(\cos x) = \cos(1.x) \implies T_1 = X$;
Supposons la famille construite jusqu'à un certain rang $n \geqslant 1$, on a :

$$\cos((n+1)x) + \cos((n-1)x) = 2\cos x \cos(nx)$$

On peut donc prendre $T_{n+1}(X) = 2XT_n(x) - T_{n-1}(X)$

Enfin si $\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos x) = Q_n(\cos x) = \cos(nx)$, les polynômes T_n et Q_n concident en tout point de $[-1, 1]$, donc $T_n - Q_n$ a une infinité de zéros et est le polynôme nul, ce qui prouve l'unicité.

2. a) La fonction à intégrer est continue sur $]-1, 1[$ et la convergence de l'intégrale pour la borne 1, résulte de la règle de Riemann, puisqu'il existe M tel que :

$$\frac{|P(t)Q(t)|}{\sqrt{1-t^2}} \leqslant \frac{M}{(1-t)^{1/2}}$$

On procède de même pour la borne -1.

Ceci étant dit, il est clair que l'application proposée est bilinéaire et symétrique.

Enfin $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \geqslant 0$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si la fonction à intégrer est nulle sur $]-1, 1[$, donc que si P est le polynôme nul.
On a bien défini ainsi un produit scalaire.

b) Par le changement de variable $t = \cos u$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nu)\cos(ku)}{|\sin u|} \sin u \, du = \int_0^{\pi} \cos(nu)\cos(ku)\, du.$$

On a : $\cos(nu)\cos(ku) = \frac{1}{2}\big(\cos((n+k)u) + \cos((n-k)u)\big)$.

$\star$ Si $k \neq n$, l'intégration se fait sans problème et l'intégrale est nulle :

La famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale

$\star$ Si $k = n = 0$, l'intégrale vaut π et $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$.

$\star$ Si $k = n \neq 0$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 + \cos(2nu))\, du = \frac{\pi}{2}$ et donc :

$$\boxed{\|T_0\| = \sqrt{\pi}\,;\, \forall n \geqslant 1, \|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Exercice 3.

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel.

Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$.

1. Calculer les produits matriciels ${}^tX\,Y$ et $X\,{}^tY$.

2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $B = X\,{}^tY$. Cette matrice est-elle diagonalisable ?
On précisera également son noyau et son rang.

3. Montrer réciproquement que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 peut s'écrire sous la forme $M = X\,{}^tY$, avec X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Sont-ils uniques ?

4. On considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de coefficients :

$$a_{i,j} = \delta_{i,j} + x_i\, y_j \quad \text{où} \quad \begin{cases} \delta_{i,j} = 1 & \text{si } i = j \\ \delta_{i,j} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À quelle condition (nécessaire et suffisante) portant sur X et Y la matrice A est-elle inversible ? Expliciter alors son inverse.

Solution :

1. Un calcul immédiat donne : ${}^tX.Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle X, Y\rangle$

et :

$$X.{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

2. La matrice $B = X\,{}^tY$ est de rang 1 (toutes ses colonnes sont proportionnelles à la première colonne X). Ainsi $\dim \operatorname{Ker} B = n-1$ et 0 est valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension $(n-1)$.
De plus $\operatorname{Im} B = \operatorname{Vect}(X)$, et : $BX = X\,{}^tYX = \langle X, Y\rangle X$.
Notons qu'un vecteur propre de B associé à une éventuelle valeur propre non nulle est nécessairement un vecteur de l'image de B.
Ainsi, si $\langle X, Y\rangle \neq 0$, on obtient une base de vecteurs propres de B en complétant une base de $\operatorname{Ker} B$ par X et B est diagonalisable, les valeurs propres étant 0 et $\langle X, Y\rangle$.
En revanche, si $\langle X, Y\rangle = 0$, 0 est l'unique valeur propre de B et B n'est pas diagonalisable.

$$B \text{ est diagonalisable si et seulement si } \langle X, Y\rangle \neq 0.$$

3. Si M est une matrice de rang 1, toutes ses colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ sont proportionnelles à une même colonne X, soit $C_i = y_i X$. On a alors

$$M = X\,{}^tY, \text{ avec } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Il n'y a pas unicité, puisque si (X, Y) est solution, pour tout $\alpha \neq 0$, $(\alpha X, Y/\alpha)$ est également solution.

4. On a immédiatement $A = I + B$. Les valeurs propres de A sont donc 1 et $1 + \langle X, Y\rangle$, et A est inversible et seulement si $\langle X, Y\rangle + 1 \neq 0$ (car dans ce cas 0 n'est pas valeur propre de A).

On a $B^2 = \langle X,Y\rangle B$, donc $(A-I)^2 = \langle X,Y\rangle(A-I)$, d'où :

$$A^2 - (\langle X,Y\rangle + 2)A = -(\langle X,Y\rangle + 1)I$$

et
$$\boxed{A^{-1} = \frac{(\langle X,Y\rangle + 2)I - A}{\langle X,Y\rangle + 1}}$$

Exercice 4.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite (A_n) converge si les quatre suites réelles (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) sont convergentes. La matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty} a_n & \lim\limits_{n\to\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to\infty} c_n & \lim\limits_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

est alors appelée limite de la suite (A_n).

Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pose pour tout n entier naturel :

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} M^k = I_2 + M + \cdots + M^n$$

où I_2 désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui converge vers A et P une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la suite (PA_n) converge vers PA. Que peut-on dire de la suite (A_nP) ?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et P une matrice inversible de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Exprimer, pour n entier naturel, $S_n(P^{-1}AP)$ en fonction de $S_n(A)$ et de P.

b) En déduire que la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si la suite $\big(S_n(P^{-1}AP)\big)$ converge.

3. Soit u un endomorphisme non diagonalisable de $\mathbb{R}^2$ admettant une valeur propre a.

a) Préciser l'ensemble des valeurs propres de u et la dimension de l'espace propre de u associé à la valeur propre a.

b) Soit e_1 un vecteur propre de u associé à la valeur propre a et e_2 un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $B = (e_1, e_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^2$. Justifier l'existence d'un tel vecteur e_2 et montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}^*$ tel que la matrice de u dans la base B soit égale à $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Déterminer alors la matrice de u dans la base $C = (be_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

4. Soit a un réel et T la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n.

b) En déduire que la suite $\big(S_n(T)\big)$ est convergente si et seulement si $a \in]-1,1[$ et calculer alors la limite de cette suite.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant au moins une valeur propre réelle.

a) Montrer que $\big(S_n(A)\big)$ est convergente si et seulement si les valeurs propres de A appartiennent toutes à $]-1,1[$.

b) Calculer, pour n entier naturel, $(I_2 - A)S_n(A)$ et en déduire que, lorsque la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge, sa limite est égale à l'inverse de la matrice $I_2 - A$.

Solution :

1. Soit $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Alors :
$PA_n = \begin{pmatrix} pa_n + qc_n & pb_n + qd_n \\ ra_n + sc_n & rb_n + sd_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} pa + qc & pb + qd \\ ra + sc & rb + sd \end{pmatrix} = PA$.
On montre de même que (A_nP) converge vers AP.

2. a) Pour tout entier k, $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ et donc :

$$S_n(P^{-1}AP) = P^{-1}S_n(A)P.$$

b) $\star$ Si la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge vers $S(A)$, alors $\big(P^{-1}S_n(A)P\big)$ converge vers $P^{-1}S(A)P$.

$\star$ On obtient l'implication réciproque en remarquant que si $A' = P^{-1}AP$, alors on a : $A = P'^{-1}A'P'$, avec $P' = P^{-1}$.

3. a) Comme u n'est pas diagonalisable, a est sa seule valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

b) e_1 est propre, donc non nul et (e_1) est une famille libre, que l'on peut compléter en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.La matrice de u dans cette base est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, mais le fait que u ait a pour unique valeur propre impose $c = a$ et le fait que u ne soit pas diagonalisable impose $b \neq 0$. Donc $\mathcal{C} = (be_1, e_2)$ est encore une base et $M_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

4. Par récurrence, ou par la formule du binôme : $\forall\, n \in \mathbb{N}, T^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

b) Ainsi $S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} a^k & \sum\limits_{k=1}^{n} ka^{k-1} \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \end{pmatrix}$ et $\big(S_n(T)\big)$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} S_n(T) = \begin{pmatrix} (1-a)^{-1} & (1-a)^{-2} \\ 0 & (1-a)^{-1} \end{pmatrix}$$

5. a) Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PTP^{-1}$, avec $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $c = 0$ si A est diagonalisable et $c = 1$ si $a = b$ et A non diagonalisable.

Notons que a et b sont les valeurs propres de A et que $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si $\big(S_n(T)\big)$ converge.

Si $c = 0$, $S_n(T) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} a^k & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} a^k \end{pmatrix}$

Si $c = 1$, $a = b$ et le calcul a été fait en 4. b).

Dans tout les cas $\big(S_n(A)\big)$ converge si et seulement si $-1 < a < 1$ et $-1 < b < 1$.

b) Facilement, par télescopage : $(I_2 - A)S_n(A) = I_2 - A^{n+1}$.

Si la suite $\big(S_n(A)\big)$ converge, alors $A^{n+1} = S_{n+1}(A) - S_n(A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et :
$(I_2 - A)S(A) = \lim\limits_{n\to\infty}[(I_2 - A)S_n(A)] = I_2$, ce qui prouve que $I_2 - A$ est inversible (on le savait car 1 n'est pas valeur propre de A) et que :

$$S(A) = (I_2 - A)^{-1}$$

Exercice 5.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

et φ l'endomorphisme associé à A sur la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer une base du noyau de φ et une base de l'image de φ.

En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

Solution :

1. On remarque que la matrice A (donc l'endomorphisme associé φ) est de rang 2 (les deux premières colonnes sont indépendantes, les autres étant proportionnelles à la seconde).

L'image $\operatorname{Im}\varphi$ est de dimension 2 ; une base est, par exemple : $(e_1, \sum\limits_{i=1}^{n} e_i)$.

Par le théorème du rang, le noyau $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension $(n-2)$. En utilisant les colonnes de A, la famille $(e_2 - e_3, e_2 - e_4, \ldots, e_2 - e_n)$ forme une base de ce noyau.

2. Ainsi 0 est valeur propre de A, et le sous-espace propre qui lui est associé est $\operatorname{Ker} A$ de dimension $(n-2)$.

Les vecteurs propres de φ associés aux valeurs propres non nulles sont dans $\operatorname{Im}\varphi$ (puisque $\varphi(x) = \lambda x, \lambda \neq 0$).

Soit (e_1, v), avec $v = \sum_{i=1}^{n} e_i$ la base de $\operatorname{Im}\varphi$ précédemment déterminée, et ψ l'endomorphisme de $\operatorname{Im}\varphi$ induit par φ.

On a $\psi(e_1) = v, \psi(v) = v + (n-1)e_1$. Donc $M = M_{(e_1,v)}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & n-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de ψ sont $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$ et on peut prendre pour vecteurs propres associés $(\lambda_i - 1)e_1 + v$.

Ces valeurs propres et ces vecteurs propres sont les éléments propres de φ manquants.

La matrice A est donc diagonalisable, ce que l'on savait depuis le début de l'exercice, puisqu'elle est symétrique réelle.

Exercice 6.

1. Soit E un espace vectoriel euclidien dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\cdot\|$.
Soit f un endomorphisme symétrique de E.
On note α la plus petite valeur propre réelle de f et ω la plus grande valeur propre réelle de f.

1. a) Montrer que, pour tout $x \in E$, $\alpha\,\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant \omega\,\|x\|^2$.

b) Existe-t-il un vecteur non nul x de E qui vérifie $\big\langle x, f(x)\big\rangle = \omega\,\|x\|^2$?
Est-il vrai que si r est un réel tel que, pour tout $x \in E$, $\langle x, f(x)\rangle \leqslant r\,\|x\|^2$, alors $r \geqslant \omega$?

Répondre aux questions analogues concernant α.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute famille $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels,

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i + x_{i+1})^2 + x_n^2$$

et

$$2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

3. Soient un entier $n \geqslant 2$ et un réel k.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & k & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & k & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note α la plus petite valeur propre de A et ω la plus grande valeur propre de A.

a) Montrer que $k-2 \leqslant \alpha$ et que $\omega \leqslant k+2$.

b) Montrer ensuite que $\alpha \leqslant k-1$ et que $\omega \geqslant k+1$.

On cherchera une colonne non nulle $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tXAX \leqslant (k-1)\,{}^tXX$ et une colonne non nulle $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\ R)$ telle que ${}^tYAY \geqslant (k+1)\,{}^tYY$.

Solution :

1. a) Comme f est un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $M_{\mathcal{B}}(f)=\text{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$.

Soit $x=\sum\limits_{i=1}^{n} x_ie_i$, on a $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\lambda_ie_i$ et $\langle x,f(x)\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\lambda_i$.

Ainsi : $\alpha\|x\|^2=\alpha\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\lambda_i \leqslant \omega\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2=\omega\|x\|^2$, soit :

$$\alpha\|x\|^2 \leqslant \langle x,f(x)\rangle \leqslant \omega\|x\|^2$$

b) Si x est un vecteur propre associé à la valeur propre ω, on a :

$$\langle x,f(x)\rangle=\langle x,\omega x\rangle=\omega\|x\|^2$$

La réponse est «oui», car si cela est vrai pour tout vecteur x, cela est vrai en particulier pour un vecteur propre x associé à ω et on a alors $\omega\|x\|^2 \leqslant r\|x\|^2$, *i.e.* $r \geqslant \omega$.

De même, si x est propre pour la valeur propre α, alors $\langle x,f(x)\rangle=\langle x,\alpha x\rangle=\alpha\|x\|^2$ et si, pour tout x, $\langle x,f(x)\rangle \geqslant r\|x\|^2$, alors $r \leqslant \alpha$.

2. Il suffit de développer les seconds membres et on retrouve bien les premiers membres.

3. a) $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, A traduit un endomorphisme symétrique u. Pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, en notant X la matrice colonne associée au vecteur x, on a :

$$\begin{aligned}\langle x,u(x)\rangle &= {}^tXAX = k\sum_{i=1}^{n} x_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}\\ &=(k-2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2+x_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i+x_{i+1})^2+x_n^2 \geqslant (k-2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2.\end{aligned}$$

On en conclut donc que $\alpha \geqslant k-2$ (cf. 1. b)).

De même :

$$\begin{aligned}\langle x,u(x)\rangle &= k\sum_{i=1}^{n} x_i^2+2\sum_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}\\ &=(k+2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2-(x_1^2+\sum_{i=1}^{n-1}(x_i+x_{i+1})^2+x_n^2) \leqslant (k+2)\sum_{i=1}^{n} x_i^2.\end{aligned}$$

On en conclut donc que $\omega \leqslant k+2$ (cf. 1. b)).

b) $\star$ Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$, on a ${}^tXAX = 2k-2$ et ${}^tXX = 2$. Ainsi, si x est le vecteur associé à X, on a $\langle x, u(x)\rangle = (k-1)\|x\|^2$, ce qui prouve que $\alpha \leqslant k-1$.

De même la considération de la colonne $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et du vecteur y associé donne $\langle y, u(y)\rangle = (k+1)\|y\|^2$, ce qui prouve que $\omega \geqslant k+1$.

Exercice 7.

Soit n entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et F et G deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par les familles $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ de E.
On suppose de plus que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \langle x_i, x_j\rangle = \langle y_i, y_j\rangle$ et on pose pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $z_j = \sum\limits_{i=1}^n \langle x_i, x_j\rangle e_i$, où la famille $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
1. Soit $p \in [\![1,n]\!]$. Montrer l'équivalence des deux assertions :
   $i)$ la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est liée.
   $ii)$ la famille $(z_1,\dots,z_p)$ est liée.
2. En déduire que $\dim F = \dim G$.

Solution :

1. $i) \Rightarrow ii)$. S'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j x_j = 0$, par bilinéarité du produit scalaire, on a :
$$\sum_{j=1}^p \lambda_j z_j = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_j\rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\rangle e_i = 0$$
et la famille $(z_1,\dots,z_p)$ est liée.

$ii) \Rightarrow i)$. Sil existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ réels non tous nuls tels que $\sum\limits_{j=1}^p \lambda_j z_j = 0$, alors :
$$0 = \sum_{j=1}^p \lambda_j \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_j\rangle e_i = \sum_{i=1}^n \langle x_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\rangle e_i$$
Donc, par liberté de $(e_1,\dots,e_n)$: $\forall\, i \in [\![1,n]\!], \langle x_i, \sum\limits_{j=1}^p \lambda_j x_j\rangle = 0$, d'où :

$\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j \|^2 = \langle \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j \rangle = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$: la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

2. Une famille est libre si et seulement si elle n'est pas liée.
On vient donc de démontrer, à la numérotation des vecteurs près, qu'une sous-famille de $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si la sous-famille correspondante de $(z_1, \ldots, z_n)$ est libre et donc si et seulement si la sous-famille correspondante de $(y_1, \ldots, y_n)$ l'est également, puisque $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$ et donc les calculs sont les mêmes avec la famille $(y_1, \ldots, y_n)$.
Ainsi les familles $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ ont le même rang et $\dim F = \dim G$.

Exercice 8.

Soit n un entier naturel, $n \geqslant 2$. Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ donné et $P(X) = (X - \lambda)^k$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que P est divisible par son polynôme dérivé P'.

b) Réciproquement, soit $P \in E$ divisible par son polynôme dérivé P'. Déterminer la forme de P.

2. Soit u l'application définie sur E par, pour tout $P \in E$:

$$u(P)(X) = (X^2 + 1)P'(X) - nXP(X)$$

a) Montrer que u est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u.

c) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) On a : $P' = k(X - \lambda)^{k-1}$ et P est divisible par P', le quotient étant $\dfrac{1}{k}(X - \lambda)$.

b) Si P est divisible par P', le quotient Q est du premier degré et $P = QP'$.
$\star$ Si $\deg P = 1$, alors P' est un polynôme constant et on a bien P' qui divise P.
$\star$ Supposons donc $n = \deg P \geqslant 2$, d'où $\deg P' = n - 1 \geqslant 1$, et soient $z_1, z_2, \ldots, z_k$ les racines de P' d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots \alpha_k$.
Comme P' est un facteur de P, les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont encore racines de P, donc d'ordres de multiplicité $\alpha_1 + 1, \ldots \alpha_k + 1$.
Par conséquent $(\alpha_1 + 1) + \cdots + (\alpha_k + 1) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k + k \leqslant n$, alors que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = n - 1$. On en déduit $k \leqslant 1$ et comme $k \geqslant 1$, on a $k = 1$ et $\alpha_1 = n - 1$.

Ainsi P admet une unique racine à l'ordre n et est de la forme $\beta(X-\lambda)^n$.

2. a) La linéarité de u est évidente et pour $k \leqslant n$:

$$u(X^k) = (X^2+1)kX^{k-1} - nX^{k+1} = (k-n)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

$\star$ Si $k < n$, $u(X^k)$ est de degré $k+1$, donc appartient à E ;
$\star$ si $k = n$, $u(X^n) = nX^{n-1} \in E$.
Ainsi, par linéarité, l'image par u de tout élément de E est encore un élément de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons d'ailleurs que si $\deg P < n$, alors $\deg u(P) = \deg P + 1$ et donc les éventuels polynômes propres sont de degré exactement n.

b) Soit λ une valeur propre (donc a priori complexe) de u et P un polynôme propre associé. On a :

$$u(P) = \lambda P,\ i.e.\ (X^2+1)P'(X) = (nX+\lambda)P(X) \quad (*)$$

$\star$ Si $nX+\lambda$ divise X^2+1, alors $\lambda = ni$ ou $\lambda = -ni$.

• Si $\lambda = -ni$, il reste $(X+i)P'(X) = nP(X)$, P' divise P et d'après la première question P est de degré n et admet $-i$ pour unique racine (car $-i$ est racine de P !) :

$$-ni \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(-ni)}(u) = \operatorname{Vect}((X+i)^n)$$

• De la même façon :

$$ni \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(ni)}(u) = \operatorname{Vect}((X-i)^n)$$

$\star$ Si $nX+\lambda$ ne divise pas X^2+1, alors $(*)$ montre que i et $-i$ sont racines de P et P est divisible par X^2+1. Désignons alors par k, avec $1 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$ le plus grand entier tel que $(X^2+1)^k$ divise P :

$$P(X) = (X^2+1)^k Q(X),\ \text{avec } Q(i) \neq 0 \text{ ou } Q(-i) \neq 0$$

La relation $(*)$ devient : $(X^2+1)Q'(X) = [(n-2k)X+\lambda]Q(X)$.

• Si $Q(i) \neq 0$ alors $\lambda = -(n-2k)i$ et $(X+i)Q'(X) = (n-2k)Q(X)$. On déduit alors de la première question que $-i$ est l'unique racine de Q, cette racine étant d'ordre $n-2k$:

$$-(n-2k)i \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{(-(n-2k)i)}(u) = \operatorname{Vect}((X^2+1)^k(X+i)^{n-2k})$$

• Si $Q(-i) \neq 0$, on obtient de même :

$$(n-2k)i \in \operatorname{Spec} u \quad \text{et} \quad E_{((n-2k)i)}(u) = \operatorname{Vect}((X^2+1)^k(X-i)^{n-2k})$$

c) Finalement les valeurs propres de u sont $-ni, -(n-2)i, \ldots, (n-2)i, ni$, donc sont au nombre de $n+1$. Comme E est de dimension $n+1$, on en déduit que u est diagonalisable.

Exercice 9.

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne de x.
Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

b) Montrer que $[\mathrm{Im}(A)]^\perp \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$.

c) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le noyau de ${}^tA$.

b) Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Déterminer la matrice B associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

c) Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A.

d) Calculer BA. Que constatez-vous ?

3. Reprendre la construction et les calculs précédents pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Solution :

1. Notons par une même lettre un vecteur de $\mathbb{R}^p$ et la matrice colonne canoniquement associée.

a) Soit $y \in \mathrm{Im}\, A$, il existe $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $y = Ax$. Si u est un vecteur quelconque de $\mathrm{Ker}\, {}^tA$ on a : $\langle y, u\rangle = \langle Ax, u\rangle = {}^t(Ax)u = {}^tx\, {}^tAu = \langle x, {}^tAu\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$. Donc $y \in [\mathrm{Ker}\, {}^tA]^\perp$ et :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp}}$$

b) Soit $x \in [\mathrm{Im}\, A]^{\perp}$, on a pour tout vecteur y de $\mathbb{R}^p$: $\langle x, Ay\rangle = 0$. Donc pour tout $y \in \mathbb{R}^p, \langle {}^tAx, y\rangle = 0$ et ${}^tAy$ est orthogonal à $\mathbb{R}^p$ et est donc le vecteur nul, *i.e.* $y \in \mathrm{Ker}({}^tA)$:

$$\boxed{[\mathrm{Im}(A)]^{\perp} \subset \mathrm{Ker}({}^tA)}$$

c) Le résultat b) donne, par passage à l'orthogonal : $[\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp} \subset \mathrm{Im}(A)$ et grce à a) :

$$\boxed{\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^{\perp}}$$

2. a) ${}^tA$ est clairement de rang $p-1$, donc son noyau est de dimension 1. La première colonne de ${}^tA$ étant nulle, son noyau est la droite engendrée par le premier vecteur de la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Son image est engendrée par les vecteurs colonnes de ${}^tA$, donc en fait par $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}$.

b) Soit $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i e_i$. Pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, on a : $Ae_i = \dfrac{1}{i}\, e_{i+1}$ et donc :

$$x = x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{p} x_i e_i = x_1 e_1 + A\Big(\sum_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i\Big)$$

On a bien $x' = x_1 e_1 \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' = \sum\limits_{i=1}^{p-1} i x_{i+1} e_i \in \mathrm{Im}({}^tA)$.

L'application $x \mapsto x''$ est clairement linéaire et :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & p-1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $AB = \mathrm{diag}(0, 1, \dots, 1)$, qui est bien la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_p)$.

d) De même $BA = \mathrm{diag}(1, \dots, 1, 0)$ qui est la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1}) = \mathrm{Im}({}^tA) = (\mathrm{Ker}\, A)^{\perp}$.

3. Si A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
D'après 1. on a $\mathbb{R}^p = \mathrm{Ker}({}^tA) \oplus \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^p$. On peut écrire $x = x' + Ay$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $y \in \mathbb{R}^p$.
Le vecteur y s'écrit $y = u + x''$, avec $u \in \mathrm{Ker}\, A$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
On obtient donc $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.
Si $x = x' + Ax'' = x'_1 + Ax''_1$ sont deux telles décompositions, on a :

$$x'_1 - x' = A(x'' - x''_1)$$

D'où $x_1' - x_1 = 0$, car $\mathrm{Ker}({}^tA)$ et $\mathrm{Im}\,A$ sont supplémentaires, donc d'intersection réduite au vecteur nul.
Ainsi $x'' - x_1'' \in \mathrm{Ker}\,A$ et comme ce vecteur appartient aussi à $\mathrm{Im}({}^tA) = [\mathrm{Ker}\,A]^{\perp}$, il s'agit du vecteur nul.
Finalement la décomposition est bien unique et u est bien une application.
La linéarité de u est évidente.

Par construction : $ABx = AB(x' + Ax'') = Ax'' = p_{\mathrm{Im}\,A}(x)$, donc $AB = P_{\mathrm{Im}\,A}$.
D'autre part, $x = y' + y''$, avec $y' \in \mathrm{Ker}\,A$ et $y'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$. On en tire :
$BAx = BAy'' = y'' = p_{\mathrm{Im}({}^tA)}(x)$, soit $BA = P_{\mathrm{Im}\,{}^tA}$.

Exercice 10.

Soit E l'ensemble des polynômes P à coefficients réels vérifiant :

$$P(X)P(X+1) = -P(X^2) \qquad (*)$$

1. Trouver les polynômes constants vérifiant la relation $(*)$.

2. On suppose désormais que $P \in E$ a un degré supérieur ou égal à 1.

a) Soit α une racine (éventuellement complexe) de P. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, α^{2^p} est également racine de P. Que peut-on conclure sur le module de α ?

b) Montrer que si α est racine de P, alors $(\alpha-1)^2$ est également racine de P.

c) Quelles sont les racines possibles de P ?

d) Montrer que P est de la forme $P(X) = -X^n(X-1)^n$, avec $n \geqslant 1$.

3. a) Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) La famille des polynômes $\big([X^n(X-1)^n]^{(n)}\big)_{n\geqslant 1}$ est-elle orthonormée pour ce produit scalaire ?

(On rappelle que $S^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme S)

Solution :

1. Si P est un polynôme constant C la relation $(*)$ est équivalente à $C^2 + C = 0$, soit $C = 0$ ou $C = -1$.

2. a) Supposons que $P(\alpha) = 0$. La relation $(*)$ entraîne alors que $P(\alpha^2) = 0$, donc en itérant ce processus, $P(\alpha^4) = 0$, et par une récurrence immédiate $P(\alpha^{2^p}) = 0$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $|\alpha| = 1$ ou $\alpha = 0$. En effet, P admettant un nombre fini de racines distinctes, il existe $p > q$ tels que $\alpha^{2^p} = \alpha^{2^q}$ soit $\alpha = 0$ ou $\alpha^{2^p - 2^q} = 1$, ce qui entraîne $|\alpha| = 1$.

b) Utilisons la relation $(*)$ avec $0 = P(\alpha - 1)P(\alpha) + P((\alpha - 1)^2)$, ce qui entraîne que $(\alpha - 1)^2$ est racine de P. En appliquant la question 2.a, il vient $\alpha = 1$ ou $|\alpha - 1| = 1$

En conclusion, si $P(\alpha) = 0$, alors :

$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ ou } \begin{cases} |\alpha| = 1 \\ \text{et} \\ |\alpha - 1| = 1 \end{cases}$$

c) La troisième condition se réécrit $|e^{it} - 1| = 1$, avec $t \in [0, 2\pi[$. Or :

$$e^{it} - 1 = e^{it/2}(2i \sin \frac{t}{2}) \text{ et donc } |e^{it} - 1| = 2 \sin \frac{t}{2}$$

et :

$$|e^{it} - 1| = 1 \implies \sin(t/2) = 1/2, \text{ soit } t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Par suite $\alpha = -j$ ou $\alpha = -j^2$.

L'ensemble des racines **possibles** de P est donc $S = \{0, 1, -j, -j^2\}$. Or si $-j$ est racine, $(-j)^2 = j^2$ également, ce qui n'est pas le cas. De même avec $-j^2$. Ainsi :

$$S \subset \{0, 1\}$$

d) Ainsi, P est de la forme $P(X) = \lambda X^p (X - 1)^q$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Écrivons alors la relation $(*)$ pour un tel polynôme :

$$\lambda^2 X^p (X - 1)^q (X + 1)^p X^q + \lambda X^{2p} (X^2 - 1)^q = 0$$

ou :

$$X^p (X - 1)^q \left[\lambda (X + 1)^p X^q + X^p (X + 1)^q\right] = 0$$

donc :

$$\lambda (X + 1)^p X^q + X^p (X + 1)^q = 0$$

Comme les termes de degré $(p+q)$ doivent se simplifier, il vient $\lambda = -1$, puis en substituant à X la valeur 1 : $2^q = 2^p$, soit $p = q$.

Réciproquement les polynômes de la forme $-X^n (X - 1)^n$ sont solutions de $(*)$.

3. a) C'est quasiment une question de cours.

b) Soit pour tout $n \geqslant 1, P_n(X) = X^n (X-1)^n$. C'est un polynôme de degré $2n$, et $0, 1$ sont des racines de multiplicité n.
Soit $n > m$. Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_n^{(n)}(t) P_m^{(m)}(t)\, dt &= \left[P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m)}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t)\, dt \\ &= -\int_0^1 P_n^{(n-1)}(t) P_m^{(m+1)}(t)\, dt \end{aligned}$$

car 0 et 1 sont des racines de $P_n^{(n-1)}(t)$. En recommençant ce processus n fois, on obtient :

$\displaystyle\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_m^{(m)}(t)\,dt = (-1)^n\int_0^1 P_n(t)P_m^{(m+n)}(t)\,dt = 0$, puisque $P_m^{(m+n)}$ est le polynôme nul.

La famille donnée est donc orthogonale pour ce produit scalaire. Par contre elle n'est pas orthonormée, car :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n(2n)!\int_0^1 t^n(t-1)^n\,dt$$

Notons $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p(t-1)^q\,dt$. Une intégration par parties donne :

$$I(p,q) = \frac{q}{p+1}\int_0^1 t^{p+1}(t-1)^{q-1}\,dt = -\frac{q}{p+1}I(p+1,q-1)$$

Donc :

$$I(p,q) = (-1)^q\frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\cdots\times\frac{1}{p+q}I(p+q,0) = (-1)^q\frac{q!p!}{(p+q+1)!}$$

Donc :

$$\int_0^1 P_n^{(n)}(t)P_n^{(n)}(t)\,dt = (2n)!\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(n!)^2}{2n+1} \neq 1$$

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f, g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)$$

($g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ désignant la restriction de g à l'image de f).

2. En déduire :

a) $\mathrm{rg}(g\circ f) = \mathrm{rg}(f) - \dim\big(\mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)\big)$.

b) $\mathrm{rg}(g\circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E)$.

($\mathrm{rg}(u)$ désignant le rang d'un endomorphisme u de E).

Solution :

1. On a :

$x\in\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}\,f}) \iff x\in\mathrm{Im}\,f$ et $g_{|\,\mathrm{Im}\,f} = 0 \iff x\in\mathrm{Im}\,f$ et $g(x) = 0$

Donc :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)}) = \mathrm{Ker}(g)\cap\mathrm{Im}(f)}$$

2. a) On a : $\mathrm{rg}(g\circ f) = \dim[g(f(E))] = \dim(\mathrm{Im}(g_{|\,\mathrm{Im}\,f}) = \mathrm{rg}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})$.

Par le théorème du rang, appliqué à $g_{|\,\mathrm{Im}(f)}$, il vient :

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim \mathrm{Im}\, f - \dim(\mathrm{Ker}(g_{|\,\mathrm{Im}(f)})) = \mathrm{rg}(f) - \dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f))}$$

b) Comme $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\, g$ on a :

$$\dim(\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, g) = \dim E - \mathrm{rg}(g)$$

ce qui donne, en remplaçant, le résultat demandé :

$$\boxed{\mathrm{rg}(g \circ f) \geqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) - \dim(E)}$$

Exercice 12.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels. A tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la fonction :

$$\varphi(P) : x \longmapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)dt$$

1. a) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$P(b) = \sum_{k=0}^{+\infty} (b-a)^k \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$$

b) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

On note D l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction polynôme dérivée P'.

2. Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que l'on explicitera, telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n D^n(P)$$

(D^n désignant l'itéré $n^{\text{ème}}$ de D, *i.e.* $D^0 = Id, D^2 = D \circ D, \ldots$).

Déterminer la valeur des (a_n) en fonction de n et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

3. Quels sont les éléments propres de φ ?

Solution :

1. a) La série se trouvant dans le membre de droite de l'égalité est en fait une somme finie, puisque si p est le degré de P, alors pour tout $k \geqslant p+1$, $P^{(k)}(a) = 0$.

La formule demandée n'est en fait rien d'autre que la formule de Taylor pour les polynômes, formule qui est exacte, si son ordre est suffisamment grand.

b) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)\, dt$ existe pour tout x réel. En effet, l'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t^2} P(x+t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale.

En utilisant la question précédente, il vient :
$$\varphi(P)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k P^{(k)}(x)}{k!}\, dt$$
et comme la somme est finie :
$$\varphi(P)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \frac{t^k}{k!}\, dt$$
ce qui montre que $\varphi(P)$ est un polynôme.

La linéarité est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

2. Par la question précédente, pour tout $n \geqslant 0$:
$$a_n = \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} t^n\, dt$$
On remarque que $a_{2n+1} = 0$, par imparité de la fonction à intégrer. Quant à a_{2n}, il suffit d'utiliser une intégration par parties (à justifier avec soin !) pour obtenir pour tout $n \geqslant 0$:
$$a_{2n} = \frac{1}{2^{2n} n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$
3. Soit λ une valeur propre de φ ; il existe un polynôme P non nul de degré $p \geqslant 0$ tel que $\varphi(P) = \lambda P$, qui se réécrit :
$$\sum_{n=0}^{p} a_n D^n(P) = \lambda P$$
Or pour tout n tel que $0 \leqslant n \leqslant p$, $\deg D^n(P) = p - n$ et $a_0 \neq 0$. Donc seul $D^0(P) = P$ est de degré p, les autres étant de degré strictement inférieur. Ainsi $\lambda = a_0$.

L'équation $\varphi(P) = \lambda P$ se réécrit :
$$\sum_{k=1}^{p} a_k P^{(k)}(x) = 0$$
Or la famille $\big(P'(x), \ldots, P^{(p)}(x)\big)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre et pour tout $k \geqslant 1, a_k = 0$, ce qui n'est pas vérifié.

La seule possibilité est que la sommation précédente n'existe pas, donc que le degré p de P soit nul, donc que P soit un polynôme constant.

Réciproquement tout polynôme constant est associé à la valeur propre a_0.

Exercice 13.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$. Montrer que
$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 /\ ax+by+cz=0\}$$
est un sous-espace vectoriel de dimension 2 (appelé aussi plan vectoriel) de $\mathbb{R}^3$.

2. Soient P d'équation $ax+by+cz=0$ et Q d'équation $ux+vy+wz=0$ deux tels plans.
Montrer que $P=Q$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(u,v,w) = \lambda(a,b,c)$.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

4. Un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est dit stable par f si $f(F) \subset F$.
Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Solution :

1. Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par : $\varphi(x,y,z) = ax+by+cz$.
C'est une application linéaire non nulle (car $(a,b,c) \neq (0,0,0)$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc φ est de rang 1, et, par le théorème du rang, $P = \operatorname{Ker}\varphi$ est bien un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

2. Si $(u,v,w) = \lambda(a,b,c)$, alors $ax+by+cz=0 \Longleftrightarrow ux+vy+wz=0$ et $P=Q$.
Réciproquement supposons que l'on ait $P=Q$.
Quitte à changer les noms des coordonnées, on peut supposer que $a \neq 0$. Alors $ax+by+cz=0 \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{a}\,y - \frac{c}{a}\,z \Longleftrightarrow (x,y,z) = y(-\frac{b}{a},1,0) + z(-\frac{c}{a},0,1)$
Les vecteurs $(-\frac{b}{a},1,0)$ et $(-\frac{c}{a},0,1)$, ou mieux $(b,-a,0)$ et $(c,0,-a)$ forment une base de P.
Si $P=Q$, ces vecteurs appartiennent aussi à Q et :
$$\begin{cases} ub-av=0 \\ uc-aw=0 \end{cases}, \text{ soit : } (u,v,w) = \frac{u}{a}\,(a,b,c).$$

3. La méthode du pivot de Gauss montre que les valeurs propres de A sont -1 et 3. La résolution des systèmes $AX = \lambda X$ donne ensuite :
$$E_{(-1)}(f) = \operatorname{Vect}(1,-1,0) \text{ et } E_{(3)}(f) = \operatorname{Vect}(1,1,0)$$

4. $\star$ Trivialement, $\{0\}$ est le seul sous-espace stable de dimension 0, et $\mathbb{R}^3$ est le seul sous-espace stable de dimension 3.

$\star$ Soit D une droite et v un vecteur directeur de D.
On a : $f(D) \subset D \Longleftrightarrow f(v) \in D \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}, f(v) = \lambda v$.
Ainsi une droite est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f. Il existe donc deux droites stables par f : $E_{(-1)}(f) = \operatorname{Vect}(1,-1,0)$ et $E_{(3)}(f) = \operatorname{Vect}(1,1,0)$.

⋆ Soit P un plan stable, $ax + by + cz = 0$ une équation de P.

$(x, y, z) \in P \implies f(x, y, z) \in P$ s'écrit :

$$ax + by + cz = 0 \implies (a + 2b)x + (2a + b)y + (a + b + 3c)z = 0$$

On a $(a + 2b, 2a + b, a + b + 3c) \neq (0, 0, 0)$ et on peut appliquer les résultats de la question 2. Il existe donc $\lambda \neq 0$ tel que :

$$\begin{cases} a + 2b = \lambda a \\ 2a + b = \lambda b \\ a + b + 3c = \lambda c \end{cases}$$

ce qui se réécrit : ${}^tA \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Ainsi $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA$. Un calcul immédiat montre que ${}^tA$ a les mêmes valeurs propres que A et que ${}^tA$ admet deux droites propres engendrées respectivement par :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi A admet deux plans stables d'équation $z = 0$ et $x - y = 0$.

Exercice 14.

Dans cet exercice on confondra polynôme et fonction polynôme associée.

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)\, dt$$

1. Montrer que $u(P)$ est bien défini. Calculer $u(X^k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u.

b) Soit v l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], v(P) = u(P)$

Montrer que v réalise un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Quelle est la matrice A associée à v dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?

L'endomorphisme v est-il diagonalisable ?

3. Déterminer A^{-1}, l'inverse de A.

4. Si P est un polynôme tel que pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0$, montrer que, pour tout x réel :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} P^{(k)}(x) \geqslant 0$$

Solution :

1. Soit P un polynôme de degré p.
L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}P(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; de plus $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2.\mathrm{e}^{-t}P(t) = 0$ entraîne la convergence de l'intégrale définissant $u(P)(x)$.
La linéarité de P découle de la linéarité de l'intégrale.
Il est évident que $u(1) = 1$.
Soit $n \geqslant 1$. Une intégration par parties (d'abord sur un segment, suivie d'un passage à la limite) donne :

$$u(X^n) = X^n + nu(X^{n-1})$$

Ainsi, par récurrence :

$$u(X^n) = X^n + nX^{n-1} + n(n-1)X^{n-2} + \cdots + n!$$

Ceci montre que $u(P)$ est une fonction polynomiale, quel que soit le polynôme P.

2. a) La stabilité de $\mathbb{R}_n[X]$ a été démontrée dans la question précédente, puisque pour tout $n \geqslant 0$, $u(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$.

b) Nous venons de montrer que v est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Toujours par la question 1. la famille $\big(u(1), u(X), \ldots, u(X^n)\big)$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés de 0 à n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ce qui montre que v est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
La matrice A est triangulaire supérieure de la forme $A = (a_{i,j})$, avec :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{j!}{i!} & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

La diagonale de A n'est formée que de 1. La seule valeur propre de A est donc 1.
Si A était diagonalisable, elle serait semblable à une matrice diagonale ne comportant que des 1 sur la diagonale *i.e.* la matrice identité ; elle serait donc égale à l'identité, ce qu'elle n'est pas.

3. Comme, pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $u(X^k) = X^k + ku(X^{k-1})$, on a :

$$v^{-1}(X^k) = X^k - kX^{k-1}$$

ce qui entraîne que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$v^{-1}(P) = P - P'$$

On en déduit facilement la matrice A^{-1}, également triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux valant 1, la diagonale étant bordée d'une sur-diagonale formée des nombres $-1, -2, \ldots, -n$.

4. Posons $Q(X) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} P^{(k)}(x)$. On remarque qu'en fait cette somme est finie, ce qui montre l'existence du polynôme Q. On vérifie alors que $Q - Q' = P$,

donc que $P = v^{-1}(Q)$ ou $Q = v(P)$, ce qui donne, par la définition de u et la positivité de P, le résultat escompté.

Exercice 15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_{n^2}[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à n^2) tel que $P(A) = 0_n$.

2. On suppose $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et des coefficients de P.

3. On suppose que 0 est racine d'ordre k de P : il existe alors un polynôme Q tel que $Q(0) \neq 0$ et $P(X) = X^k Q(X)$.

Montrer que A est inversible si et seulement si $Q(A) = 0_n$.

Solution :

1. La famille $(I, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est une famille de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de cardinal n^2+1. C'est donc une famille liée et il existe une combinaison non triviale de ces matrices donnant 0_n, donc un polynôme P de degré inférieur ou égal à n^2 tel que $P(A) = 0_n$

2. Dire que $P(0) \neq 0$ signifie que dans la combinaison linéaire précédente le coefficient a_0 de I n'est pas nul, soit :

$$a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2} = 0_n, \text{ avec } a_0 \neq 0$$

donc :

$$I = -\frac{1}{a_0}(a_1 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2}) = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-1})A$$

On sait alors qu'il est inutile de vérifier l'inversibilité de l'autre côté et A est inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_1 I + a_2 A + \cdots + a_{n^2} A^{n^2-1})}$$

3. On a : $A^k Q(A) = 0_n$, avec $Q(0) \neq 0$.

- si A est inversible, alors $Q(A) = 0_n$ (on multiplie k fois à gauche par A^{-1}).
- si $Q(A) = 0_n$, on est revenu à la situation de la question 2 et A est inversible.

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 4. On note 0 l'endomorphisme nul de E et I l'application identité de E.
On considère un endomorphisme u de E tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On pose $E_1 = \operatorname{Ker}(u^2 + u + I)$ et $E_2 = \operatorname{Ker} u$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.

2. Montrer que :

 a) $E_1 \oplus E_2 = E$.

 b) $E_1 = \operatorname{Im} u$.

 c) $E_2 = \operatorname{Im}(u^2 + u + I)$.

3. a) Montrer que, pour tout vecteur non nul x de E_1, la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre.

 b) Montrer que s'il existe deux vecteurs x et y de E_1 tels que la famille $\big(x, u(x), y\big)$ soit libre, alors la famille $\big(x, u(x), y, u(y)\big)$ est libre.

 c) Quelles sont les dimensions possibles de E_1 ?

Solution :

On sait que pour tout $x \in E$:

$$(\star) \qquad (u^3 + u^2 + u)(x) = u\big((u^2 + u + Id)(x)\big) = (u^2 + u + Id)\big(u(x)\big) = 0$$

1. Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Alors $(u^2+u+I)\big(u(x)\big) = 0$, soit $y \in E_1$ et $\operatorname{Im} u \subset E_1$.

$\star$ Soit $x \in E_1$, (on a donc $(u^2 + u + Id)(x) = 0$).
Alors $(u^2 + u + I)\big(u(x)\big) = u\big((u^2 + u + Id)(x)\big) = 0$ et $u(x) \in E_1$.

$\star$ Soit $x \in E_2$, (on a $u(x) = 0$). Alors $u\big(u(x)\big) = 0$ et $u(x) \in E_2$.

2. a) Soit $x \in E$. Le vecteur x s'écrit sous la forme

$$\big(x + u(x) + u^2(x)\big) + \big(-u(x) - u^2(x)\big) = y + z.$$

La relation $(\star)$ entraîne que $y \in E_1$ et $z \in E_2$.
Enfin si $x \in E_1 \cap E_2$, alors :

$$u(x) = 0,\ (u^2 + u + Id)(x) \text{ et donc } x = Id(x) = 0$$

La somme précédente est donc directe et

$$\boxed{E = E_1 \oplus E_2}$$

 b) Le sous-espace vectoriel E_2 étant supplémentaire à $E_1 = \operatorname{Ker} u$, sa dimension est celle de $\operatorname{Im} u$. Mais E_1 contient $\operatorname{Im} u$; on a donc $\boxed{E_2 = \operatorname{Im} u}$.

 c) La relation $(\star)$ montre que $\operatorname{Im}(u^2+u+I) \subseteq E_2$. On conclut comme dans la question précédente en utilisant les dimensions de ces deux sous-espaces : $\boxed{\operatorname{Im}(u^2 + u + I) = E_2}$.

3. a) Supposons que la famille $\big(x, u(x)\big)$ soit liée. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui signifie que λ est valeur propre réelle de u associée au vecteur propre x.
Mais $u^k(x) = \lambda^k x, k \geqslant 2$ entraîne que :

$$0 = (u^3 + u^2 + u)(x) = (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda)x$$

Comme $x \neq 0$, il vient $\lambda = 0$ (car $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle). Donc $u(x) = 0$ et $x = (u^2 + u + Id)(x) = 0$. D'où la contradiction et :

$$\boxed{\big(x, u(x)\big) \text{ est libre}}$$

b) Supposons que la famille $\big(x, u(x), y, u(y)\big)$ soit liée. Il existe quatre scalaires a, b, c, d non tous nuls tels que $ax + bu(x) + cy + du(y) = 0$.
Comme $\big(x, u(x), y\big)$ est libre, d est non nul et quitte à diviser par d, on peut supposer $d = -1$, et :
il existe trois réels (a, b, c) non tous nuls tels que $u(y) = ax + bu(x) + c(y)$.
On a alors :

$$u^2(y) = (ac - b)x + (bc - b + a)u(x) + c^2 y$$

et

$$0 = (u^2 + u + Id)(y) = (ac - b + a)x + (bc + a)u(x) + (c^2 + c + 1)y$$

en contradiction avec $\big(x, u(x), y\big)$ libre, puisque $c^2 + c + 1 \neq 0$.

c) Par la question précédente, si $\dim E_1 \geqslant 1$ alors $\dim E_1 \geqslant 2$ et si $\dim E_1 \geqslant 3$ alors $\dim E_1 \geqslant 4$. Les dimensions possibles de E_1 sont donc $\{0, 2, 4\}$.

Exercice 17.

Soient A et B les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser dans une base orthonormée.

b) Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient toutes deux diagonales.

2. Soit F l'application définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par, pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$F : X \mapsto AX - XB$$

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit U un vecteur colonne propre de A et V un vecteur colonne propre de B. Calculer $F(U.{}^tV)$.

c) F est–elle un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

d) F est–elle diagonalisable ?

Solution :

1. a) b) On peut évidemment chercher les éléments propres de A et B par la technique habituelle du pivot de Gauss. On peut aussi remarquer que :

$\star$ $A = -I + 2\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -I + 2J.$

La matrice J vérifie $J^2 = J$, donc est une matrice de projecteur (non dégénéré). Ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z = 0$ et 1, de sous-espace propre associé la droite $\mathcal{D}$ dirigée par le vecteur $(1, 1, 1)$.

Par conséquent les valeurs propres de A sont -1 et 1, avec :

$$E_{(-1)}(A) = \mathcal{P}\ ;\ E_{(1)}(A) = \mathcal{D}$$

$\star$ On a $B^2 = B$, donc B représente aussi un projecteur (non dégénéré) et ses valeurs propres de sont 0 et 1, avec :

$E_{(0)}(B) = \operatorname{Ker} B$ est la droite $\mathcal{D}'$ dirigée par $(1, -2, 1)$;

$E_{(1)}(B)$ est le plan $\mathcal{P}'$ d'équation $x - 2y + z = 0$.

Comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}$ et $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}'$, les vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, -2, 1)$ sont propres à la fois pour A et B et on complète avec le vecteur $(1, 0, -1)$ qui appartient à $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ce qui donne une base orthogonale propre à la fois pour A et B.

En normant ces vecteurs, on prend donc : $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

et $\boxed{P^{-1}AP = \operatorname{diag}(-1, -1, 1)\ ;\ P^{-1}BP = \operatorname{diag}(0, 1, 1)}$

2. a) Il est clair que pour tout $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $F(X) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La linéarité de F résulte de la distributivité du produit sur l'addition.

b) Si $AU = \lambda U$ et $BV = \mu V$, alors $U{}^tV \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et ${}^tVB = \mu{}^tV$ (car B est symétrique), d'où :

$$\boxed{F(U{}^tV) = AU{}^tV - U{}^tVB = \lambda U{}^tV - \mu U{}^tV = (\lambda - \mu)U{}^tV}$$

Ainsi cette matrice est vecteur propre de F associée à la valeur propre $\lambda - \mu$.

c) La valeur propre 1 étant commune à A et B, F admet 0 comme valeur propre et n'est donc pas inversible.

d) A et B admettent une base orthonormée commune de vecteurs propres (U_1, U_2, U_3). Par la question précédente, les 9 matrices $U_i{}^tU_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ sont des vecteurs propres de F.

Montrons qu'elles forment une famille libre.

Supposons que $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} \lambda_{i,j} U_i{}^tU_j = 0$. En multipliant à droite par U_k et en remarquant que la famille est orthonormée (donc ${}^tU_kU_k = \|U_k\|^2 = 1$ et ${}^tU_jU_k = 0$ lorsque $k \neq j$), il vient :

$$\sum_{i=1}^{3} \lambda_{i,k} U_i = 0$$

ce qui entraîne par la liberté de (U_1, U_2, U_3) que $\lambda_{i,k} = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, et ceci quel que soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant 3$.

La liberté est bien acquise et l'endomorphisme F est donc diagonalisable.

Exercice 18.

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$ et soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient que des 0 sauf en position (i,j) où se trouve un 1.
On rappelle que les n^2 matrices $E_{i,j}$ forment une base de E. Enfin, on note I la matrice identité.

1. a) Trouver une matrice de E non nulle et non inversible.

b) Trouver une droite de E qui ne contient aucune matrice inversible.

2. Soit j un entier de $\{1, 2, \ldots, n^2 - n\}$. Trouver un sous-espace vectoriel de E de dimension j qui ne contient aucune matrice inversible.

3. a) Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

b) Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension $n^2 - 1$. Construire une application linéaire non nulle f de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\operatorname{Ker} f = H$.

c) Tout élément $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrivant sous la forme $A = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}E_{i,j}$, on note, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $X_{i,j}$ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $X_{i,j}(A) = \alpha_{i,j}$.
Soit f une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe n^2 réels $(a_{i,j})$ tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}X_{i,j}$.

d) Dans cette question seulement, on fait l'hypothèse que $i \neq j$ implique que $a_{i,j} = 0$. Montrer que la matrice $M = E_{n,1} + \sum\limits_{i=2}^{n} E_{i,i-1}$ est élément de H et qu'elle est inversible.

e) Dans le cas où l'hypothèse faite en d) n'est pas vérifiée, montrer que, pour un couple (i,j) à préciser, la matrice $N = I - \dfrac{f(I)}{a_{i,j}}E_{i,j}$ est dans H et que N est inversible.
Qu'en conclure ?

Solution :

1. a) Toute matrice $E_{i,j}$ est non nulle et non inversible puisque de rang 1.

b) Le sous-espace vectoriel engendré par $E_{i,j}$ est une droite. Tout élément de ce sous-espace est de la forme $\lambda E_{i,j}$ (λ réel), et est non inversible.

2. Soit F le sous-espace de E formé des matrices dont la dernière colonne ne comporte que des zéros. Cet espace est engendré par les matrices $E_{i,j}$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Il est de dimension $n(n-1)$ et ne contient aucune matrice inversible.
Pour $j \in [\![1, n^2-n]\!]$, tout espace engendré par j matrices choisies parmi les matrices précédentes est de dimension j et ne contient *a fortiori* aucune matrice inversible.

3. a) C'est une question de cours : $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$, où δ est le symbole de Kronecker, *i.e.* $\delta_{j,k}$ vaut 0 si $j \neq k$ et 1 si $j = k$.

b) Soit $(M_1, M_2, \ldots, M_{n^2-1})$ une base de H, que l'on complète avec un vecteur M_{n^2} pour obtenir une base de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Par le théorème fondamental de l'algèbre linéaire il existe une application linéaire f et une seule de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(M_{n^2}) = 1$ et $\forall i \in [\![1, n^2-1]\!], f(M_i) = 0$.
Par construction même H est inclus dans $\operatorname{Ker} f$ et comme f est non nulle, $\operatorname{Ker} f$ n'est pas E tout entier. Donc :

$$\boxed{H = \operatorname{Ker} f}$$

c) $X_{i,j}$ est bien une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ (elle associe à toute matrice A, son terme d'indices (i,j)).
On sait que $\dim \mathcal{L}(E,\mathbb{R}) = n^2$.
La famille $(X_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n}$ est une famille de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ de cardinal n^2.
C'est une famille libre, car si $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}X_{i,j} = 0$, alors $\sum\limits_{i,j} \alpha_{i,j}X_{i,j}(E_{k,\ell}) = 0$, ce qui se réduit à $\alpha_{k,\ell} = 0$.
C'est donc une base de $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ et f se décompose sur cette base.

d) L'application f définie dans la question 3. a) vérifie ici $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}X_{i,i}$.
Donc :

$$f(M) = f(E_{n,1} + \sum_{i=2}^{n} E_{i,i-1}) = 0 + 0 = 0$$

et $M \in H$.
La matrice M est inversible, car elle représente un endomorphisme de permutation ; en effet, si l'on note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans cette base est M, alors :

$$\varphi(e_1) = e_n, \text{ et } \forall i \geqslant 2, \varphi(e_i) = e_{i-1}$$

On montre alors facilement que $\varphi^n = Id$, donc $M^n = I$ et l'inverse de M est M^{n-1}.

e) Choisissons un couple (i,j) tel que $i \neq j$ et $a_{i,j} \neq 0$.
On a alors $f(N) = f(I) - \dfrac{f(I)}{a_{i,j}} f(E_{i,j}) = f(I) - f(I) = 0$ et $N \in H$.
La matrice N est trigonale sans terme diagonal nul, donc est inversible.

En conclusion, tout sous-espace de E de dimension n^2-1 contient au moins une matrice inversible.

Exercice 19.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul donné.

On se place dans l'espace vectoriel E_n des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f : x \mapsto \mathrm{e}^x.P(x)$, où P est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n (donc de $\mathbb{R}_n[X]$).

1. Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il est de dimension finie. En donner une base.

2. Soit Δ l'opérateur de dérivation défini sur E_n par, pour tout $f \in E_n$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f'(x)$$

où f' désigne la dérivée de f.

Montrer que Δ est un automorphisme de E_n.

3. a) Montrer qu'il existe une unique fonction h de E_n telle que $\Delta^{n+1}(h) = g$, avec $g : x \mapsto \mathrm{e}^x.x^n$ (on ne cherchera pas à expliciter h).

b) Déterminer, en fonction de h et de ses dérivées successives, les applications f de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, vérifiant :

$$D^{n+1}(f) = g, \text{ et } f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 0$$

Où D désigne l'opérateur de dérivation sur l'ensemble des fonctions dérivables

4. Déterminer les éléments propres de Δ. Cet endomorphisme est–il diagonalisable ?

Solution :

1. Par définition, E_n est l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions $e_i : x \mapsto \mathrm{e}^x.x^i$, i décrivant $[\![0, n]\!]$. Ces fonctions étant clairement des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, E_n est un sous-espace de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ en est un système générateur.

Enfin si $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ est l'application nulle, alors, une exponentielle n'étant jamais nulle, on a $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$ et tous les λ_i sont nuls.

$(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est libre, donc est une base de E_n qui est de dimension $n+1$.

2. Δ est évidemment linéaire et si $f : x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$, alors :

$$\Delta(f) : x \mapsto \mathrm{e}^x \big(P(x) + P'(x)\big)$$

Donc $\Delta(f) \in E_n$ et Δ est un endomorphisme de E_n.

Enfin, avec les notations précédentes : $f \in \operatorname{Ker} \Delta \iff P + P' = 0 \iff P = 0$ et $\operatorname{Ker} \Delta$ se réduit à la fonction nulle : Δ est injectif et puisque E_n est de dimension finie :

$$\Delta \in GL(E_n)$$

3. a) Δ étant un automorphisme de E_n, il en est de même de Δ^{n+1} et g admet un antécédent unique (dans E_n), par l'automorphisme Δ^{n+1}. On a d'ailleurs $h = \Delta^{-(n+1)}(g)$.

b) On cherche f sous la forme $f = h + \varphi$. Alors f convient si et seulement si :

$$D^{n+1}(\varphi) = 0 \text{ et } \forall\, k \in [\![0, n-1]\!], \varphi^{(k)}(0) = -h^{(k)}(0)$$

La première relation indique que φ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et, par la formule de Taylor :

$$\varphi(x) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

4. Soit λ une éventuelle valeur propre de Δ et f une fonction propre associée. La fonction f est de la forme $x \mapsto \mathrm{e}^x P(x)$, où P est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

$\Delta f = \lambda f$ s'écrit : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \big(P(x) + P'(x)\big) = \lambda.\mathrm{e}^x P(x)$, soit :

$$(\lambda - 1)P = P'$$

$\star$ Si $\lambda = 1$, alors P est un polynôme constant ;
$\star$ Si $\lambda \neq 1$, alors P est nécessairement le polynôme nul (sinon, P et P' auraient le même degré !)

En conclusion 1 est la seule valeur propre de Δ et $E_{(1)}(\Delta) = \operatorname{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x)$.
Comme n est non nul, $\operatorname{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x) \neq E_n$ et Δ n'est pas diagonalisable.

Exercice 20.

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
On désigne par $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Un endomorphisme D de E est appelé *dérivation* dans E s'il vérifie : pour tout $(p, q) \in E^2$, $D(pq) = D(p)q + pD(q)$.

On désigne par $\mathcal{D}(E)$ l'ensemble des dérivations dans E.

1. Soit D une dérivation dans E et $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, avec x réel. Déterminer $D(X)$.

2. Montrer que si $a \in E$ est donné, l'application D_a de E dans E définie par, pour tout $p \in E$:

$$D_a(p) = ap - pa$$

est une dérivation.

3. Montrer que $\mathcal{D}(E)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. Montrer que si D_1 et D_2 sont deux dérivations dans E, alors il en est de même de $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$.

Solution :

1. Par linéarité de D : $D(X) = D(xI_2) = xD(I_2)$.
Or $D(I_2) = D(I_2 I_2) = I_2 D(I_2) + D(I_2) I_2 = 2D(I_2)$ et donc $D(I_2) = 0$, soit :

$$D(X) = 0$$

2. $\star$ D_a est linéaire de E dans E, car :

$$\begin{aligned}\forall\, p, q \in E, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, D_a(p+\lambda q) &= a(p+\lambda q) - (p+\lambda q)a = ap - pa + \lambda(aq - qa)\\ &= D_a(p) + \lambda D_a(q)\end{aligned}$$

et $D_a(p)$ est bien une matrice carrée d'ordre 2.

$$\begin{aligned}\star\ \forall\, p, q \in E, D_a(p)q + pD_a(q) &= (ap - pa)q + p(aq - qa) = a(pq) - (pq)a\\ &= D_a(pq)\end{aligned}$$

Donc D_a est une dérivation sur E.

3. L'application nulle est une dérivation sur E et on vérifie facilement que si D_1 et D_2 sont deux dérivations, alors pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, $D_1 + \lambda D_2$ est une dérivation. L'ensemble des dérivations est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

4. $\star$ $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ est encore un endomorphisme de E (algèbre des endomorphismes).

$\star$ Pour toutes matrices p et q de E :

$$\begin{aligned}(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) &= (D_1 \circ D_2)(pq) - (D_2 \circ D_1)(pq)\\ &= D_1\big(D_2(p)q + pD_2(q)\big) - D_2\big(D_1(p)q + pD_1(q)\big)\\ &= D_1\big(D_2(p)q\big) + D_1\big(pD_2(q)\big) - D_2\big(D_1(p)q\big) - D_2\big(pD_1(q)\big)\\ &= (D_1 \circ D_2)(p)q + D_2(p)D_1(q) + D_1(p)D_2(q) + p(D_1 \circ D_2)(q)\\ &\quad -(D_2 \circ D_1)(p)q - D_1(p)D_2(q) - D_2(p)D_1(q) - p(D_2 \circ D_1)(q)\end{aligned}$$

et il reste :

$$(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(pq) = (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(p)q + p(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)(q)$$

Donc $(D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1)$ est encore une dérivation.

Exercice 21.

Soient n un entier naturel tel que $n \geqslant 3$ et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré strictement inférieur à n.
Soient a et b deux réels distincts.

1. a) Montrer que F_a, F_b et F définis ci-après, sont des sous–espaces vectoriels de E.

i) $F_a = \{P \in E / P(a) = 0\}$.

ii) $F_b = \{P \in E / P(b) = 0\}$.
iii) $F = \{P \in E / P(a) = P(b) = 0\}$.

b) Montrer que la famille des polynômes :

$$\big((X-a), X(X-a), X^2(X-a), \dots, X^{n-2}(X-a)\big)$$

forme une base de F_a.

c) Déterminer une base de F.

2. Soit u l'application de E dans E définie, pour tout $P \in E$ par :

$$(u(P))(X) = P(a)X + P(b)$$

a) Montrer que u est une application linéaire.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

3. Montrer que $E = F_a + F_b$.

Solution :

1. a) $\varphi_a : P \mapsto P(a)$ est clairement une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et : $F_a = \operatorname{Ker}\varphi_a$, $F_b = \operatorname{Ker}\varphi_b$, $F = F_a \cap F_b$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

b) $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ appartient à F_a si et seulement si a est racine de P, donc si et seulement si P est divisible par $(X-a)$, donc est de la forme $(X-a)Q$, avec $\deg Q \leqslant n-2$. Ainsi :

$$P \in F_a \iff \exists (a_0, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}, P = \sum_{i=0}^{n-2} a_i (X-a) X^i$$

La famille proposée est donc génératrice de F_a. Comme elle est clairement libre (elle est à degrés échelonnés de 1 à $n-1$) c'est une base de F_a.

b) De la même façon $\big((X-a)(X-b)X^i\big)_{0 \leqslant i \leqslant n-3}$ est une base de F.

2. a) Pour tous polynômes P, Q et tout scalaire λ :

$$\begin{aligned} u(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(a)X + (P+\lambda Q)(b) \\ &= P(a)X + P(b) + \lambda\big(Q(a)X + Q(b)\big) \\ &= u(P) + \lambda u(Q) \end{aligned}$$

b) $\star$ $P \in \operatorname{Ker} u \iff P(a)X + P(b) = 0 \iff P(a) = P(b) = 0 \iff P \in F$:

$$\operatorname{Ker} u = F$$

$\star$ Comme $\dim \operatorname{Ker} u = \dim F = n-2$ et $\dim E = n$, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Im} u = 2$. Or $\operatorname{Im} u$ est clairement inclus dans $\mathbb{R}_1[X]$, donc :

$$\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$$

3. $\dim(F_a + F_b) = \dim F_a + \dim F_b - \dim(F_a \cap F_b)$.
Or $\dim F_a = \dim F_b = n-1$ et $\dim(F_a \cap F_b) = \dim F = n-2$, donc :

$$\dim(F_a + F_b) = n = \dim E$$

L'inclusion $F_a + F_b \subset E$ étant banale, on conclut à l'égalité.

Exercice 22.

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 2$) à coefficients complexes. On note S (respectivement A) le sous–espace vectoriel de E formé des matrices symétriques, (respectivement antisymétriques).
On rappelle que ${}^tM$ désigne la matrice transposée de la matrice M et I la matrice identité de E.

Soient (α, β) deux nombres complexes donnés non nuls, et f l'application définie sur E par, pour tout $M \in E$:

$$f(M) = \alpha M + \beta {}^tM$$

1. Montrer que $E = S \oplus A$.

2. Exprimer f à l'aide de p et q, où $q = I - p$, quand p désigne le projecteur sur S de direction A.

3. Exprimer $f^2 = f \circ f$ en fonction de f et de I.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme de E. Exprimer alors f^{-1} en fonction de f et de I.

5. Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k en fonction de p, q, α, β.
En déduire la puissance $k^{\text{ème}}$ de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Solution :

1. $\star$ La matrice nulle est symétrique et toute combinaison linéaire de matrices symétriques est symétrique. Idem pour les matrices antisymétriques. Donc S et A sont des sous-espaces vectoriels de E.
$\star$ Seule la matrice nulle est à la fois symétrique et antisymétrique : $S \cap A = \{0\}$.
$\star$ Pour $M \in E$, on a : $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$ et la première matrice est symétrique, la seconde antisymétrique : $E = S + A$.
Ainsi : $$E = S \oplus A$$

2. On a : $p(M) = \dfrac{M + {}^tM}{2}$ et $q(M) = \dfrac{M - {}^tM}{2}$, donc :

$$M = p(M) + q(M),\ {}^tM = p(M) - q(M)$$

Soit : $f(M) = \alpha(p(M) + q(M)) + \beta(p(M) - q(M))$:

$$f = (\alpha+\beta)p + (\alpha-\beta)q = (\alpha+\beta)p + (\alpha-\beta)(Id - p)$$

3. Comme $p^2 = p, q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$ (couple de projecteurs associés), on a : $f^2 = (\alpha+\beta)^2 p + (\alpha-\beta)^2 q = (\alpha+\beta)^2 p + (\alpha-\beta)^2 (Id - p)$

Ainsi :

$$\begin{cases} f = (\alpha-\beta) Id + 2\beta p \\ f^2 = (\alpha-\beta)^2 Id + 4\alpha\beta p \end{cases}$$

et, en éliminant p : $\qquad f^2 - 2\alpha f = (\beta^2 - \alpha^2) Id.$

4. $\star$ Si $\beta^2 \neq \alpha^2$, l'écriture précédente donne : $(f - \dfrac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} Id) \circ f = Id$, ce qui prouve que f est un automorphisme et fournit f^{-1}.

$\star$ Si $\beta = -\alpha$, alors $f(I) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

$\star$ Si $\beta = \alpha$, alors pour n'importe quelle matrice M antisymétrique, on a $f(M) = 0$ et f n'est pas injective, donc n'est pas un automorphisme.

5. Par récurrence simple : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, f^k = (\alpha+\beta)^k p + (\alpha-\beta)^k q$.

Soit $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et :

$$A = M_{\mathcal{B}}(f)$$

On a :

$$P = M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ Q = M_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $A^k = M_{\mathcal{B}}(f^k) = (\alpha+\beta)^k P + (\alpha-\beta)^k Q$ et on explicite aisément les coefficients de A^k.

Exercice 23.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de dégré inférieur ou égal à n.

On considère une liste $(a_1 \ldots, a_n, a_{n+1})$ de réels deux à deux distincts et l'on définit une application ϕ de E^2 dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \phi(P,Q) = \sum_{k=1}^{n+1} P(a_k) Q(a_k)$$

1. Vérifier que ϕ est un produit scalaire sur E^2.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E formée de polynômes P_k tels que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, le degré de P_k soit égal à k et dont le terme de degré k soit positif.

Solution :

1. ϕ est évidemment bilinéaire et symétrique.
$\forall P \in E, \phi(P,P) = \sum_{k=1}^{n+1} P^2(a_k) \geqslant 0$ et cette expression n'est nulle que si P admet $a_1, \ldots, a_{n+1}$ pour zéros. Comme P est de degré inférieur ou égal à n, ceci ne peut se produire que pour $P = 0$.

$$\boxed{\phi \text{ est un produit scalaire}}$$

2. Il suffit d'appliquer à la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de E, et à ce produit scalaire, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 24.

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ un système de vecteurs unitaires tels que, pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$$

1. Montrer que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un système orthonormal.

2. Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, x un vecteur de E et y sa projection orthogonale sur F. Montrer que $x = y$.

3. En déduire que $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Solution :

1. On applique la relation pour chaque $x = e_j$:

$$\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2, \text{ d'où : } \sum_{k=1, k\neq j}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2 = 0.$$

Par conséquent : $\forall j \neq k, \langle e_j, e_k \rangle = 0$ et la famille, qui est normée, est bien orthonormée.

2. On a $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ et donc $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle x, e_i \rangle = \|x\|^2$.

De même $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2$.

On en déduit : $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 = 0$ et $x = y$.

3. La projection orthogonale sur F est l'identité, par conséquent $F = E$ et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 25.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E_n l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. Soit a un réel fixé. On considère, pour $k \in [\![0, n]\!]$, l'application f_k définie sur E_n par :

$$f_k(P) = P^{(k)}(a)$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

1. Montrer que f_k est une application linéaire de E_n dans $\mathbb{R}$.

2. On pose, pour $j \in [\![0,n]\!], Q_j(X) = (X-a)^j$. Pour tout k et pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, calculer $f_k(Q_j)$.

3. En déduire que $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de $\mathcal{L}(E_n, \mathbb{R})$.

4. Soit b un réel différent de a et m un entier tel que $0 \leqslant m \leqslant n$.
On définit l'application g de E_n dans $\mathbb{R}$ par $g(P) = P^{(m)}(b)$.
Montrer que g est linéaire et donner les coordonnées de g dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$.

Solution :

1. L'application f_k est bien définie sur E_n (une fonction polynôme est indéfiniment dérivable) et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La linéarité de f_k n'est autre que la linéarité de la dérivation.

2. Si $j \neq k$, $f_k(Q_j) = 0$ (si $k > j$, alors $Q_j^{(k)}$ est le polynôme nul et si $k < j$, $Q_j^{(k)}$ contient encore le facteur $X - a$)
Tandis que pour $j = k$, il vient $f_k(Q_k) = k!$.

3. Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0$, on a donc en particulier :

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(Q_j) = 0, \text{ i.e. } \lambda_j j! = 0$$

Ainsi tous les coefficients λ_j sont nuls et la famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$. Comme cet espace est de même dimension que E, à savoir $n+1$, il s'agit d'une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

4. On applique la formule de Taylor (exacte !) au polynôme $P^{(m)}$:

$$P^{(m)}(b) = P^{(m)}(a) + \frac{b-a}{1!} P^{(m+1)}(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!} P^{(n)}(a)$$

Les coordonnées de g sont donc :

$$\boxed{(0, \ldots, 0, 1, b-a, \ldots, \frac{(b-a)^{n-m}}{(n-m)!})}$$

Les $m-1$ premières coordonnées étant nulles.

Exercice 26.

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel et E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. Soit T l'application qui à tout polynôme $P \in E$, associe le polynôme $Q = T(P)$ défini par :

$$Q(X) = P(X) + \frac{1-X}{n} P'(X)$$

où P' désigne le polynôme dérivé de P.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Donner la matrice associée à T dans la base canonique de E.

3. Montrer que T admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

4. a) Déterminer le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_n.

b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et P un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k. Montrer que $P(1) = 0$.
On pose alors $P(X) = (X-1)^r R(X)$, avec $r \geqslant 1$ et $R(1) \neq 0$.
Préciser le degré de R.

c) En déduire le sous–espace propre associé à la valeur propre λ_k

5. On considère la suite de polynômes définie par $U_1(X) = X^{n-1}$ et, pour tout $j \geqslant 1$, par la relation :
$$U_{j+1}(X) = T(U_j)(X).$$

a) Montrer que :
$$U_1(X) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (X-1)^k$$

b) En déduire l'expression de $U_j(X)$ en fonction de $1, X-1, \dots, (X-1)^{n-1}$, ceci pour tout $j \geqslant 2$.

Exercice 27.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E. Soit :
$$L(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) / \ u \circ v = 0\}$$
Montrer que $L(u)$ est un sous–espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension.

Solution :

On a $u \circ v = 0 \iff \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, u \iff v$ est en fait une application linéaire de E dans $\mathrm{Ker}\, u$.
Par conséquent $L(u)$ est isomorphe (voire égal) à $\mathcal{L}(E, \mathrm{Ker}\, u)$, et donc :
$$\boxed{\dim L(u) = \dim E \times \dim \mathrm{Ker}\, u = n(n - \mathrm{rg}\, u)}$$

Exercice 28.

On considère deux entiers n et p tels que $2 \leqslant p \leqslant n$ et $E = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. On considère I l'application identité de E et p éléments distincts non nuls $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ de E vérifiant :
$$f_1 + f_2 + \cdots + f_p = I, \quad \text{et} \quad f_i \circ f_j = 0, \ \text{pour tout } i \neq j$$

Soient p nombres complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ deux à deux distincts et f l'endomorphisme :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \ldots + \alpha_p f_p$$

1. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, f_i est un projecteur de $\mathbb{C}^n$. Qu'en déduit-on pour $\mathbb{C}^n$ relativement à $\operatorname{Im} f_i$ et $\operatorname{Ker} f_i$?

2. Pour k entier naturel, calculer f^k.

3. Montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une famille libre de E.

4. Montrer que les seules valeurs propres de f sont les complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et que, si l'on note E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre α_i, on a :

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

5. Montrer que la famille $(I, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre dans E. En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un polynôme P_i de $\mathbb{C}[X]$, de degré inférieur ou égal à $(p-1)$, tel que $f_i = P_i(f)$ et que l'on a $P_i(\alpha_i) = 1$ et $P_i(\alpha_j) = 0$ pour $j \neq i$. En déduire l'expression de P_i.

Solution :

1. Soit i un entier tel que $1 \leqslant i \leqslant n$. On peut écrire :

$$f_i = f_i \circ \sum_{k=1}^{p} f_k = \sum_{k=1}^{p} (f_i \circ f_k) = f_i^2$$

ce qui signifie que f_i est un projecteur de $\mathbb{C}^n$. On sait alors que :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} f_i \oplus \ker f_i}$$

2. Utilisons la question précédente :

$$f^2 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j \circ \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f_j = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \alpha_j \alpha_k f_j \circ f_k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 f_j^2 = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^2 f_j$$

On montre ensuite par récurrence que pour tout $k \geqslant 2$,

$$\boxed{f^k = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j^k f_j}$$

3. Écrivons que : $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \ldots + \alpha_p f_p = 0$.
Alors, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$

$$0 = f_i \circ f = \alpha_i f_i^2 = \alpha_i f_i$$

On conclut en remarquant qu'aucun des endomorphismes f_i n'est identiquement nul : $\forall\, i, \alpha_i = 0$, et :

$$\boxed{(f_1, \ldots, f_p) \text{ est une famille libre}}$$

4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, α_i est valeur propre de f, car si x_i est un élément de $\operatorname{Im} f_i$, alors $x_i = f_i(x_i)$ et :

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k f_k(f_i(x_i)) = \alpha_i f_i(x_i) = \alpha_i x_i$$

Nous venons en fait de montrer que α_i est valeur propre de f, de sous-espace propre associé contenant $\operatorname{Im} f_i$.

Mais la relation $f_1 + f_2 + \cdots + f_p = Id$, donne, pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$x = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_p(x)$$

ce qui signifie que $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \cdots + \operatorname{Im} f_p$.

A fortiori, on a $\mathbb{C}^n = E_1 + \cdots + E_p$ et comme cette somme est directe (somme de sous-espaces propres) :

$$\boxed{\mathbb{C}^n = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p}$$

Les seules valeurs propres de f sont ainsi $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$.

5. Écrivons que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$:

$$a_0 x + a_1 f(x) + \cdots a_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$$

Pour $x = x_i$ vecteur propre de f associé à la valeur propre α_i, il vient :

$$\Big(\sum_{k=0}^{p-1} a_k \alpha_i^k\Big) x_i = 0$$

Le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ est de degré $(k-1)$ et admet k racines distinctes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$: il s'agit du polynôme nul, et tous les a_k sont nuls.

La famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$ est libre et incluse dans $\operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$. Donc :

$$\operatorname{Vect}(I, f, f^2, \ldots, f^{p-1}) = \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$, f_i est combinaison linéaire des éléments de la famille $(Id, f, f^2, \ldots, f^{p-1})$, soit :

$$f_i = P_i(f) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j$$

Or si $x \in \operatorname{Im} f_i$:

$$\alpha_i x = f_i(x) = \sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} f^j(x) = \Big(\sum_{j=0}^{p-1} a_{i,j} \alpha_i^j\Big) x \text{ et } P_i(\alpha_i) = 1$$

et si $x \in \operatorname{Im} f_j$, avec $j \neq i$:

$$0 = f_i(x) = P_i(\alpha_j) x \text{ et } P_i(\alpha_j) = 0$$

Le polynôme P_i n'est autre que le polynôme interpolateur de Lagrange aux points $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, soit :

$$\boxed{P_i(X) = \frac{\prod\limits_{j \neq i} (X - \alpha_j)}{\prod\limits_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)}}$$

Exercice 29.

On définit les polynômes $(G_k)_{k\geqslant 0}$ par :

$$\begin{cases} G_0(X) = 1, G_1(X) = X \\ G_k(X) = \dfrac{X\,(X-1)\,(X-2)\dots(X-k+1)}{k!}, \text{ pour } \quad k \geqslant 2 \end{cases}$$

1. a) Établir, pour tout entier $k \geqslant 1$, la relation :

$$G_k(X+1) - G_k(X) = G_{k-1}(X)$$

b) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $G_k(p) \in \mathbb{Z}$.

2. a) Que dire de la famille $\big(G_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$?

b) Soit Q un polynôme quelconque de degré n. Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

i) pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $Q(p) \in \mathbb{Z}$

ii) il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que : $Q(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, G_k(X)$

(On pourra procéder par récurrence sur n et considérer le polynôme :
$P(X) = Q(X+1) - Q(X)$).

3. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k\, G_k(x)$$

soit nulle lorsque x est égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, \dots, n$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la suite ainsi associée à la fonction $x \mapsto f(x) = b^x$ est $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((b-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. a) On vérifie immédiatement que $G_1(X+1) - G_1(X) = G_0(X)$.
Si $k \geqslant 2$, alors :

$$\begin{aligned} G_k(X+1) - G_k(X) &= \frac{X(X-1)\cdots(X-k+2)}{k!}\big[(X+1)-(X-k+1)\big] \\ &= G_{k-1}(X) \end{aligned}$$

b) • si $p \geqslant k$, alors $G_k(p) = \mathrm{C}_p^k \in \mathbb{N}$.

• si $0 \leqslant p < k$, alors $G_k(p) = 0$.

• si $p < 0$, alors :

$$G_k(p) = (-1)^k \frac{(-p+k+1)\cdots(-p+1)(-p)}{k!} = (-1)^k \mathrm{C}^k_{-p+k+1} \in \mathbb{Z}$$

2. a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, G_k est un polynôme de degré k. Ainsi la famille $(G_0, G_1, \dots, G_n)$ est une famille formée de polynômes échelonnés en degrés, depuis 0 jusqu'à n, donc est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Il est évident que ii) $\Rightarrow$ i) par la question 1. b).

Démontrons l'implication contraire par récurrence sur le degré de Q :

$\star$ L'implication réciproque est vérifiée pour tout polynôme Q de degré 0 (polynôme constant).

$\star$ Supposons la réciproque montrée pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par la question 2.a), tout polynôme Q de degré n s'écrit sous la forme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k G_k(X)$, avec (a_k) réels. Soit alors :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} G_k(X)$$

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, qui vérifie, pour tout $p \in \mathbb{Z}$:

$$P(p) = Q(p+1) - Q(p) \in \mathbb{Z} \text{ (hypothèse sur } Q)$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à P donne alors : pour tout k élément de $\{0, \dots, n-1\}, a_{k+1} \in \mathbb{Z}$. Mais $a_0 = Q(0) \in \mathbb{Z}$ également et donc $Q(X)$ admet bien une décomposition de la forme annoncée.
On conclut par le principe de récurrence.

3. a) La condition demandée s'écrit sous forme d'un système triangulaire d'équations linéaires :

$$\begin{cases} f(0) = a_0 \\ f(1) = a_0 + a_1 \\ f(2) = a_0 + 2a_1 + a_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ f(n) = C_n^0 a_0 + \cdots C_n^k a_k + \cdots + C_n^n a_n \end{cases}$$

Ce système admet une unique solution (la matrice associée est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, donc sans terme diagonal nul), cette solution $(a_0, \dots, a_n)$ ne dépendant que de $(f(0), \dots, f(n))$.

b) Les réels a_n vérifient :

$$f(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k G_k(p) = \sum_{k=0}^{p} a_k C_p^k, \text{ pour } 0 \leqslant p \leqslant n$$

- pour $k = 0$, il vient $a_0 = f(0) = (b-1)^0$.
- supposons que pour tout k tel que $0 \leqslant k \leqslant m-1, a_k = (b-1)^k$. Alors :

$$b^m = f(m) = \sum_{k=0}^{m} a_k \mathrm{C}_m^k = \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{C}_m^k (b-1)^k + a_m$$

ce qui entraîne que $a_m = (b-1)^m$ par la formule du binôme de Newton. On conclut encore une fois par le principe de récurrence.

Exercice 30.

Soit a et b deux réels distincts.
On désire déterminer une solution de l'équation :

$$(E_n) \qquad (X-a)^n A_n + (X-b)^n B_n = 1$$

d'inconnues A_n et B_n dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $(n-1)$.

1. Montrer que si (E_n) admet un couple solution, celui-ci est unique.

2. On considère les ensembles :
$F = \{(X-a)^n P \ / \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$ et $G = \{(X-b)^n P \ / \ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$

a) Vérifier que F et G sont des espaces vectoriels dont on précisera la dimension.

b) Déterminer $F \cap G$. En déduire la dimension de $F + G$.

c) En déduire que (E_n) admet une solution unique.

3. a) Montrer qu'il existe un polynôme P_n dont on précisera le degré, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^x \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1} dt = (x-a)^n P_n(x)$$

b) Etablir l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (x-a)^n P_n(x) + (b-x)^n P_n(a+b-x) = (b-a)^n P_n(b).$$

c) Exprimer le couple solution de (E_n) en fonction du polynôme P_n.

Solution :

1. Supposons que (E_n) admette deux couples solutions (A_n, B_n) et (C_n, D_n) éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$(X-a)^n (A_n - C_n) = (X-b)^n (D_n - B_n)$$

Le réel a est alors racine d'ordre de multiplicité au moins n du polynôme $D_n - B_n$ ce qui entraîne que c'est le polynôme nul, puisqu'il est de degré inférieur ou égal à $(n-1)$. De même $A_n = C_n$.

2.a) On vérifie aisément que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Une base de F est :

$$(X-a)^n, X(X-a)^n, \ldots, X^{n-1}(X-a)^n$$

(c'est une famille libre et génératrice). Donc $\dim F = n$.
De même, une base de G est :

$$(X-b)^n, X(X-b)^n, \ldots, X^{n-1}(X-b)^n$$

et $\dim G = n$.

b) Soit $Q \in F \cap G$. Il existe deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que :

$$Q = (X-a)^n P_1(X) = (X-b)^n P_2(X)$$

Une démonstration identique à celle de la question 1. montre que $P_1 = P_2 = 0$, donc $Q = 0$.

On en déduit que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G = 2n$. Or $F \oplus G \subset \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. L'égalité des dimensions implique que :

$$F \oplus G = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$$

c) En particulier, $1 \in F+G$; on déduit des questions précédentes l'existence d'une solution de (E_n).

3. a) Posons $F(x) = \displaystyle\int_a^x \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\, dt$. F est une fonction dérivable et pour tout x réel :

$$F'(x) = (x-a)^{n-1}(x-b)^{n-1}$$

F est donc une fonction polynomiale dont la dérivée admet a comme racine d'ordre $(n-1)$. Mais comme $F(a) = 0$, on peut donc conclure que a est racine d'ordre n de F.

b) Le changement de variable affine $u = a + b - t$ donne :

$$\begin{aligned} F(b+a-x) &= \int_a^{b+a-x} \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\, dt = -\int_b^x \big((a-u)(b-u)\big)^{n-1}\, du \\ &= \int_x^b \big((a-u)(b-u)\big)^{n-1}\, du \end{aligned}$$

D'où :

$$F(x) + F(a+b-x) = \int_a^b \big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}\, dt = F(b)$$

ce qui se traduit par :

$$(x-a)^n P_n(x) + (b-x)^n P_n(a+b-x) = (b-a)^n P_n(b)$$

c) Comme $(t-a)(t-b) < 0$ pour $t \in [a,b]$, le signe de $\big((t-a)(t-b)\big)^{n-1}$ reste constant sur cet intervalle, ce qui entraîne que $F(b) \neq 0$ donc que $P_n(b) \neq 0$. En utilisant l'unicité de la solution de (E_n), l'équation précédente se traduit par :

$$(x-a)^n \frac{P_n(x)}{(b-a)^n P_n(b)} + (b-x)^n \frac{P_n(a+b-x)}{(b-a)^n P_n(b)} = 1$$

donc :

$$A_n = \frac{P_n(X)}{(b-a)^n P_n(b)} \text{ et } B_n = \frac{P_n(a+b-X)}{(a-b)^n P_n(b)}$$

Remarque : On a $(X-a)-(X-b) = b-a$, donc :

$$[(X-a)-(X-b)]^{2n-1} = (b-a)^{2n-1}$$

En développant par la formule du binôme on obtient une expression de la forme :

$$(X-A)^n \alpha_n(X) + (B-)b)^n \beta_n(X) = (b-a)^{2n-1}$$

où α_n et β_n sont des polynômes de degrés adéquats, il suffit alors de diviser par $(b-a)^{2n-1}$ pour obtenir une autre expression de A_n et B_n.