1

ANALYSE

Exercice 1.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$ est convergente.

On pose alors, pour tout $x \in D$: $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt$

2. a) Montrer que pour tout $x \in D$: $\varphi(x) + \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x}$

b) Montrer que pour tout $x \in D$: $\dfrac{1}{2x} \leq \varphi(x) \leq \dfrac{1}{x}$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

c) Soit ψ une application définie sur D et qui vérifie :

- pour tout $x \in D$: $\psi(x) + \psi(x+1) = \dfrac{1}{x}$,
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \psi(x) = 0$.

On pose $d = \varphi - \psi$.
Montrer que d est 2–périodique. En déduire que d est identiquement nulle sur D.

3. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\varphi\big(k + \frac{1}{2}\big) + \varphi\big(k - \frac{1}{2}\big)$

En posant $u_k = (-1)^k \varphi\big(k + \frac{1}{2}\big)$ et en utilisant $u_k - u_{k-1}$, exprimer $\varphi\big(n + \dfrac{1}{2}\big)$, puis $\varphi(n+1)$ en fonction de n.

4. En déduire que les séries $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ et $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ sont convergentes et calculer leurs sommes respectives.

Solution :

1. Au voisinage de 0, $\dfrac{t^{x-1}}{1+t}$ est équivalente à $\dfrac{1}{t^{1-x}}$. L'intégrale converge donc sur $[0,1]$ si et seulement si $x>0$. Ainsi la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. a) Pour tout $x>0$:

$$\varphi(x)+\varphi(x+1)=\int_0^1 \frac{t^x+t^{x-1}}{1+t}dt=\int_0^1 t^{x-1}dt=\frac{1}{x}$$

b) Pour $t\in[0,1]$, $1\leqslant 1+t\leqslant 2$ donne :

$$\frac{1}{2x}\leqslant\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt\leqslant\frac{1}{x}$$

On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0}$

c) La fonction φ vérifie les mêmes conditions que la fonction ψ. Si $d=\varphi-\psi$, il vient, pour tout $x>0$, $d(x+1)+d(x)=0$, donc $d(x+2)-d(x)=0$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d(x+2n)-d(x)=0$. La fonction d tendant vers 0 en l'infini, il reste à prendre la limite lorsque n tend vers l'infini pour conclure que pour tout $x>0, d(x)=0$.

3. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi\big(k+\frac{1}{2}\big)+\varphi\big(k-\frac{1}{2}\big)=\dfrac{2}{2k-1}$

Ainsi pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$u_k-u_{k-1}=\frac{2(-1)^k}{2k-1},\ \text{et } u_n-u_0=\sum_{k=1}^n(u_k-u_{k-1})=2\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{2k-1}$$

Or, par le changement de variable $t=u-2$, puis $u=\tan v$:

$$u_0=\varphi\big(\tfrac{1}{2}\big)=\int_0^1\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}=2\int_0^1\frac{du}{1+u^2}=\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\varphi\big(n+\tfrac{1}{2}\big)=2(-1)^n\big[\tfrac{\pi}{4}-\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\big]}$$

De même pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(k+1)+\varphi(k)=\dfrac{1}{k}$. On pose alors : $v_k=(-1)^k\varphi(k)$ et un calcul analogue au calcul précédent donne :

$$v_n-v_1=\sum_{k=2}^n(v_k-v_{k-1})=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^k}{k}$$

Or : $v_1=\varphi(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$

ce qui donne : $\boxed{\varphi(n+1)=(-1)^n\big[\ln 2-\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}\big]}$

4. On déduit de la question 2. b que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ sont convergentes et que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2}$$

Exercice 2.

On considère une suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ de réels strictement positifs et deux nombres réels u_0 et v_0. On définit les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par récurrence en posant pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} u_n = u_{n-1} + \alpha_n v_{n-1} \\ v_n = v_{n-1} - \alpha_n u_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n^2 + v_n^2 = (u_0^2 + v_0^2) \prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k^2)$$

2. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont de même nature (c'est-à-dire que l'une converge si et seulement si l'autre converge).

b) En déduire que si $(u_0, v_0) \neq (0,0)$, alors ces deux suites divergent.

3. Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n réels positifs. Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \leq \mathrm{e}^{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

4. On suppose dans cette question que la série $\sum \alpha_n^2$ converge.

a) Montrer que la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_n^2 + v_n^2$ est bornée.

b) En déduire que la suite (w_n) est convergente.

5. On suppose dans cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}, \alpha_n = 2^{-n}$

a) Pour $n \geqslant 1$, exprimer u_n en fonction de $u_0, v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$.

b) Pour $n \geqslant 1$, exprimer v_n en fonction de $v_0, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$.

c) On suppose que $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

Solution :

1. Avec les relations de récurrence, il vient :

$$\begin{cases} u_k^2 = u_{k-1}^2 + \alpha_k^2 v_{k-1}^2 + 2\alpha_k u_{k-1} v_{k-1} \\ v_k^2 = v_{k-1}^2 + \alpha_k^2 u_{k-1}^2 - 2\alpha_k u_{k-1} v_{k-1} \end{cases}$$

D'où l'on tire : $u_k^2 + v_k^2 = (1 + \alpha_k^2)(u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2)$
et par suite on a bien :

$$\boxed{u_n^2 + v_n^2 = (1 + \alpha_n^2) \ldots (1 + \alpha_1^2)(u_0^2 + v_0^2)}$$

Remarque : On peut aussi poser $z_n = u_n + iv_n$ et exprimer z_k en fonction de z_{k-1}, la formule proposée traduit alors en fait une égalité de modules...

2. a) Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.
Comme on a $v_n = \dfrac{1}{\alpha}(u_n - u_{n-1})$, on en déduit que la suite (v_n) converge vers 0, la relation $v_n = v_{n-1} - \alpha u_{n-1}$ implique alors que $\ell = 0$. Les deux suites convergent vers 0.
On montrerait la même chose en supposant au départ que la suite (v_n) converge.

b) Supposons $(u_0, v_0) \neq (0,0)$ et que l'une des suites converge, alors les deux suites convergent vers 0 et $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n^2 + v_n^2) = 0$.
Or $u_n^2 + v_n^2 = (1+\alpha^2)^n(u_0^2 + v_0^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et la contradiction est claire.
Les deux suites sont donc divergentes.

3. On sait que pour $x > -1, \ln(1+x) \leqslant x$, soit $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. On obtient l'inégalité demandée par simple multiplication.

4. a) On a $(1+\alpha_n^2)\dots(1+\alpha_1^2) \leqslant \mathrm{e}^{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2} \leqslant \mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2} = A$.
On déduit alors de la question 1. : $u_n^2 + v_n^2 \leqslant A(u_0^2 + v_0^2)$, la suite $(w_n) = (u_n^2 + v_n^2)$ est donc majorée.

b) Le résultat de la question 1. montre également que la suite $(u_n^2 + v_n^2)$ est croissante, elle est donc convergente.

5. a) Comme $u_k - u_{k-1} = \alpha_k v_{k-1}$, on en déduit :
$$u_n = u_0 + v_0 + \frac{1}{2}v_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}v_{n-1}$$

b) Comme $v_k - v_{k-1} = -\alpha_k u_{k-1}$, on en déduit :
$$v_n = v_0 - \big(u_0 + \frac{1}{2}u_1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}u_{n-1}\big)$$

c) On a $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$. La série de terme général α_k^2 étant ici convergente, on sait que la suite $(u_n^2 + v_n^2)$ est bornée. Les suites $(|u_n])$ et $(|v_n|)$ sont donc bornées et les séries de termes généraux respectifs $\dfrac{1}{2^n}u_n$ et $\dfrac{1}{2^n}v_n$ sont absolument convergentes, donc convergentes.
Des résultats a) et b) on déduit alors la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 3.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour toute fonction $f \in E$, on définit une nouvelle fonction $\Phi[f]$ par, pour tout $x \in [0,1]$:
$$\Phi[f](x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

1. Justifier que $\Phi[f] \in E$.

2. a) On note $\Phi^0 = Id$ et pour tout n entier tel que $n \geqslant 1, \Phi^n = \Phi \circ \Phi^{n-1}$.
Calculer $\big(\Phi^n[f]\big)^{(p)}(0)$ (dérivée d'ordre p en 0 de $\Phi^n[f]$), pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

b) En déduire une expression de $\Phi^n[f]$ à l'aide d'une seule intégrale.

3. Soit $f \in E$ et $x \in [0,1]$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \Phi^n[f](x)$ converge.

4. Montrer que, pour toute fonction $f \in E$, il existe une unique fonction $g \in E$ telle que :

$$g - \Phi[g] = f$$

Solution :

1. $\Phi[f]$ n'est autre que la primitive de f qui s'annule en 0 (car f est continue). Elle est donc dérivable sur $[0,1]$ et *a fortiori* continue. Ainsi $\Phi[f] \in E$, pour tout $f \in E$.

2. a) La fonction $\Phi[f]$ est caractérisée par : $(\Phi[f])' = f$ et $\Phi[f](0) = 0$, donc :

$$\begin{cases} \Phi[f](0) = 0 \\ (\Phi[f])'(0) = f(0) \end{cases}$$

Supposons que pour un certain $k \geqslant 0$, $\Phi^k[f]$ soit caractérisée par :

$$\begin{cases} \Phi^k[f](0) = 0 \\ (\Phi^k[f])' = \Phi^{k-1}[f] \end{cases}$$

Alors $\Phi^{k+1}[f](x) = \displaystyle\int_0^x \Phi^k[f](t)\,dt$ vérifie :

$$\begin{cases} \Phi^{k+1}[f](0) = 0 \\ (\Phi^{k+1}[f])' = \Phi^k[f] \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier $p \geqslant 0$:

$$(\Phi^k[f])^{(p)} = (\Phi^{k-1}[f])^{(p-1)} = \cdots = \begin{cases} 0 & \text{si } p < k \\ f(0) & \text{si } p = k \end{cases}$$

b) La formule de Taylor avec reste intégral nous donne, pour tout entier naturel n, et tout $x \in [0,1]$:

$$\Phi^n[f](x) = \sum_{p=0}^{n-1} (\Phi^n[f])^{(p)}(0)\frac{x^p}{p!} + \int_0^x (\Phi^n[f])^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

ou, pour $n \geqslant 1$:

$$\Phi^n[f](x) = \int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt$$

3. Pour tout $x \in [0,1]$:

$$|\Phi^n[f](x)| \leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt \leqslant \frac{1}{n!}\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$$

qui est le terme général d'une série convergente. Les théorèmes de comparaison des séries à terme positifs permettent de conclure à la convergence de la série $\sum \Phi^n[f](x)$.

4. Procédons par analyse/synthèse. Supposons que g soit solution de l'équation $g - \Phi[g] = f$. Alors pour tout $k \geqslant 0$, $\Phi^k[g] - \Phi^{k+1}[g] = \Phi^k[f]$.

Sommons ces relations pour k dans $\{0,1,\dots,n\}$. Il vient, par télescopage :

$$g - \Phi^{n+1}[g] = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k[f]$$

Par la question précédente, pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^{n+1}[g](x) = 0$. Donc, si g existe, alors $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi^k[f]$.

Posons alors $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi^k[f]$. La fonction g existe d'après la question 3.

Montrons que g vérifie l'équation $g - \Phi[g] = f$. À cet effet, notons, pour $n \geqslant 0$, $g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \Phi^k[f]$. On sait que pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = g(x)$ et que :

$$g_n - \Phi[g_n] = \Phi^0[f] - \Phi^{n+1}[f] = f - \Phi^{n+1}[f]$$

On conclut par le fait que pour tout $x \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi^{n+1}[f](x) = 0$.

Montrons enfin la continuité de g sur $[0,1]$. Notons $M = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Soit $x \in [0,1]$, $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in [0,1]$. Alors :

$$|g(x+h) - g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^{x+h} \frac{(x+h-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt - \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt \right| + |f(x+h) - f(x)|$$

$$|g(x+h) - g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(n-1)!} \left(\int_0^x ((x+h-t)^{n-1} - (x-t)^{n-1})\,dt \right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{(n-1)!} \left(\int_x^{x+h} (x+h-t)^{n-1}\,dt \right) + |f(x+h) - f(x)|$$

$$\begin{aligned} |g(x+h) - g(x)| &\leqslant |f(x+h) - f(x)| + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M}{n!} \left[(-h^n + (x+h)^n - x^n) + h^n \right] \\ &\leqslant |f(x+h) - f(x)| + M \left[\mathrm{e}^{-h} - 1 + \mathrm{e}^{x+h} - \mathrm{e}^x + h(\mathrm{e}^h - 1) \right] \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque h tend vers 0 par continuité de f et de la fonction exponentielle.

Ainsi $g = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Phi^k[f]$ est l'unique solution de l'équation proposée.

Exercice 4.

Soit F la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x\,t}}{\sqrt{1+t^2}} dt$

1. Déterminer le domaine de définition D de la fonction F.

2. Étudier le sens de variation de la fonction F.

3. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

4. a) Justifier, pour $x \in D$, la convergence des intégrales :

$$G(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,du \quad \text{et} \quad I=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-u}-1}{u}\,du$$

Montrer que $G(x) = -\ln x + G(1) + I + o(1)$, en déduire que $G(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b) Justifier la convergence de l'intégrale :

$$H(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t+1}dt$$

et déduire du a) que $H(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Calculer la dérivée de la fonction $g(t)=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$ et en déduire la valeur de l'intégrale :

$$J=\int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t}\Big)dt$$

d) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

Solution :

1. La fonction $f_x : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

Au voisinage de $+\infty$, $f_x(t) \sim g_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}$.

- si $x < 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} tg_x(t) = +\infty$, ce qui entraîne que l'intégrale n'existe pas.
- si $x = 0$, $f_x(t) \sim \dfrac{1}{t}$, ce qui entraîne que l'intégrale n'existe pas.
- si $x > 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g_x(t) = 0$, ce qui entraîne l'existence de l'intégrale.

Le domaine de définition D de F est donc $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction F est strictement décroissante sur D, puisque si $0 < x < y$, alors, pour tout $t > 0$: $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}} > \dfrac{\mathrm{e}^{-yt}}{\sqrt{1+t^2}}$ et la continuité des fonctions à intégrer permet de conclure à l'inégalité **stricte** pour les intégrales : $F(x) > F(y)$

3. On a : $0 \leqslant F(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0}$$

4. a) Comme $x > 0$, $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle. De plus $\lim\limits_{u\to+\infty} u^2\,\dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{u} = 0$ entraîne l'existence de $G(x)$, pour tout $x \in D$.

La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ est continue sur l'intervalle $]0,1]$ et admet un prolongement par continuité en 0 par 1 (faire un DL). Le réel I existe donc.
Calculons $G(x)+\ln x - G(1) - I$. Par la relation de Chasles et $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$, il vient :

$$G(x)+\ln x - G(1) - I = -\int_0^x \frac{e^{-u}-1}{u}\,du$$

La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ étant continue sur $[0,1]$, elle y est majorée par une constante $M>0$, et :

$$|G(x)+\ln x - G(1) - I| \leqslant Mx = o(1)$$

On a donc $G(x)+\ln x = C + o(1) = O(1) = o(\ln x)$ au voisinage de 0^+.

b) La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus , $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\,\frac{e^{-xt}}{t+1} = 0$, pour tout $x \in D$. D'où l'existence de H sur D.
Effectuons le changement de variable affine $u = t+1$. Il vient :

$$H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x(u-1)}}{u}\,du = e^x G(x)$$

On conclut en remarquant que $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x = 1$.

c) Un calcul immédiat donne : $g'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, d'où :

$$J = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t}\Big)\,dt = \Big[\ln\Big(\frac{t+\sqrt{1+t^2}}{1+t}\Big)\Big]_0^{+\infty} = \ln 2$$

d) Remarquons que :

$$|F(x)-H(x)| = \Big|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t}\Big)\,dt\Big| \leqslant J = \ln 2$$

Donc $F(x)+\ln x = o(\ln x)$, *i.e.* :

$$\boxed{F(x) \underset{(0^+)}{\sim} -\ln x}$$

Exercice 5.

On pose pour tout couple (x,y) de réels strictement positifs :

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(x.e^t+1)(y.e^t+1)}.$$

1. a) Vérifier la convergence de l'intégrale ci-dessus.

b) Pour $x>0$, calculer $f(x,x)$.

2. Soient x et y deux réels strictement positifs distincts.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a,b) tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on ait :

$$\frac{1}{(x.e^t+1)(y.e^t+1)} = \frac{a}{x.e^t+1} + \frac{b}{y.e^t+1}.$$

On exprimera a et b en fonction de x et y.

b) En déduire la valeur de $f(x,y)$.

3. Etudier l'existence de dérivées partielles pour f.
La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition ?

Solution :

1. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\star$ Au voisinage de $+\infty$, $g(t) \sim \dfrac{e^{-t}}{xy}$, fonction dont l'intégrale converge.

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, $g(t) \sim e^t$, fonction dont l'intégrale converge également.

Les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives permettent de conclure : $f(x,y)$ est bien défini pour $x > 0$ et $y > 0$.

b) Comme $x > 0$, on peut écrire :

$$f(x,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(xe^t+1)^2} = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^t\,dt}{(xe^t+1)^2}$$

Une primitive de $t \mapsto \dfrac{xe^t}{(xe^t+1)^2}$ est $t \mapsto \dfrac{-1}{xe^t+1}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{f(x,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t\,dt}{(xe^t+1)^2} = \frac{1}{x}}$$

2. a) En réduisant au même dénominateur, on obtient :
$1 = (ay+bx)e^t+(a+b) = 1$. Les fonctions $(t \mapsto 1, t \mapsto e^t)$ étant indépendantes, ceci est équivalent à :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ay+bx=0 \end{cases}$$

D'où :

$$a = \frac{x}{x-y}, \qquad b = \frac{y}{y-x}$$

b) Une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^t}{xe^t+1}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(xe^t+1)$. Ceci permet de calculer $f(x,y)$. Pour tout $x \neq y$, on obtient :

$f(x,y) = \dfrac{1}{x-y} \lim\limits_{A\to+\infty, B\to-\infty} \left[\ln\left(\dfrac{x.e^t+1}{y.e^t+1}\right)\right]_B^A = \dfrac{1}{x-y}(\ln\dfrac{x}{y} - \ln 1)$. Soit :

$$\boxed{x \neq y \implies f(x,y) = \frac{\ln x - \ln y}{x-y}}$$

3. Pour tout $x \neq y$, on a immédiatement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\frac{1}{x}(x-y) - \ln x + \ln y}{(x-y)^2}, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\frac{1}{y}(y-x) - \ln y + \ln x}{(x-y)^2}$$

En (a,a), on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,a) - f(a,a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a - \frac{h}{a}}{h^2}$$

Or un développement limité de $\ln(a+h) = \ln a + \ln(1 + \dfrac{h}{a})$ au voisinage de 0 donne :

$$\ln(a+h) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + o(h^2)$$

D'où :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,a) = -\frac{1}{2a^2}$$

Par un calcul identique, ou par symétrie des rôles de x et y, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,a) = -\frac{1}{2a^2}$$

Ainsi f admet des dérivées partielles en tout point de son domaine.

$\star$ On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D si et seulement si les dérivées partielles $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont continues sur D.

Il est évident qu'en tout point (x,y) avec $x > 0, y > 0, x \neq y$, ces fonctions sont continues comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour $x \neq y$, on a :

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{x}(y-x) - \frac{1}{2x^2}(y-x)^2 + o((y-x)^2)$$

Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2x^2} + o(1)$$

Ainsi, lorsque (x,y) tend vers (a,a) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to -\frac{1}{2a^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,a)$$

Le calcul est identique pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Ceci nous assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f : x \longmapsto \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right)$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0. On note g ce prolongement.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\geqslant 0}$, à coefficients entiers et dont on précisera les degrés, telle que pour tout entier naturel n et tout réel strictement positif x on ait :

$$g^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{x}\big)g(x).$$

4. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. On définit le type `poly=ARRAY[0..20]OF INTEGER ;`

On désire faire calculer à l'ordinateur le polynôme P_{10}.

a) Soit A une variable de type `poly`. Ecrire une procédure permettant de modifier les coefficients de A, de sorte que s'il y a au départ dans A les coefficients de P_n, ceux-ci soient remplacés par ceux de P_{n+1}.

b) A l'aide de cette procédure, écrire un programme permettant de calculer et d'afficher les coefficients de P_{10}.

Solution :

1. On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. On pose donc $g(0) = 0$.

2. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et :

$\star$ pour $x > 0, g'(x) = \dfrac{1}{x^2}\exp(-1/x)$

$\star$ pour $x < 0, g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\exp(1/x)$

On a alors (limite classique) $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$ et g étant continue en 0, par théorème, g est de classe $\mathcal{C}^1$ en 0, avec $g'(0) = 0$.
Finalement g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons, par récurrence sur n, l'existence de P_n, à coefficients entiers, avec $\deg P_n = 2n$:

$\star$ Comme $g^{(0)}(x) = g(x)$, la propriété est vraie au rang 0, avec $P_0 = 1$.

$\star$ Supposons le résultat acquis pour un certain rang n. Alors :

$$\forall\, x > 0, g^{(n)}(x) = P_n\big(\frac{1}{x}\big)g(x)$$

On en déduit :

$$\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = -\frac{1}{x^2}P'_n\big(\frac{1}{x}\big)g(x) + P_n(x)g'(x)$$

i.e. :

$$\forall\, x > 0, g^{(n+1)}(x) = \big[-\frac{1}{x^2}P'_n\big(\frac{1}{x}\big) + P_n(x)\frac{1}{x^2}\big]g(x)$$

Ce qui donne le résultat au rang $n+1$, avec $P_{n+1}(x) = x^2\big(P_n(x) - P'_n(x)\big)$ et P_{n+1} est de degré $2n+2 = 2(n+1)$ et est bien à coefficients entiers.

On conclut donc par le principe de récurrence.

4. Par limites classiques, on a pour tout entier n, $\lim\limits_{x\to 0^+} g^{(n)}(x) = 0$.

On procède de même sur $\mathbb{R}^-$, ou, mieux, on invoque la parité de g qui montre que $g^{(n)}$ a même parité que n.
Par conséquent $\lim\limits_{x\to 0} g^{(n)}(x) = 0$ et par itération du théorème précédent, on en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout n, $g^{(n)}(0) = 0$.

5. a) et b)

```
Program ESCP06 ;
Uses Crt ;
Type poly=Array[0..20] of Longint ; Var P :poly ; i,k : Integer ;
Procedure rangsuivant (Var A :poly) ;
  Var i : Integer ; B :poly ;
  Begin
    B[0] :=0 ; B[1] :=0
  For i :=0 to 18 do B[i+2] :=A[i]-(i+1)*A[i+1] ;
  For i :=0 to 20 do A[i] :=B[i] ;
  End ;
Begin
  For k :=0 to 20 do P[k] :=0 ;
  P[0] :=1
  For k :=1 to 10 do rangsuivant(P) ;
  For i :=0 to 20 do write(P[i], ' ') ;
End.
```

Exercice 7.

1. a) Montrer que si x est un réel de $]-1,1[$ et n un entier naturel non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$$

b) En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n}$ est convergente et que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

c) Soit $y \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}[$. On pose $u = \dfrac{y-1}{y+1}$. Montrer que :

$$\ln(y) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}$$

d) Compléter, en langage `Pascal`, l'écriture de la fonction :

`FUNCTION Serie(y : REAL) : REAL ;`

qui rend comme résultat : $2\sum\limits_{n=0}^{6} \dfrac{u^{2n+1}}{2n+1}$ où $u = \dfrac{y-1}{y+1}$.

2. a) Montrer que tout réel strictement positif x s'écrit de façon unique sous la forme :

$$x = 2^k \times \sqrt{2} \times y$$
avec k entier relatif et $y \in [\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}[$.

b) Dans un programme en `Pascal`, on a déclaré deux constantes `R2` et `L2` contenant des valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $\ln 2$. Dans les sous-programmes à compléter ci–dessous, il est demandé de n'utiliser que les quatre opérations de base $(+, -, \times, /)$.

i) Compléter l'écriture de la procédure :

```
PROCEDURE Decompose(x : REAL ; VAR k : INTEGER ; VAR y : REAL) ;
```

qui pour $x > 0$ détermine k et y définis en a).

ii) Compléter l'écriture de la fonction :

```
FUNCTION LnApprox(x : REAL) : REAL ;
```

qui, pour $x > 0$ renvoie comme résultat une valeur approchée de $\ln x$ obtenue à partir de l'écriture de x vue en a) et utilisant `Decompose` et `Serie`.

Solution :

1. a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1}\,dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$

Comme $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$, on a le résultat souhaité.

b) Pour tout t compris entre 0 et x, on a $\left|\frac{t^n}{1-t}\right| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|}$, d'où
$$\left|\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
On a donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln(1-x)}$

c) L'application f définie sur $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ par $f(y) = \frac{y-1}{y+1} = 1 - \frac{2}{y+1}$ est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de son domaine de définition sur $[f(1/\sqrt{2}), f(\sqrt{2})] = [-(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}+1)^2[$.
De plus f^{-1} est définie sur ce domaine par $f^{-1}(u) = \frac{1+u}{1-u}$.
Donc si $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ et $u = f(y)$, on a $u \in [-(\sqrt{2}-1)^2, (\sqrt{2}+1)^2[\subset]-1, 1[$ et donc :
$$\ln y = \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \ln(1+u) - \ln(1-u)$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{u^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^{k-1}+1)u^k}{k}$$
Soit

$$\boxed{\ln y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2.u^{2n+1}}{2n+1}}$$

d) On utilise l'algorithme de Horner.

```
Function Serie(y :real) : real ;
Const n=6 ; Var u,u2,aux : real ; i : integer ;
Begin
  u := (y-1)/(y+1) ; u2 := Sqr(u) ; aux := 1/(2*n+1) ;
  For i := (n-1) Doxnto 0 do aux := aux*u2+1/(2*i+1) ;
  Serie := aux*2*u ;
End ;
```

Remarque : on peut montrer que sur le domaine considéré, l'erreur commise en remplaçant $\ln y$ par `Serie(y)` est majorée par 5.10^{-13}.

2. a) *Analyse* : si $x = 2^k\sqrt{2}.y$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, alors $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$ et donc nécessairement $k = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$ et $y = \dfrac{x}{2^k\sqrt{2}}$.

Synthèse : soit $x > 0$, posons $k = \lfloor \frac{\ln x}{\ln 2} \rfloor$ et $y = \dfrac{x}{2^k\sqrt{2}}$, alors on a : $k \in \mathbb{Z}$ et $2^k \leqslant x < 2^{k+1}$, donc $y \in [1/\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Ce qui donne l'existence et l'unicité cherchées.

b) i) On encadre, par essais successifs, x entre deux puissances successives de 2 : il y a deux cas à envisager selon la position de x par rapport à 1.

```
Procedure Decompose(x : Real ; Var k : Integer ; Var y : Real) ;
Var z : Real ;
Begin
  If x>=1
    Then Begin
    k := 0 ; z := x ;
    While(z>=2) Do Begin z :=z/2 ; k := k+1 End ;
    End
  Else
    Begin
    k :=-1 ; z := 2*x ;
    While (z<1) Do Begin z :=z*2 ; k := k-1 End ;
    End
  y :=z/R2 ;
End ;
```

ii)
```
  Function Lnapprox(x :Real) :Real ;
Var k : Integer ; y : Real ;
Begin
  Decompose(x,k,y) ;
  Lnapprox := (k+1/2)*L2+serie(y) ;
```

```
End ;
```

Exercice 8.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = u_1 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que tous ses termes sont supérieurs ou égaux à $\dfrac{3}{2}$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire quant à sa limite éventuelle ?

3. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{5}{3}$.

4. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_n \geqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $n \in [\![2, +\infty[\![$:
$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{3}} + 1}.$$

5. Déduire des résultats précédents que, quand n tend vers $+\infty$, $u_n = \mathcal{O}(n)$, $n = \mathcal{O}(u_n)$ et $u_{n+1} \sim u_n$.

Solution :

1. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante : « n appartient au domaine de définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $u_n \geqslant 3/2$ »

$\star$ $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées par définition.

$\star$ Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1} \implies \mathcal{P}_{n+2}$. En effet, par hypothèse, u_n et u_{n+1} sont positifs ; l'image de $n+2$ par la suite u est donc définie et :
$$u_{n+2} = 1 + \sqrt{u_{n+1}u_n} \geqslant 1 + \frac{3}{2} \geqslant \frac{3}{2}$$
On conclut, par le principe de récurrence, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{3}{2}$.

2. Montrons le résultat demandé par récurrence sur n.

• $u_0 = u_1 = 3/2$ et $u_2 = 5/2 \geqslant u_1$.

• $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_{n-1}}) \geqslant 0$, en utilisant l'hypothèse de récurrence $u_{n-1} \geqslant u_n \geqslant u_{n+1}$, on en déduit $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.
On conclut que la suite (u_n) est croissante.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Alors $\ell \geqslant 3/2$. La suite $(u_nu_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle, vers ℓ^2, et par continuité de la fonction racine, la suite $(\sqrt{u_nu_{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\ell| = \ell$. On en déduit que $\ell = 1 + \ell$, ce qui est absurde.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, mais comme elle est croissante, elle tend vers l'infini.

3. a) Pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} - u_n = 1 - u_n + \sqrt{u_n u_{n-1}} = 1 - \sqrt{u_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-1}}) \leqslant 1$$

par croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la fonction racine carrée.
D'autre part $u_1 - u_0 = 0 < 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 1$.

b) On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1+u_n}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n} \leqslant 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

4. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} - u_n = 1 - u_n + \sqrt{u_{n+1}u_n} = 1 + \sqrt{u_n}(\sqrt{u_{n+1}} - \sqrt{u_n}) \geqslant 1$$

pour les mêmes raisons que précédemment.

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_{n-1}}(\sqrt{u_n} - \sqrt{u_{n-2}}) = \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}}(u_n - u_{n-2})$$

Donc :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant \frac{\sqrt{u_{n-1}}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}}} + \sqrt{\frac{u_{n-2}}{u_{n-1}}}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{5/3} + 1}$$

puisque $\dfrac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \dfrac{5}{3}$, et $\dfrac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \leqslant 1$.

5. $\star$ En sommant terme à terme les inégalités $u_{k+1} - u_k \leqslant 1$, pour tout k de $\{0, 1, \dots, n-1\}$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant u_0 + n$. Ce qui entraîne que $u_n = \mathcal{O}(n)$, pour n tendant vers l'infini.

$\star$ $u_{n+1} - u_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{5/3}+1}$ donne pour $n \geqslant 2$, $u_n \geqslant u_2 + (n-2)\dfrac{1}{\sqrt{5/3}+1}$ et donc $n = \mathcal{O}(u_n)$ pour n tendant vers l'infini.

$\star$ Par les questions 1., 2., 3. a), on obtient $1 \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{u_n}$, ce qui entraîne que $u_{n+1} \sim u_n$, pour n tendant vers l'infini.

Exercice 9.

1. Soit $f : [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

a) Montrer que f est positive et tend vers 0 en $+\infty$.

b) Montrer que, pour tout réel $h > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$h\sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=0}^{N-1} f(nh).$$

c) En déduire que, pour tout réel $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$ converge et que :

$$-hf(0) + h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

d) Montrer que, quand h tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \sim \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

2. a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} t^{n^2}$ converge pour tout réel $t \in \,]-1,1[$.

b) Montrer que, quand t tend vers 1 par valeurs inférieures, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

Solution :

1. a) $\star$ Supposons qu'il existe a tel que $f(a) < 0$, alors $\forall\, t \geqslant a, f(t) \leqslant f(a)$ et donc : $\forall\, x \geqslant a, \int_a^x f(t)\,dt \leqslant \int_a^x f(a)\,dt = (x-a)f(a) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

$\star$ Ainsi f est décroissante et positive, donc admet une limite $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$. Supposons que $\ell > 0$, alors $\int_0^x f(t)\,dt \geqslant \int_0^x \ell\,dt = \ell x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui contredit à nouveau la convergence de l'intégrale. Bref :

$$\boxed{f \text{ est positive de limite nulle en } +\infty}$$

b) Par décroissance de f :

$$hf\big((n+1)h\big) \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,dt \leqslant hf(nh)$$

En sommant, il vient bien :

$$\boxed{h\sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \int_0^{Nh} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=0}^{N-1} f(nh)}$$

c) Soit $I = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$. Comme $f \geqslant 0$, $\int_0^{Nh} f(t)\,dt \leqslant I$, donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} f(nh) \leqslant \frac{I}{h}}$$

La série de terme général $f(nh)$ étant à termes positifs, elle converge. Par passage à la limite dans l'encadrement précédent, il vient :

$$-hf(0) + h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant h\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$$

d) Ainsi $I \leqslant h \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh) \leqslant I + f(0)h$ et, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{h\to 0^+} h \sum_{n=0}^{\infty} f(nh) = I}$$

Si $f \neq 0$, on a $I > 0$ et : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh) \underset{(h\to 0^+)}{\sim} \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Le résultat reste banalement vrai si f est la fonction nulle !

2. a) Soit $t \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|t^{n^2}| \leqslant |t|^n$, donc la série de terme général t^{n^2} est (absolument) convergente.

b) On écrit alors, pour $t \in]0,1[$: $t^{n^2} = \mathrm{e}^{n^2 \ln t} = \mathrm{e}^{-(n\sqrt{-\ln t})^2}$.

Or la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, d'intégrale convergente, avec $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Lorsque t tend vers 1 par valeurs inférieures, $-\ln t$ tend vers 0 par valeurs supérieures. On peut donc appliquer ce qui précède et :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} t^{n^2} \sim \frac{1}{\sqrt{-\ln t}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-t}}}$$

Exercice 10.

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

On considère une fonction continue $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ dont on suppose que :

(i) : $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge ou (i') : $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$ existe et est réelle (on la note alors ℓ),

et que :

(ii) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,dt$ converge ou (ii') : $\lim\limits_{t\to +\infty} f(t)$ existe et est réelle (on la note alors L).

1. a) Montrer que, pour tous réels x et y vérifiant $0 < x < y$,

$$\int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du$$

b) Montrer que, si (i) est vraie, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du = 0$,

et que, si (i') est vraie, alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(u) - \ell}{u}\,du = 0$.

c) Montrer que, si (ii) est vraie, alors $\displaystyle\lim_{y\to +\infty} \int_{ay}^{by} \frac{f(u)}{u}\,du = 0$, et que, si (ii') est vraie, alors $\lim\limits_{y\to+\infty}\displaystyle\int_{ay}^{by}\frac{f(u)-L}{u}\,du=0.$

d) Déduire des résultats précédents que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt$ converge et déterminer dans chaque cas sa valeur.

2. Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt$?

Solution :

1. a) $\displaystyle\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_x^y\frac{f(at)}{t}\,dt-\int_x^y\frac{f(bt)}{t}\,dt$

A l'aide de changements de variable linéaires :

$\displaystyle\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_{ax}^{ay}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du$

puis, par la relation de Chasles :

$$\int_x^y\frac{f(at)-f(bt)}{t}\,dt=\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du$$

b) $\star$ Si i) est vraie , alors $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)}{u}\,du=\int_{ax}^{1}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{bx}^{1}\frac{f(u)}{u}\,du$, et en faisant tendre x vers 0 les deux termes ont la même limite, donc la différence a pour limite 0.

$\star$ Si i') est vraie, alors :

$$\begin{aligned}\left|\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,du\right| &\leqslant \int_{ax}^{bx}\frac{|f(u)-\ell|}{u}\,du\leqslant\max_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|\int_{ax}^{bx}\frac{du}{u}\\ &\leqslant\max_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|\ln\frac{b}{a}\end{aligned}$$

Or, comme f est continue, $\max\limits_{[ax,bx]}|f(u)-\ell|$ est un nombre de la forme $|f(c_x)-\ell|$, avec $c_x\in[ax,bx]$, nombre qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Il en est donc de même de $|f(c_x)-\ell|$ et, par conséquent :

$$\lim_{x\to0^+}\int_{ax}^{bx}\frac{f(u)-\ell}{u}\,du=0$$

c) $\star$ De la même façon, si ii) est vraie, on peut écrire :

$\displaystyle\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du=\int_{ay}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,du-\int_{by}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,du$ et ces deux intégrales étant de limite nulle lorsque y tend vers $+\infty$ (restes d'intégrales convergentes), il vient :

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{ay}^{by}\frac{f(u)}{u}\,du=0$$

⋆ Si ii') est vraie, alors :

$$\Big|\int_{ay}^{by}\frac{f(u)-L}{u}\,du\Big| \leqslant \int_{ay}^{by}\frac{|f(u)-L|}{u}\,du \leqslant \max_{[ay,by]}|f(u)-L|\int_{ay}^{by}\frac{du}{u}$$
$$\leqslant \max_{[ay,by]}|f(u)-L|\ln\frac{b}{a}$$

Or, comme f est continue, $\max\limits_{[ay,by]}|f(u)-L|$ est un nombre de la forme $|f(c_y)-L|$, avec $c_y\in[ay,by]$, nombre qui tend vers $+\infty$ lorsque y tend vers $+\infty$. Donc $|f(c_y)-L|$ a pour limite 0 et, par conséquent :

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{ay}^{by}\frac{f(u)-L}{u}\,du=0$$

d) Il suffit de mettre les résultats précédents « bout à bout » en remarquant que, pour toute valeur de K : $\displaystyle\int_{au}^{bu}\frac{K}{t}\,dt=K\ln\frac{b}{a}$. D'où :

⋆ Si i) et ii) sont vraies $I=0$;

⋆ Si i') et ii) sont vraies $I=\ell\ln\dfrac{b}{a}$;

⋆ Si i) et ii') sont vraies $I=-L\ln\dfrac{b}{a}$;

⋆ Si i') et ii') sont vraies $I=(\ell-L)\ln\dfrac{b}{a}$.

2. Dans le cas présent, les hypothèses i') et ii') sont vérifiées, donc :

$$\boxed{I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,dt \text{ converge et vaut } \ln\frac{b}{a}}$$

(Ces intégrales sont appelées intégrales de Frullini.)

Exercice 11.

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de coordonnées (x,y) tels que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+t^y}\,dt$ converge.

Solution :

Comme $t^x=\mathrm{e}^{x\ln t}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{t^x}{1+t^y}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

- pour t au voisinage de 0^+ :

  si $y>0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y}\sim t^x$. L'intégrale converge si et seulement si $x>-1$.

  si $y=0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y}\sim\dfrac{t^x}{2}$. L'intégrale converge si et seulement si $x>-1$.

  si $y<0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y}\sim\dfrac{1}{t^{y-x}}$. L'intégrale converge si et seulement si $y-x<1$.

- pour t au voisinage de $+\infty$:

  si $y > 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{1}{t^{y-x}}$. L'intégrale converge si et seulement si $y - x > 1$.

  si $y = 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim \dfrac{t^x}{2}$. L'intégrale converge si et seulement si $x < -1$.

  si $y < 0$, $\dfrac{t^x}{1+t^y} \sim t^x$. L'intégrale converge si et seulement si $x < -1$.

En conclusion, l'intégrale I existe si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}$ convergent, soit :

$(y > 0$ et $x > -1$ et $y > x + 1)$ ou
$(y < 0$ et $x < -1$ et $y < x + 1)$.

La représentation graphique s'en déduit.

Exercice 12.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$.

1. Vérifier que l'intégrale I_n converge.

2. Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
En déduire les valeurs de I_{2n+1} et de I_{2n}, puis de $\dfrac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$.

3. a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$

b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx$$

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \sqrt{n}.I_n \leqslant I_{n+1}$$

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}\, C_{2n}^n \leqslant 1$$

En déduire un équivalent de C_{2n}^n lorsque n tend vers $+\infty$.

5. En admettant la formule de Stirling : $n! \underset{(\infty)}{\sim} n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$, retrouver le résultat précédent.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc intégrable sur tout segment de cet intervalle.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2.x^n.\mathrm{e}^{-x^2/2} = 0$, ce qui entraîne l'existence de $I_n, n \in \mathbb{N}$, par comparaison avec une intégrale de référence de Riemann.

2. Il suffit de faire une intégration par parties sur un intervalle de la forme $[0,A]$, puis de faire tendre A vers l'infini, pour obtenir $I_{n+2} = (n+1)I_n$.

Par une récurrence descendante, il vient :

$$I_{2n+1} = 2nI_{2n-1} = \cdots = 2^n n! I_1 = 2^n n!$$

car : $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x.e^{-x^2/2}\,dx = 1$

De même :

$$I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} = \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)}I_{2n-2} = \cdots = \frac{(2n)!}{2^n n!}I_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

car : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$

Enfin :

$$\boxed{\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n!)}{(2^n n!)^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

3. a) Soit $A > 0$.

$$\int_0^A x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \Big[\frac{-1}{n}x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\Big]_0^A + \int_0^A x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}, dx$$

En faisant tendre A vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$

b) Par convergence de toutes les intégrales suivantes, on a :

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx - \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$
$$= \int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx - \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx$$

En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{n}x$, il vient, pour $A > 0$:

$$\int_0^A x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{A\sqrt{n}} n^{-\frac{n+2}{2}}t^{n+1}.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$$

donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = n^{-\frac{n+2}{2}}I_{n+1}$$

De même : $\displaystyle\int_0^A x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = \int_0^{A\sqrt{n}} n^{-\frac{n+1}{2}}t^n.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$, et :

$$\int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-nx^2/2}\,dx = n^{-\frac{n+1}{2}} I_n$$

ce qui donne finalement :

$$n^{-\frac{n+2}{2}} I_{n+1} - n^{-\frac{n+1}{2}} I_n = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx$$

c) On a :

$$I_{n+1} - \sqrt{n} I_n = \frac{1}{2} n^{\frac{n+2}{2}} \int_0^{+\infty} x^{n-1}.\mathrm{e}^{-nx^2/2}(x-1)^2\,dx \geqslant 0$$

Donc $\sqrt{n} I_n \leqslant I_{n+1}$. L'autre inégalité est évidente.

4. D'après ce qui précède :

$$0 \leqslant \sqrt{(2n-1)2n} I_{2n-1} \leqslant \sqrt{2n} I_{2n} \leqslant I_{2n+1}$$

donc :

$$\sqrt{(2n-1)2n}\,\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \leqslant \sqrt{2n}\,\frac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \leqslant 1$$

Mais :

$$\sqrt{(2n-1)2n}\,\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{\sqrt{(2n-1)2n}}{2n} = \sqrt{1-\frac{1}{2n}}$$

donc :

$$\sqrt{1-\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\mathrm{C}_{2n}^n \leqslant 1$$

Ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n}\mathrm{C}_{2n}^n = 1$, et $\mathrm{C}_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$.

5. Si l'on admet la formule de Stirling, il vient :

$$n! \sim \mathrm{e}^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}, \quad (2n)! \sim \mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{C}_{2n}^n = \frac{(2n!)}{(n!)^2} \sim \frac{\mathrm{e}^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\mathrm{e}^{-2n}n^{2n}2\pi n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}}$$

Exercice 13.

Soit f une fonction réelle, définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$, convexe et de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que f' est croissante sur cet intervalle.

2. Soit k un entier naturel. Exprimer $\displaystyle\int_k^{k+1}\Big(x-k-\frac{1}{2}\Big)f'(x)\,dx$ en fonction de $f(k), f(k+1)$ et de $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

3. Montrer que : $\dfrac{f(k)+f(k+1)}{2} \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,dx$.

4. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2}f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) \geqslant \int_1^n f(x)\,dx$$

5. Montrer que :

$$\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx \leqslant \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8}$$

[On remarquera que $x\mapsto \dfrac{1}{2}\Big((x-k)^2-(x-k)-\dfrac{1}{4}\Big)$ est une primitive de la fonction $x\mapsto x-k-\frac{1}{2}$].

6. Montrer que pour tout entier naturel $n\geqslant 1$:

$$\tfrac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)\,dx \leqslant \frac{f'(n)-f'(1)}{8}$$

Solution :

1. C'est une question de cours : pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ on a équivalence entre le convexité sur un intervalle et la positivité de la dérivée seconde de f sur cet intervalle.

2. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx &= \Big[\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f(x)\Big]_k^{k+1}-\int_k^{k+1}f(x)\,dx\\ &= \frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)\,dx\end{aligned}$$

3. Effectuons le changement de variable $u=x-k-\dfrac{1}{2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx$, puis partageons à l'aide de la borne intermédiaire 0,

on obtient :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1}\big(x-k-\tfrac{1}{2}\big)f'(x)\,dx &= \int_0^1 uf'\big(u+k+\tfrac{1}{2}\big)\,du\\ &= \int_0^{1/2}u\big(f'(k+1/2+u)-f'(k+1/2-u)\big)\,du\end{aligned}$$

On conclut à la positivité par la croissance de la fonction f' et le résultat 2. donne l'inégalité souhaitée :

$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\geqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx$$

4. Il suffit de sommer, pour $k\in\{1,\ldots,n-1\}$, les inégalités :

$$\frac{f(k)+f(k+1)}{2}\geqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx$$

pour obtenir, pour $n\geqslant 1$:

$$\tfrac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\tfrac{1}{2}f(n)\geqslant\int_1^n f(x)\,dx$$

5. Intégrons de nouveau par parties :

$$\int_k^{k+1} \left(x-k-\frac{1}{2}\right) f'(x)\, dx = \frac{f'(k+1)-f'(k)}{8} - \int_k^{k+1} \frac{1}{2}\left((x-k)^2-(x-k)+\frac{1}{4}\right) f''(x)\, dx$$

On conclut en remarquant que $x \mapsto \left((x-k)^2-(x-k)+\frac{1}{4}\right) f''(x)$ est positive sur l'intervalle $[k, k+1]$.

5. En sommant pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ les précédentes inégalités, et en utilisant :

$$\int_k^{k+1} \left(x-k-\frac{1}{2}\right) f'(x)\, dx = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\, dx$$

on obtient, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f(x)\, dx \leqslant \frac{f'(n)-f'(1)}{8}$$

Exercice 14.

1. Soient deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que pour tout réel $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on ait :

$$P\left(\frac{1}{\tan^2 t}\right) = Q\left(\frac{1}{\tan^2 t}\right)$$

Montrer que P et Q sont égaux.

2. a) Pour tout entier naturel n, montrer qu'il existe un polynôme P_n vérifiant, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(\sin t)^{2n+1} P_n\left(\frac{1}{\tan^2 t}\right) = \sin[(2n+1)t]$$

(on pourra développer $(\cos t + i \sin t)^{2n+1}$ à l'aide de la formule du binôme).

b) Montrer que le polynôme P_n est unique.

c) Déterminer le degré de P_n ainsi que son coefficient dominant.

3. a) Montrer que P_n admet n racines réelles distinctes que l'on déterminera.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$$

Calculer u_n.

Solution :

1. Comme la fonction $\tan^2$ prend une infinité de valeurs, le polynôme $P-Q$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul.

2. a) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(2n+1)t = \operatorname{Im}\big((\cos t + i\sin t)^{2n+1}\big)$. On développe par la formule du binôme et la partie imaginaire provient des termes d'indices impairs, soit puisque $i^{2k+1} = i(-1)^k$:

$$\sin(2n+1)t = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(\cos t)^{2(n-k)}(-1)^k(\sin t)^{2k+1}$$

et pour t non congru à 0 modulo π :

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)t &= (\sin t)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k\Big(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\Big)^{n-k}\\ &= (\sin t)^{2n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k\Big(\frac{1}{\tan^2 t}\Big)^{n-k}\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{2k+1}(-1)^k X^{n-k}}$$

b) L'unicité du polynôme P_n résulte de la question 1.

c) On voit que P_n est de degré n et de coefficient dominant $\mathrm{C}_{2n+1}^{1} = 2n+1$.

3. a) On sait que pour t non congru à 0 modulo π :

$$P_n\Big(\frac{1}{\tan^2 t}\Big) = \frac{\sin(2n+1)t}{(\sin t)^{2n+1}}$$

Comme $\sin(2n+1)t$ est nul pour $t = \dfrac{k\pi}{n+1}$, avec k entier relatif, les nombres $\dfrac{1}{\tan^2(k\pi/2n+1)}$, avec $1 \leqslant k \leqslant n$, sont tous des zéros de P_n et par stricte monotonie de $\dfrac{1}{\tan^2}$ sur $]0,\pi/2[$, ces nombres sont deux à deux distincts. On vient donc de trouver les n zéros du polynôme P_n (qui est un polynôme de degré n).

b) On peut donc factoriser $P_n(X)$, soit :

$$P_n(X) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\Big(X - \frac{1}{\tan^2(k\pi/2n+1)}\Big)$$

Le réel u_n représente la somme des zéros de P_n. En développant la dernière expression de P_n, le nombre $-(2n+1)u_n$ est égal à l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans P_n. Soit :

$$\boxed{u_n = \frac{-\mathrm{C}_{2n+1}^{3}}{-(2n+1)} = \frac{2n(2n-1)}{6}}$$

Exercice 15.

1. Soit P la fonction polynomiale définie par $P(t) = t^5 - t + 1$.

a) Combien P admet–elle de racines réelles ?

b) Montrer que P n'admet pas de racine multiple dans $\mathbb{C}$.

On désigne par a la racine réelle de P.

2. On définit la fonction F par :

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{4}{P(t)}\, dt$$

a) Déterminer le domaine de définition de F.

b) Déterminer le sens de variation de F et sa convexité.

c) Etudier les limites de F aux bornes de son domaine de définition.

3. a) Déterminer un équivalent simple de F au voisinage $+\infty$.

b) Déterminer, en fonction de a, un équivalent simple de F au voisinage de a.

Solution :

1. a) On a facilement $P'(t) = 5t^4 - 1$ qui s'annule pour $t = \pm 5^{-1/4}$. Ce ne sont pas des racines de P car autrement, en remplaçant t^4 par $\frac{1}{5}$ dans $t^5 - t + 1 = t.t^4 - t + 1$, il viendrait $t = \frac{5}{4}$!

b) Les variations de P se déterminent aisément, et P admet un minimum local en $t = 5^{-1/4}$, minimum qui vaut $m = 5^{-5/4}(5^{5/4} - 4) > 0$ et un maximum local en $t = -5^{-1/4}$, ce maximum local étant *a fortiori* positif.
Comme $\lim\limits_{t \to -\infty} P(t) = -\infty$, on en déduit que P admet une unique racine réelle a et a est tel que $a < -5^{-1/4}$.

c) Le calcul fait en a) montre que les racines complexes de P' ne sont pas racines de P, et les racines complexes de P sont toutes simples.

2. a) Comme a est racine simple de P, $P(t) \sim C(t-a)$ au voisinage de a, la valeur de C étant sans importance ici, ce qui entraîne que l'intégrale $\displaystyle\int_a^A \frac{4\,dt}{P(t)}$ diverge. Donc $\mathcal{D}_F =]a, +\infty[$

b) F est une fonction continue et dérivable (car $t \mapsto \dfrac{4}{P(t)}$ est continue sur $\mathcal{D}_F$) et pour tout $x > a$:

$$F'(x) = -\frac{4}{x^5 - x + 1} < 0, \quad F''(x) = \frac{4(5x^4 - 1)}{(x^5 - x + 1)^2}$$

L'étude de la convexité de F est alors sans problème.

c) On a $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$ comme reste d'intégrale convergente,
et $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = +\infty$, car au voisinage de a^+, $\dfrac{4}{P(t)} \sim \dfrac{4}{(t-a)Q(a)}$ avec $Q(a) > 0$.

3. a) Intuitivement, comme au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{4}{P(t)} \sim \dfrac{4}{t^5}$, on peut penser qu'au voisinage de $+\infty$:

$$F(x) \sim \int_x^{+\infty} \frac{4\,dt}{t^5} = \frac{1}{x^4}$$

Montrons–le !

$$\left|F(x) - \frac{1}{x^4}\right| \leqslant \int_x^{+\infty} \left|\frac{4t-4}{t^5(t^5-t+1)}\right| dt \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^8} = \frac{1}{7x^7} = o(x^{-4})$$

(en effet la fonction à intégrer est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{4}{t^9}$, donc pour x assez grand elle est majorée par $\dfrac{1}{t^8}$ sur $[x, +\infty[$)

b) On sait que $P(t) = (t-a)Q(t)$ d'où $P'(a) = Q(a)$. On a également : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{P(t)}\,dt = F(0)$. On a alors, pour x tel que $a < x \leqslant 0$:

$$\int_x^0 \frac{4}{P(t)}\,dt - \int_x^0 \frac{4}{(t-a)Q(a)}\,dt = 4\int_x^0 \frac{Q(a)-Q(t)}{Q(a)(t^5-t+1)}\,dt$$

et

$$4\int_x^0 \frac{Q(a)-Q(t)}{Q(a)(t^5-t+1)}\,dt = -4\int_x^0 \frac{Q(t)-Q(a)}{(t-a)} \times \frac{1}{Q(a)Q(t)}\,dt$$

Cette dernière intégrale converge, et est même faussement impropre, lorsque x est au voisinage de a (car $\displaystyle\lim_{t\to a} \frac{Q(t)-Q(a)}{(t-a)} = Q'(a)$). Finalement :

$$\lim_{x\to a^+} \left(F(x) - F(0) + \frac{4}{Q(a)} \ln(x-a)\right) = K$$

et comme $\displaystyle\lim_{x\to a^+} F(x) = +\infty$:

$$\boxed{F(x) \underset{(a^+)}{\sim} -\frac{4}{Q(a)} \ln(x-a) = \frac{-4\ln(x-a)}{5a^4-1}}$$

Exercice 16.

1. Montrer que pour tout t et pour tout s de l'intervalle $[0,1]$, on a :

$$|\ln^2(1+t) - \ln^2(1+s)| \leqslant 2|t-s|$$

Dans la suite de cet exercice, g est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodique de période 1.

2. a) Montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}$.

On pose pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ln^2\left(1 + \frac{k+t}{n}\right) - \ln^2\left(1 + \frac{k}{n}\right)\right]$$

b) Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt = 0$$

3. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite $\left(\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt\right)_n$ en fonction de $\int_0^1 g(t)\,dt$.

Solution :

1. C'est simplement l'inégalité des accroissements finis, que l'on applique à la fonction $f : t \mapsto \ln^2(1+t)$, en remarquant que $f'(t) = \dfrac{2\ln(1+t)}{1+t}$ et que l'on a :

$$\forall\, t \in [0,1], |f'(t)| \leqslant 2\ln 2 < 2$$

2. a) g est continue sur $[0,1]$, donc bornée sur ce segment :

$$\exists\, M, \forall\, t \in [0,1], |g(t)| \leqslant M$$

Puis : $\forall\, t \in \mathbb{R}, |f(t)| = |f(t - \lfloor t \rfloor)| \leqslant M$.

b)
$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 u_n(t)g(t)\,dt\Big| &\leqslant \int_0^1 |u_n(t)|.|g(t)|\,dt\\
&\leqslant \frac{M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|\int_0^1 |\ln^2(1+\frac{k+t}{n}) - \ln^2(1+\frac{k}{n})\Big|\,dt\\
&\leqslant \frac{2M}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 |\frac{k+t}{n} - \frac{k}{n}|\,dt = \frac{2M}{n}\int_0^1 t\,dt\\
&\leqslant \frac{M}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

3. a) En intégrant par parties ($t \mapsto t+1$ est une primitive de $t \mapsto 1$) :

$$\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt = \Big[(t+1)\ln^2(1+t)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$$

Sachant que $u \mapsto u\ln u - u$ est une primitive de $u \mapsto \ln u$, on conclut aisément :

$$\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt = 2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt &= \frac{1}{n}\int_0^n g(y)\ln^2\left(1+\frac{y}{n}\right)dy\\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} g(y)\ln^2\left(1+\frac{y}{n}\right)dy
\end{aligned}$$

et, en posant $y = k+T$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt &= \frac{1}{n}\int_0^1 g(T)\Big(\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k+T}{n}\right)\Big)\,dT\\
&= \int_0^1 g(T)\,dT \times \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln^2\left(1+\frac{k}{n}\right) + \int_0^1 u_n(T)g(T)\,dT
\end{aligned}$$

Le deuxième terme a pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini et on reconnaît dans le premier terme une somme de Riemann.

Ce terme a donc pour limite $\displaystyle\int_0^1 \ln^2(1+t)\,dt$ lorsque n tend vers l'infini. Soit :

$$\boxed{\int_0^1 g(nt)\ln^2(1+t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)\int_0^1 g(t)\,dt}$$

Exercice 17.

1. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x_k^2 - 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)x_k x_{k-1} = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2$$

2. On considère une suite (a_n) telle que la série $\sum a_n^2$ soit convergente. On définit une suite (A_n) par$A_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

a) Exprimer, pour $k \geqslant 1$, a_k en fonction de A_k et de A_{k-1}.

b) En utilisant la première question, montrer que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_k A_k$$

c) Montrer que :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)^2 \leqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)$$

3. En déduire que la série de terme général A_k^2 est convergente.

Solution :

1. Il suffit de développer l'expression située à droite :

$$nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2 = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} kx_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} kx_{k+1}^2 - 2\sum_{k=1}^{n-1} kx_k x_{k+1}$$

En regroupant et en décalant l'indice de sommation pour les termes rectangles, il vient bien :

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)x_k^2 - 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)x_k x_{k-1} = nx_n^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k - x_{k+1})^2$$

2. a) $nA_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = (n-1)A_{n-1} + a_n$, donc :

$$\forall\, n \geqslant 1, a_n = nA_n - (n-1)A_{n-1}$$

b) On a, d'après 1. : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)A_k^2 \geqslant 2\sum_{k=2}^{n}(k-1)A_k A_{k-1}$, soit :

$2\sum_{k=1}^{n} A_k\big(kA_k-(k-1)A_{k-1}\big) \geqslant \sum_{k=1}^{n} A_k^2$, ou encore :

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} a_kA_k$$

c) On sait (inégalité de Cauchy-Schwarz) que :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_kA_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)$$

et donc :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)^2 \leqslant 4\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)$$

3. Si les a_k sont tous nuls, il en est de même des A_k et la propriété est banale. Sinon, il existe k_0 tel que A_{k_0} soit non nul, et $\sum_{k=1}^{n} A_k^2$ est strictement positif à partir du rang k_0 et en divisant par $\sum_{k=1}^{n} A_k^2$:

$$\forall\, n \geqslant k_0,\ \sum_{k=1}^{n} A_k^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

D'où la convergence de la série proposée, puisque cette série est à termes positifs de sommes partielles majorées. On a de plus :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \leqslant 4\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2}$$

Remarque : on peut montrer que cette majoration est optimale, c'est-à-dire que l'on ne peut pas remplacer 4 par un nombre plus petit...

Exercice 18.

Soit f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on note $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que pour tout x réel et pour tout $h>0$, on a :

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$
$$|f(x-h)-f(x)+hf'(x)| \leqslant \frac{M_2h^2}{2}$$

En déduire que pour tout x réel et pour tout $h>0$:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{h} + \frac{M_2h}{2}$$

2. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

3. On suppose que g est une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g et g''' sont bornées sur $\mathbb{R}$. On note :

$$M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|,\ M_3 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g'''(x)|$$

En appliquant l'inégalité de Taylor sur les segments $[x, x+1]$ et $[x, x+2]$, à un ordre suffisant, montrer de même que g' et g'' sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. Il s'agit simplement de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction f, à l'ordre 1, soit entre les points x et $x+h$, soit entre les points x et $x-h$.

En sommant ces deux inégalités, il vient :

$$\begin{aligned}|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| &\\ &\leqslant |f(x+h) - f(x) - hf'(x)| + |f(x-h) - f(x) + hf'(x)|\\ &\leqslant M_2h^2.\end{aligned}$$

Ainsi : $2h|f'(x)| \leqslant M_2h^2 + 2M_0$ et : $\boxed{|f'(x)| \leqslant \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}}$

2. $\star$ Si $M_2 = 0$, f'' est la fonction nulle, donc f est affine et comme f est bornée, f est constante. On a donc $f' = 0$, soit $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| = 0$, et la propriété énoncée est banale.

$\star$ Si $M_2 \neq 0$, une étude rapide de la fonction $h \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2h}{2}$ montre que cette fonction est minimale pour $h = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$, le minimum valant $\sqrt{2M_0M_2}$.

Ce qui démontre la propriété énoncée.

3. On a de même :

$$|g(x+1) - g(x) - g'(x) - \frac{1}{2}\,g''(x)| \leqslant \frac{M_3}{6}$$

$$|g(x+2) - g(x) - 2g'(x) - 2g''(x)| \leqslant \frac{8M_3}{6}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} g'(x) + \frac{1}{2}\,g''(x) = \alpha\\ 2g'(x) + 2g''(x) = \beta\end{cases}$$

avec $|\alpha| \leqslant \dfrac{M_3}{6} + 2M_0$ et $|\beta| \leqslant \dfrac{4M_3}{3} + 2M_0$.

Le système précédent donne $g'(x)$ et $g''(x)$ en fonction de α et β, ce qui prouve que $g'(x)$ et $g''(x)$ sont bornées indépendamment de x.

Exercice 19.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

On lui associe la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{x_k}{x_k + 1}$$

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et qu'elle converge vers un réel λ tel que $0 \leqslant \lambda < 1$.

2. Donner un exemple de suite (x_n) pour laquelle on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. Montrer que $\lambda \neq 0$ si et seulement si la série $\sum \frac{1}{x_n}$ converge.

4. On suppose que la suite (x_n) est définie par :

$$\begin{cases} x_0 > 1 \\ x_{n+1} = x_n^2, \ n \geqslant 0 \end{cases}$$

Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

1. $x_k + 1$ n'est jamais nul, donc la suite est bien définie.
Cette suite est à termes strictement positifs, et $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{x_{k+1}}{x_{k+1}+1} < 1$.
La suite (u_n) est donc strictement décroissante, minorée par 0 : elle converge et sa limite λ vérifie $0 \leqslant \lambda < \frac{x_0}{x_0+1} < 1$.

2. Prenons par exemple la suite x définie par $x_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = n$. On a bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ et pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. La suite u converge vers $\lambda > 0$ si et seulement si la suite $\ln u$ converge vers $\ln \lambda$.
Or : $\ln(u_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} [\ln(x_k) - \ln(x_k+1)] = -\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{x_k}\right)$.
Comme x_k tend vers $+\infty$, $\ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right) \sim \frac{1}{x_k}$ et la série dont le terme général est $\ln\left(1+\frac{1}{x_k}\right)$ converge si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{x_k}$ converge.
D'où le résultat.

4. $\star$ Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = (x_0)^{2^n}$ et :

$$\prod_{k=0}^{n} x_k = \prod_{k=0}^{n} (x_0)^{2^k} = x_0^{\sum_{k=0}^{n} 2^k} = x_0^{2^{n+1}-1}.$$

On vérifie alors, par récurence, que :

$$\prod_{k=0}^{n} (x_k + 1) = \sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} (x_0)^j = \frac{x_0^{2^{n+1}} - 1}{x_0 - 1}$$

En conséquence : $\boxed{u_n = \frac{x_0^{2^{n+1}-1}(x_0-1)}{x_0^{2^{n+1}} - 1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x_0 - 1}{x_0}}$

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire étant noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $\|\ \|$.

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe, c'est–à–dire vérifiant pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, et pour tout réel $\lambda \in [0,1]$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Pour tout $(h,x) \in (\mathbb{R}^n)^2$ fixé, on définit la fonction $\varphi_{h,x}$ de la variable réelle t par :

$$\varphi_{h,x}(t) = f(x+th)$$

1. a) Montrer que $\varphi_{h,x}$ est une fonction dérivable et convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

b) En déduire que :

$$\varphi'_{h,x}(0) \leqslant \varphi_{h,x}(1) - \varphi_{h,x}(0)$$

2. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, on a :

$$\langle \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x), y-x \rangle \leqslant f(y) - f(x)$$

où $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)$ représente le gradient de f au point x.

3. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$ et que $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(0) = 0$.
On suppose également que f est strictement convexe, c'est–à–dire qu'elle vérifie pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, tels que $x \neq y$, pour tout réel $\lambda \in]0,1[$:

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) < (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n, f(0) \leqslant f(x)$, puis que si $x \neq 0$, alors $f(x) > 0$.

b) Montrer que $\inf\limits_{\{x\in\mathbb{R}^n, ||x||=1\}} f(x)$ existe. On note cette valeur α. Montrer que $\alpha > 0$.

c) Montrer que pour tout $||x|| > 1$, on a $f(x) \geqslant \alpha ||x||$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{||x||\to+\infty} f(x)$.

Solution :

1. a) $\star$ $\varphi_{x,h}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et :

$$\varphi'_{x,h}(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th), \text{ avec } h = (h_1, \dots, h_n)$$

$\star$ Soit $(t,u) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{x,h}\big(\lambda t + (1-\lambda)u\big) &= f\big(x + \lambda th + (1-\lambda)uh\big) \\
&= f\big(\lambda(x+th) + (1-\lambda)(x+uh)\big) \\
&\leqslant \lambda f(x+th) + (1-\lambda) f(x+uh) \\
&\leqslant \lambda \varphi_{x,h}(t) + (1-\lambda)\varphi_{x,h}(u)
\end{aligned}$$

et $\varphi_{x,h}$ est bien convexe.

b) Par convexité, la corde joignant les points d'abscisses $t = 0$ et $t = 1$ se trouve au-dessus de la tangente au point d'abscisse $t = 0$, ce qui s'écrit :

$$\varphi'_{x,h}(0) \leqslant \varphi_{x,h}(1) - \varphi_{x,h}(0)$$

2. Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant f(x+h) - f(x)$$

Soit, avec $h = y - x$: $\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant f(y) - f(x)$, ou encore :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x), y - x \rangle \leqslant f(y) - f(x)}$$

3. a) En prenant $x = 0$ dans la relation précédente :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^n, 0 \leqslant f(y)$$

S'il existait un point $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0$, alors par convexité stricte, on aurait :
$f(\frac{1}{2}\,0 + \frac{1}{2}\,x) < \frac{1}{2}\,f(0) + \frac{1}{2}\,f(x)$, soit $f(\frac{1}{2}\,x) < \frac{1}{2}\,f(x) = 0$, en contradiction avec $f(u) \geqslant 0$ pour tout u.

b) La fonction f est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^n$, donc $\inf\limits_{\|x\|=1} f(x)$ existe et sa valeur α est positive ou nulle.
Comme $\{x / \|x\| = 1\}$ est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ et f continue, α est une valeur atteinte et donc $\alpha > 0$

c) Soit x tel que $\|x\| > 1$, alors $\lambda = \dfrac{1}{\|x\|} \in]0, 1[$ et $f(\lambda x) < \lambda f(x)$.

Par conséquent :
$\alpha \leqslant f\big(\dfrac{x}{\|x\|}\big) < \dfrac{1}{\|x\|}\, f(x)$, soit $f(x) \geqslant \alpha.\|x\|$ et :

$$\boxed{\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Exercice 21.

Soit $n \geqslant 2$ et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout $P \in E$, on définit :

$$F : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P^{(2k)}(x)$$

$$G : x \mapsto F'(x) \sin x - F(x) \cos x$$

où $P^{(j)}(x)$ désigne la dérivée $j^{\text{ème}}$ de P.

1. Calculer $G'(x)$, dérivée de G. En déduire que :

$$\int_0^{\pi} P(x) \sin(x)\, dx = F(0) + F(\pi)$$

2. On suppose que π est un nombre rationnel, c'est–à–dire qu'il s'écrit sous la forme $\pi = \dfrac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, P_n(X) = \dfrac{1}{n!}X^n(p-qX)^n$.

a) Montrer que pour tout $j \in \{0,\dots n-1\}, P_n^{(j)}(0) = 0$.

b) Calculer pour tout $j \geqslant 0, P_n^{(n+j)}(0)$.

On note alors F_n l'application associée à P_n comme défini au début de cet exercice.

c) Montrer que $F_n(0) \in \mathbb{Z}$.

d) Montrer que pour tout x réel, $P_n(\pi - x) = P_n(x)$. En déduire que $F_n(\pi) \in \mathbb{Z}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\,dx$$

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1, I_n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

c) En déduire que l'hypothèse faite au début de la question 2. est absurde. Conclusion ?

Solution :

1. Des calculs simples donnent :

$$F''(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k+2)}(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}P^{(2k)}(x)$$

et :

$$G'(x) = (F''(x) + F(x))\sin x = P(x)\sin x$$

Donc :

$$\int_0^\pi P(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi G'(x)\,dx = G(\pi) - G(0) = F(\pi) + F(0)$$

2. a) 0 est racine de multiplicité n de P. Aussi, pour tout j élément de $\{0,\dots,n-1\}$, $P^{(j)}(0) = 0$.

b) On a $P(x) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k(-1)^{n-k}p^{n-k}q^k x^{n+k}$. Aussi, pour tout $j \geqslant 0$:

$$P^{(n+j)}(0) = \mathrm{C}_n^j p^{n-j}q^j\frac{(n+j)!}{n!} \in \mathbb{Z}$$

c) Ainsi : $F(0) = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(2k)}(0) \in \mathbb{Z}$.

d) On a, avec $\pi = p/q$:

$$n!P(\pi - X) = (\pi - X)^n(p - q(\pi - X))^n = \frac{(p-qX)^n}{q^n}(qX)^n = n!P(X)$$

Donc $P_n(\pi - x) = P(x)$, et par dérivation $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, d'où $F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le polynôme P est dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$. Il vérifie donc le résultat de la question 1. Aussi $I_n = F(0) + F(\pi)$.
Par la question 2. b) $F(0) \in \mathbb{Z}$ et par la question 2. d), $F(\pi) \in \mathbb{Z}$. Ainsi $I_n \in \mathbb{Z}$.
Mais sur l'intervalle $[0, \pi]$ et en supposant que $\pi = p/q$, $t \mapsto P(t)\sin t \geqslant 0$. Ainsi $I_n \in \mathbb{N}$. Par continuité de cette dernière fonction, qui n'est pas la fonction nulle, on a même :

$$\boxed{I_n \in \mathbb{N}^*}$$

b) De plus

$$|I_n| \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^\pi x^n(p-qx)^n\,dx \leqslant \frac{\pi \times \pi^n \times p^n}{n!}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, puisque l'on sait même qu'il s'agit du terme général d'une série convergente..

c) Une suite d'entiers strictement positifs ne peut tendre vers 0. L'hypothèse de la rationnalité de π conduit à une absurdité.

Conclusion : $\boxed{\pi \text{ est un nombre irrationnel}}$

Exercice 22.

On considère le triangle numérique suivant, où chaque nombre est obtenu en additionnant les deux nombres de la ligne supérieure entre lesquels il est placé :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \dots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \dots & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & 16 & & \dots & & \\
& & & 12 & & 20 & & 28 & & \dots & & & \\
& & & & 32 & & 48 & & \dots & & & & \\
& & & & & 80 & & \dots & & & & &
\end{array}$$

1. Ecrire une fonction Pascal de deux variables n et k, avec $k \leqslant n$ permettant de calculer le $(k+1)^{\text{ème}}$ terme de la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne et l'utiliser pour faire calculer à l'ordinateur le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n.

2. Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres et soit $n \in \mathbb{N}$. On construit, selon le modèle précédent, le triangle numérique d'ordre n, obtenu en mettant sur la première ligne les nombres :

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n$$

a. Montrer l'égalité : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_k + \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a_{k+1}$

b. Montrer, par récurrence sur n que le nombre inscrit à la pointe de ce triangle est

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k$$

c. En déduire la valeur du nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre n de la première question.

Solution :

1.
```
Program ESCP23 ; uses crt ;
Var : n :integer
Function f(n,k :integer) :integer ;
  Begin
  If n=0 then f := k Else f := f(n-1,k)+f(n-1,k+1) ;
End ;
Begin
  Readln(n) ; Writeln(f(n,0)) ;
  Readkey
End.
```

2. a) $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_n^k + \mathrm{C}_n^{k-1}\right) a_k + a_{n+1} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k + \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_n^k a_{k+1} + a_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_{k+1}\end{aligned}$$

b) Soit H_n la propriété : « si la première ligne du triangle est $b_0, b_1, \ldots, b_n$, alors le nombre inscrit à la pointe du triangle est $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k b_k$, ceci quel que soit le contenu de la première ligne du triangle ».

⋆ Pour $n = 0$, le nombre cherché est clairement a_0, qui est bien égal à $\sum_{k=0}^{0} \mathrm{C}_0^k a_k$.

⋆ Si le résultat est vrai à un certain ordre n, alors si $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont les nombres de la première ligne, on a sur l'avant-dernière ligne les deux nombres obtenus à partir de $a_0, \ldots, a_n$ et à partir de $a_1, \ldots, a_{n+1}$, c'est-à-dire, par l'hypothèse de récurrence : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_k$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a_{k+1}$.

En faisant la somme de ces deux nombres, on obtient le nombre inscrit à la pointe du triangle d'ordre $n+1$, soit, d'après la question précédente : $\sum_{k=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^k a_k$.

Ceci prouve H_{n+1} et on conclut par le principe de récurrence.

Remarque : on peut aussi chercher directement combien de fois a_k se retrouve dans la sommation définissant le nombre écrit à la pointe du triangle, ce qui revient à chercher le nombre de chemins joignant a_k à la pointe, sachant que chaque élément du chemin, en remontant depuis la pointe, est formé de traits joignant un élément d'une ligne à l'élément de la ligne précédente immédiatement à sa gauche, ou immédiatement à sa droite. On voit ainsi qu'il existe C_n^k chemins possibles,...

c) Dans notre cas particulier, on doit calculer $\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k$.

Or : $\sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum_{k=1}^{n} n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n.2^{n-1}$

$$\boxed{\text{Le nombre écrit à la pointe du triangle d'ordre } n \text{ est } n.2^{n-1}}$$

Exercice 23.

Une machine fonctionne avec deux combustibles, dont les quantités respectives (positives !) sont exprimées en m^3 et notées x et y. La puissance de la machine est :

$$P(x,y) = \frac{kxy}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

où k est un réel strictement positif.

1. Déterminer (x,y) pour que la puissance de la machine soit maximale.

2. Les combustibles valent tous deux a euros le m^3. Déterminer (x,y) pour que le rapport $\dfrac{\text{puissance}}{\text{prix}}$ soit maximal. Pour cela, on pourra procéder comme suit :

poser $f(t) = \dfrac{t}{(1+t)^2}$, $g(x,y) = \dfrac{f(x)f(y)}{x+y}$ pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ et $(x,y) \neq (0,0)$ et montrer que :

a) en posant $g(0,0) = 0$, g est continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$;

b) pour tout $R > 0$, on a : $\max(x,y) \geqslant R \implies g(x,y) \leqslant \dfrac{1}{16.R}$ et en déduire que : $\max(x,y) \geqslant 2 \implies g(x,y) \leqslant g(1,1)$;

c) g admet un maximum sur $[0,2]\times[0,2]$ atteint en un point de $]0,2[\times]0,2[$ et déterminer ce maximum.

Solution :

1. Posons $f(t) = \dfrac{t}{(1+t)^2}$, on a $P(x,y) = kf(x)f(y)$, pour tout $(x,y) \in {\mathbb{R}_+}^2$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(t) = \dfrac{1-t}{(1+t)^3}$.

La fonction f passe par un maximum pour $t=1$, ce maximum valant $\dfrac{1}{4}$.

Par conséquent P passe par un maximum au point $(1,1)$, ce maximum valant $\dfrac{k}{16}$.

2. Le rapport puissance/prix vaut $Q=\dfrac{k}{a}g(x,y)$, donc Q est maximal lorsque g est maximal.

a) Comme $0\leqslant(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=x-2\sqrt{xy}+y$, on a $2\sqrt{xy}\leqslant x+y$ et :

$$0\leqslant g(x,y)=\frac{xy}{(1+x)^2(1+y)^2(x+y)}\leqslant\frac{xy}{x+y}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{xy}$$

D'où : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=0$.

b) Comme $g(x,y)=f(x)f(y)\dfrac{1}{x+y}$, on a :

$$(x\geqslant R \text{ ou } y\geqslant R)\implies g(x,y)\leqslant f(x)f(y)\frac{1}{R}\leqslant\frac{1}{16.R}$$

Avec $g(1,1)=\dfrac{1}{32}$, on en déduit : $\max(x,y)\geqslant 2\implies g(x,y)\leqslant g(1,1)$.

c) S'il y a un maximum, il est donc atteint en un point de $W=[0,2]\times[0,2]$. La fonction g étant continue sur W et W étant un fermé borné, la fonction g admet un maximum sur W.

Pour tout t de $[0,2]$, on a $g(t,0)=g(0,t)=0$ et $g(t,2)=g(2,t)\leqslant g(1,1)$. Le maximum ne peut donc être atteint qu'en un point de l'ouvert $W'=\,]0,2[\times]0,2[$, domaine sur lequel g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ainsi le maximum de g est atteint en un point critique de g appartenant à W'.

On trouve :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y-xy-2x^2)}{(1+y)^2(1+x)^3(x+y)^2}$$

et de façon symétrique :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x-xy-2y^2)}{(1+x)^2(1+y)^3(x+y)^2}$$

Les éventuels points critiques vérifiant $x>0, y>0$ sont donc solutions du système :

$$(S):\begin{cases} y-xy-2x^2=0\\ x-xy-2y^2=0\end{cases}$$

Avec $x>0$ et $y>0$, on a :

$$(S)\iff\begin{cases} y-xy-2x^2=0\\ (x-y)(1+2(x+y))=0\end{cases}\iff\begin{cases} y=x\\ x-3x^2=0\end{cases}\iff x=y=\frac{1}{3}$$

Il n'y a qu'un point critique dans W', ce point est donc nécessairement le point où g atteint son maximum sur W, donc sur ${\mathbb{R}_+}^2$.

Le rapport puissance/prix est maximal pour $x=y=\dfrac{1}{3}$, ce maximum valant $\dfrac{27k}{528a}$.

Exercice 24.

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, avec $n \geqslant 2$. On pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt \qquad S_p = \int_0^{p\pi} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt$$

1. Justifier l'existence de I_n.

2. On suppose dans cette question, que n est un entier impair fixé. Montrer que les suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $p \in \mathbb{N}$ par $a_p = S_{2p}$ et $b_p = S_{2p+1}$ sont adjacentes et de limite commune I_n.

3. Montrer que $I_n > 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

4. a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant 1$ et que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $[0,1]$.

b) Soit $a \in]0,1[$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^1 \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt = 0$.

5. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 2$, on a :

$$\sum_{n=2}^{N} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1+\big(\frac{-\sin x}{x}\big)^{N-1}}{1+\frac{\sin x}{x}} \big(\frac{\sin x}{x}\big)^2 dx$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n I_n$ converge et trouver une expression de sa somme à l'aide d'une intégrale.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et se prolonge par continuité par 1 en $t=0$.
De plus, pour tout $n \geqslant 2$ et $t \geqslant 1$, $\left|\big(\frac{\sin t}{t}\big)^n\right| \leqslant \frac{1}{t^n}$. Ce qui prouve que I_n existe pour tout $n \geqslant 2$.

2. On a, par imparité de n :

$$S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \big(\frac{\sin t}{t}\big)^n dt = \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\pi} (-1)^{nk} \big(\frac{\sin t}{t+k\pi}\big)^n dt$$
$$= \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{\pi} (-1)^k \big(\frac{\sin t}{t+k\pi}\big)^n dt$$

Or, pour $t \in [0,\pi]$: $\dfrac{\sin t}{t+(k+1)\pi} \leqslant \dfrac{\sin t}{t+k\pi} \leqslant \dfrac{\sin t}{t+(k-1)\pi}$, ce qui montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_{2p} \leqslant S_{2p+2} \leqslant S_{2p+3} \leqslant S_{2p+1}$.
Enfin :

$$0 \leqslant S_{2p+1} - S_{2p} = \int_0^{\pi} \big(\frac{\sin t}{t+2p\pi}\big)^n dt \leqslant \frac{\pi}{(2p\pi)^n}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, ce qui permet de conclure.

3. Si n est pair le résultat est évident, par positivité de l'intégrale. Si n est impair, la question précédente donne :

$$I_n \geqslant a_1 = \int_0^{\pi} (\sin t)^n \Big(\frac{1}{t^n} - \frac{1}{(t+\pi)^n}\Big)\, dt > 0$$

4. a) Une étude élémentaire de $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ donne :

- f est continue sur $]0,1]$, et se prolonge en 0 par 1.
- f est dérivable sur $]0,1]$ et pour tout t dans cet intervalle

$f'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2}$. La dérivée en 0 s'obtient par $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 0$. Le signe de f' sur $[0,1]$ est celui de son numérateur ou celui de $t - \tan t$ qui est négatif sur $[0,1]$. Ainsi la fonction f est décroissante sur $[0,1]$.

Les inégalités $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant 1$ sont maintenant évidentes.

b) Par la question précédente, si $0 < a \leqslant t \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \dfrac{\sin t}{t} \leqslant \dfrac{\sin a}{a} < 1$, et

$$\int_a^1 \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^n dt \leqslant (1-a)\Big(\frac{\sin a}{a}\Big)^n$$

ce qui donne le résultat souhaité.

5. Chacune des intégrales I_n étant convergente, la somme étant finie, il vient par calcul de somme de série géométrique :

$$\sum_{n=2}^{N} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 + (\frac{-\sin x}{x})^{N-1}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$$

que l'on peut également écrire sous la forme :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx + \int_0^{+\infty} \frac{(\frac{-\sin x}{x})^{N-1}}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x + \sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ (en 0 elle se prolonge par continuité par $1/2$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+\sin x} = 1$. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2 dx$ existe.

La seconde intégrale existe donc également. Montrons qu'elle tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

$\star$ La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \frac{\sin x}{x}} \Big(\dfrac{\sin x}{x}\Big)^2$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, soit M un majorant de cette fonction.

$\star$ On écrit, pour tout a tel que $0 < a < 1$:

$$\int_0^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx = \int_0^{a} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx + \int_a^{1} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx + \int_1^{+\infty} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|^{N-1} dx$$

Or :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{N-1}} dx = \frac{1}{N-2}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et inférieure à 1 :

$$\int_0^a \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx \leqslant a$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisi $a < \varepsilon/3$, puis N tel que $\dfrac{1}{N-2} < \varepsilon/3$, et tel que

$$\int_a^1 \left|\frac{\sin x}{x}\right|^{N-1} dx < \varepsilon/3$$

(par la question 4.b)

$\star$ Alors pour N assez grand, l'intégrale est majorée en valeur absolue par $M\varepsilon$, ce qui prouve bien qu'elle est de limite nulle.

Ainsi la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} (-1)^n I_n$ converge et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{\sin x}{x}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$$

Exercice 25.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On s'intéresse aux suites $(P_n)_{n \geqslant 0}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes (notées conditions (C)) :

(1) $P_0(X) = 1$

(2) $P_1 \neq 0$

(3) pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x+y) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_k(x) P_{n-k}(y)$.

1. Montrer que la suite (P_n) définie par $P_n(X) = \dfrac{X^n}{n!}$ vérifie les conditions (C).

2. On considère la suite (P_n) définie par $P_0(X) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$P_n(X) = \frac{X(X+n)^{n-1}}{n!}$$

a) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1, P_n'(X) = P_{n-1}(X+1)$ (P_n' désigne le polynôme dérivé de P_n).

b) En déduire que cette suite (P_n) vérifie les conditions (C).

3. Soit u une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet un développement limité à tout ordre en 0 et telle que $u(0) = 0, u'(0) \neq 0$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ donné. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \geqslant 0}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $\varepsilon_n(x, t)$ telle que :

$$\mathrm{e}^{xu(t)} = \sum_{k=0}^{n} P_k(x)t^k + t^n\varepsilon_n(x,t)$$

avec $\lim\limits_{t\to+\infty} \varepsilon_n(x,t) = 0$.

b) Montrer que la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie vérifie les conditions (C).

c) Expliciter les polynômes P_n lorsque $u(t) = \ln(1+t)$.

Solution :

1. Les conditions (1) et (2) sont immédiatement vérifiées. Quant à la condition (3) :

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(x)P_{n-k}(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\,\frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k} = P_n(x+y)$$

2. a) Il suffit de calculer la dérivée de P_n :

$$P_n'(x) = \frac{1}{n!}(x+n)^{n-2}(x+n+(n-1)x) = \frac{(x+1)(x+n)^{n-2}}{(n-1)!} = P_{n-1}(x+1)$$

b) Les conditions (1) et (2) sont immédiatement vérifiées. Quant à la condition (3), effectuons une récurrence :

$$P_n'(x+y) = P_{n-1}(x+y+1) = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(x+1)P_{n-1-k}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} P_{k+1}'(x)P_{n-1-k}(y)$$

Effectuons le changement d'indice $i = k+1$; il vient :

$$P_n'(x+y) = \sum_{i=1}^{n} P_i'(x)P_{n-i}(y)$$

Fixons y et intégrons par rapport à x :

$$P_n(x+y) - P_n(y) = \sum_{i=1}^{n} (P_i(x) - P_i(0))P_{n-i}(y)$$

On conclut avec $P_i(0) = 0$ pour $i \geqslant 1$ et $P_n(y) = P_n(y)P_0(x)$.

3. Écrivons le DL à l'ordre $n \geqslant 1$ de la fonction u, soit :

$$u(t) = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots a_n t^n + o(t^n) = Q_n(t) + o(t^n)$$

L'application $t \mapsto xu(t)$ s'annule en $t = 0$; cela entraîne que $t \mapsto \mathrm{e}^{xu(t)}$ admet un DL en 0 à l'ordre n, obtenu en tronquant à l'ordre n le polynôme $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}(Q_k(t))^k$.

L'unicité de chaque polynôme P_n est déduite de l'unicité du DL.

b) À l'ordre 1, $\mathrm{e}^{xu(t)} = \mathrm{e}^{xa_1t+o(t)} = 1 + a_1xt + t\varepsilon_1(x,t)$.

Donc $P_0 = 1$ et $P_1(X) = a_1X \neq 0$, car $a_1 \neq 0$.

De plus, comme $\mathrm{e}^{(x+y)u(t)} = \mathrm{e}^{xu(t)}\mathrm{e}^{yu(t)}$, la relation (3) se déduit de l'unicité du DL et de la définition du produit de polynômes.

c) Pour $u(t) = \ln(1+t)$, on a $u(0) = 0, u'(0) = 1$ et :

$$\mathrm{e}^{x u(t)} = (1+t)^x = 1 + \sum_{k=1}^{n} P_k(x) t^k + t^n \varepsilon_n(x,t)$$

avec :

$$P_0(X) = 1, \text{ et pour tout } k \geqslant 1, P_k(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$