1

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

1. b) On suppose que la variable aléatoire X admet une espérance notée $E(X)$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.

En déduire que la série de terme général $P(X > n)$ converge et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n) = E(X).$$

1. c) On suppose que la série de terme général $P(X > n)$ converge. Montrer que la série de terme général $kP(X = k)$ converge et que X admet une espérance.

1. d) Énoncer le théorème qui vient d'être établi.

2. Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p ; de plus, s'il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes mais s'il n'en donne pas, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.

Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires et qu'elles sont mutuellement indépendantes.
On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri des n narcisses.

2. a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$, et calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X > k)$.

2. b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série.

3. Déterminer un équivalent simple de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
On utilisera des intégrales bien choisies de la fonction $x \mapsto 1 - \big(1-(1-p)^x\big)^n$ *ainsi que le changement de variable* $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$.

Solution :

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} kP(X > k)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)P(X > j) - \sum_{j=0}^{n} jP(X > j)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) - nP(X > n)\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant nP(X > n) = n \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} P(X = k) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} kP(X = k)$ (la dernière série converge, car X admet une espérance).

Comme le reste d'ordre n d'une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, il vient par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} nP(X > n) = 0$$

Il résulte alors du a) que la série de terme général $P(X > n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = E(X)$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} P(X > j)$ (car la dernière série est à termes positifs et convergente).

On en conclut que la série de terme général positif $kP(X = k)$ converge et donc que X admet une espérance.

d) On vient de montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > n)$ converge et dans ce cas :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n)$$

2 a) Il est clair que $X = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Soit $k \in \mathbb{N}$; par indépendance on a :

$P(X \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \leqslant k) = \prod_{j=1}^{n} [1-(1-p)^k] = [1-(1-p)^k]^n$, ainsi :

$$P(X > k) = 1 - [1-(1-p)^k]^n$$

b) $\lim_{k\to\infty} (1-p)^k = 0$ et on sait qu'au voisinage de 0 (pour h) : $(1+h)^n - 1 \sim nh$

En conséquence : $P(X > k) \underset{(k\to\infty)}{\sim} n(1-p)^k$

Il s'ensuit que la série de terme général positif $P(X > n)$ converge, puisque celui-ci est équivalent au terme général d'une série géométrique convergente.

On conclut que X admet une espérance, avec :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-(1-p)^k)^n]$$

3. la fonction $f : x \mapsto 1 - (1-(1-p)^x)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \geqslant 0$:

$$f'(x) = n(1-(1-p)^x)^{n-1}(1-p)^x \ln(1-p) \leqslant 0$$

Donc f est décroissante et pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{m+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{m} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^m f(x)\,dx$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Le changement de variable $x = \dfrac{\ln(1-t)}{\ln(1-p)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1-(1-p)^m]$ vers $[0, m]$ et donne :

$$\int_0^m f(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(1-p)} \int_0^{1-(1-p)^m} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = -\frac{1}{\ln(1-p)} \Big[\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} \Big]_0^{1-(1-p)^m}$$

Quand m tend vers l'infini, $1-(1-p)^m$ tend vers 1 et donc l'intégrale $\int_0^m f(x)\,dx$ tend vers $-\dfrac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

En passant à la limite lorsque m tend vers $+\infty$, on obtient donc :

$$-\frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant E(X) \leqslant 1 - \frac{1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On conclut classiquement que l'on a :

$$E(X) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -\frac{\ln n}{\ln(1-p)}$$

Exercice 3.2.

Une urne U_1 contient n boules blanches et une urne U_2 contient n boules noires.

On tire à chaque tirage simultanément une boule dans U_1 que l'on met dans U_2 et une boule dans U_2 que l'on met dans U_1.

On note, pour $k \geqslant 1$, X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage, et X_0 la variable constante égale à n.

On pose, pour $k \geqslant 0$, $Z_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix}$.

1. a) Déterminer la matrice A_n telle que, pour $k \geqslant 1$, $Z_k = \dfrac{1}{n^2} A_n Z_{k-1}$.

b) Quelle est la probabilité qu'au bout de n tirages on n'ait que des boules noires dans U_1 ? Quel(s) coefficient(s) de A_n^n peut-on en déduire ?

2. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Etudier la suite de terme général $E(X_k)$.

b) Montrer que $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A_2.

c) En remarquant que $Z_0 = \frac{1}{6} Y_1 + \frac{1}{3} Y_2 - \frac{1}{2} Y_3$, déterminer Z_k pour $k \geqslant 1$.

d) En déduire, pour $0 \leqslant i \leqslant 2$, la limite de $P(X_k = i)$ lorsque k tend vers l'infini.

Solution :

1. a) Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on peut écrire

$$P(X_k = i) = \sum_{j=0}^{n} P(X_k = i / X_{k-1} = j) P(X_{k-1} = j)$$

Or, si $i \notin \{j-1, j, j+1\}$, $P(X_k = i / X_{k-1} = j) = 0$ et

$$P(X_k = j-1 / X_{k-1} = j) = \frac{j^2}{n^2} \,;\, P(X_k = j / X_{k-1} = j) = \frac{2j(n-j)}{n^2} \,;$$

$$P(X_k = j+1 / X_{k-1} = j) = \frac{(n-j)^2}{n^2}$$

Donc :

$$P(X_k = 0) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = 1), P(X_k = n) = \frac{1}{n^2} P(X_{k-1} = n-1) \,;$$

et pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$P(X_k = i) = \frac{(n-i-1)^2}{n^2} P(X_{k-1} = i-1) + \frac{2i(n-i)}{n^2} P(X_{k-1} = i) \\ + \frac{(i+1)^2}{n^2} P(X_{k-1} = i+1)$$

ce qui donne :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n^2 & 2(n-1) & 2^2 & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & (n-1)^2 & 4(n-2) & 3^2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 2^2 & 2(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1^2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Le nombre de boules blanches dans U_1 diminue d'au plus une unité à chaque tirage. Il diminue de n en n tirages si et seulement s'il diminue d'une unité à chaque tirage, c'est-à-dire si et seulement si à chaque tirage on tire une boule noire de U_2 et une boule blanche de U_1.
Ainsi :

$$P(X_n = 0) = \prod_{k=0}^{n} \frac{(n-k)^2}{n^2} = \frac{(n!)^2}{n^{2n}}$$

or : $Z_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)^n A_n^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, est de premier coefficient $P(X_n = 0)$

On en déduit que le coefficient $A_{1,n+1}$ de A_n^n vaut $(n!)^2$.

2. Il vient $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix} = \frac{1}{4} A_2 \begin{pmatrix} P(X_{k-1} = 0) \\ P(X_{k-1} = 1) \\ P(X_{k-1} = 2) \end{pmatrix}$

a) Un calcul élémentaire donne, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} E(X_k) &= P(X_k = 1) + 2P(X_k = 2) \\ &= P(X_{k-1} = 0) + \frac{1}{2} P(X_{k-1} = 1) + P(X_{k-1} = 2) + 2\frac{1}{4} P(X_{k-1} = 1) \\ &= P(X_{k-1} = 0) + P(X_{k-1} = 1) + P(X_{k-1} = 2) = 1 \end{aligned}$$

b) Il suffit d'effectuer le calcul pour voir que :

$$A_2 Y_1 = 4Y_1, A_2 Y_2 = -2Y_2, A_2 Y_3 = 0$$

c) On a :

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{1}{4^k} A_2^k Z_0 = \frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{6} A_2^k Y_1 + \frac{1}{3} A_2^k Y_2 - \frac{1}{2} A_2^k Y_3\right) = \frac{1}{4^k}\left(\frac{1}{6} 4^k Y_1 + \frac{1}{3}(-2)^k Y_2\right) \\ &= \frac{1}{6} Y_1 + \frac{1}{3 \times 2^k} (-1)^k Y_2 \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} Z_k = \dfrac{1}{6}Y_1$.

d) Par suite, on a : $\begin{cases} \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=0) = \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=2) = \dfrac{1}{6} \\ \lim\limits_{k\to+\infty} P(X_k=1) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Exercice 3.3.

On étudie dans une population une grandeur X suivant une loi uniforme sur un intervalle de longueur 1 : $[\theta,\theta+1]$ et on cherche à estimer θ.

On considère donc un échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ indépendant extrait de la loi uniforme sur $[\theta,\theta+1]$.

On pose $S_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ et $I_n = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.

1. Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. En remarquant que $I_n = -\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(-X_i)$, donner l'espérance et la variance de I_n.

3. On pose, pour $\alpha\in[0,1]$, $\Theta_n(\alpha) = \alpha(S_n-1)+(1-\alpha)I_n$.

a) Déterminer α pour que $\Theta_n(\alpha)$ soit un estimateur sans biais de θ. On note Θ_n l'estimateur ainsi obtenu.

b) En admettant que $\mathrm{Cov}(S_n,I_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$, calculer la variance de Θ_n.

4. On pose $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et $\Theta'_n = \overline{X_n} - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que Θ'_n est un estimateur sans biais et convergent de θ.

b) Si vous deviez estimer θ, quel estimateur choisiriez-vous et pourquoi ?

Solution :

1. On a $S_n(\Omega) = [\theta,\theta+1]$, et pour tout x de cet intervalle :

$$F_{S_n}(x) = P(S_n\leqslant x) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\leqslant x)\big) = [F_X(x)]^n = (x-\theta)^n$$

Ainsi, S_n admet comme densité :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1} & \text{si } x\in[\theta,\theta+1] \\ 0 & \text{si } x\notin[\theta,\theta+1] \end{cases}$$

Une intégration par parties donne

$$E(S_n) = \int_{\theta}^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}d\theta = \theta + \frac{n}{n+1}$$

puis $V(S_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $-X_i$ suit la loi uniforme sur $[-\theta - 1, -\theta]$. La loi de $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (-X_i)$ est celle d'une variable S_n correspondant à $\theta' = -\theta - 1$.

Son espérance est alors $-\theta - \dfrac{1}{n+1}$ et sa variance est $\dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$.

Enfin comme $I_n = -\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (-X_i)$, il vient :

$$E(I_n) = \theta + \frac{1}{n+1} \quad ; \quad V(I_n) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

3. a) Par linéarité de l'espérance, $\Theta_n(\alpha)$ est un estimateur sans biais de θ si et seulement si :

$$\theta + \frac{1-2\alpha}{n+1} = \theta, \text{ } i.e. \text{ } \alpha = \frac{1}{2}$$

b) On a :

$$V(\Theta_n) = \frac{1}{4} V(S_n) + \frac{1}{4} V(I_n) + \frac{1}{2} \operatorname{Cov}(S_n, I_n) = \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

4. a) Un calcul élémentaire donne $E(\Theta'_n) = E(\overline{X_n}) - \frac{1}{2} = \theta$.

De plus, $V(\Theta'_n) = V((\overline{X_n}) = \dfrac{1}{12n}$, qui admet pour limite 0 lorsque n tend vers l'infini.

Θ'_n est donc un estimateur sans biais et convergeant du paramètre θ.

b) On remarque que $V(\Theta'_n) \geqslant V(\Theta_n)$, car $\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant \dfrac{1}{12n}$ équivaut à $(n-1)(n-2) \geqslant 0$.

Donc Θ_n est plus fiable que Θ'_n.

Exercice 3.4.

Préliminaire :

tan désigne la fonction tangente. On pose $g(x) = \tan x$, pour tout réel x strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

Montrer que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque g^{-1} est notée Arc tan.

Montrer que Arc tan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arc}\tan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

En déduire que, pour tout réel strictement positif c, et pour tous réels A et B,

$$\int_A^B \frac{c}{c^2+t^2}\, dt = \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{B}{c}\right) - \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{A}{c}\right).$$

On se donne deux variables aléatoires X et Y indépendantes, de densités

respectives f_X et f_Y, avec $f_X(t) = \dfrac{a}{\pi(a^2+t^2)}$ et $f_Y(t) = \dfrac{b}{\pi(b^2+t^2)}$, pour tout réel t.
(a et b désignent deux réels strictement positifs.)
On pose $Z = \sup(X, Y)$, et $V = X^2$.

1. Vérifier que f_X et f_Y sont bien des densités de probabilité.

2. a) Déterminer une densité de Z.
 b) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

3. a) Déterminer une densité de V.
 b) La variable aléatoire V possède-t-elle une espérance ? Une variance ?

Solution :

Préliminaire :
La fonction $g = \tan$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $g'(x) = 1+\tan^2 x > 0$, donc g réalise une bijection strictement croissante de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur son image qui est $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque g^{-1}, notée $\operatorname{Arc}\tan$, réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, de classe $\mathcal{C}^1$, avec :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \operatorname{Arc}\tan'(t) = \frac{1}{g'(g^{-1}(t))} = \frac{1}{1+\tan^2(\operatorname{Arc}\tan t)} = \frac{1}{1+t^2}$$

On a alors, par le changement de variable $u = \dfrac{t}{c}$:

$$\int_A^B \frac{c}{c^2+t^2}\,dt = \big[\operatorname{Arc}\tan(\tfrac{t}{c})\big]_A^B = \operatorname{Arc}\tan\frac{B}{c} - \operatorname{Arc}\tan\frac{A}{c}$$

1. La fonction f_X est continue sur $\mathbb{R}$, positive et paire. D'après le préliminaire :

$$\int_0^A f_X(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arc}\tan\frac{A}{a} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(t)\,dt$ est convergente de valeur $\dfrac{1}{2}$; on conclut de même, par parité, sur $\mathbb{R}^-$ que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$ converge et vaut 1. Donc f_X est bien une densité de probabilité. Il ne semble pas nécessaire de recommencer pour f_Y.

2. a) Pour $t \in \mathbb{R}$, par définition du sup et indépendance de X et Y :

$$F_Z(t) = P(Z \leqslant t) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t) = F_X(t)F_Y(t)$$

Or, comme $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{Arc}\tan = -\pi/2$, on a :

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t \frac{a}{\pi(a^2+u^2)}\,du = \frac{1}{\pi}\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)$$

D'o :

$$F_Z(t) = \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{b}\big) + \frac{\pi}{2}\big)$$

Une densité f_Z de Z s'obtient alors par dérivation :

$$f_Z(t) = \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{a}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\frac{b}{b^2+t^2} + \frac{1}{\pi^2}\big(\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{t}{b}\big) + \frac{\pi}{2}\big)\frac{a}{a^2+t^2}$$

b) Au voisinage de $+\infty$, on a $f_Z(t) \sim \dfrac{a+b}{\pi}\dfrac{1}{t^2}$, donc $tf_Z(t) \sim \dfrac{a+b}{\pi}\dfrac{1}{t}$, qui est d'intégrale divergente pour la borne $+\infty$.
Ainsi Z n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance.

3. a) V est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, par parité de f_X, pour $u \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant u) = P(-\sqrt{u} \leqslant X \leqslant \sqrt{u}) = 2P(0 \leqslant X \leqslant \sqrt{u}) = 2\int_0^{\sqrt{u}} f_X(t)\,dt,$$

soit :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}^+, P(V \leqslant u) = \frac{2}{\pi}\operatorname{Arc}\tan\big(\frac{\sqrt{u}}{a}\big)$$

Par dérivation, une densité f_V de V est :

$$\forall\, u \leqslant 0, f_V(u) = 0\,;\ \forall\, u > 0, f_V(u) = \frac{a}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{u}(a^2+u)}$$

b) On a : $uf_V(u) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{a}{\pi}\,\dfrac{1}{u^{1/2}}$, ce qui prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} uf_V(u)\,du$ est divergente et suffit pour affirmer que V n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance.

Exercice 3.5.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On note F leur fonction de répartition commune.

1. Pour tout $n > 0$, on pose $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n en fonction de F et n.

2. Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = \lambda M_n - \ln n$
Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

3. Dans cette question, a désigne un réel strictement positif et on suppose que X_1 admet pour fonction de répartition :

$$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^a & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Pour tout $n > 0$, on pose $Z_n = n^{1/a}(M_n - 1)$.

Déterminer la limite en loi de la suite (Z_n).

Que retrouve-t-on lorsque $a = 1$?

Solution :

1. De manière classique :

$$F_n(x) = P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leqslant x) = P(\bigcap_{i=1}^{n} X_i \leqslant x)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = [F(x)]^n$$

2. On peut écrire :

$$P(Z_n \leqslant x) = P(\lambda M_n - \ln n \leqslant x) = P\big(M_n \leqslant \frac{x + \ln n}{\lambda}\big) = \big[F\big(\frac{x + \ln n}{\lambda}\big)\big]^n$$

Or :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$F_{Z_n}(x) = \begin{cases} \big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big)^n & \text{si } x + \ln n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, assez grand, on a $x + \ln n \geqslant 0$, et :

$$\ln\big[\big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big)^n\big] = n\ln\big(1 - \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n\big(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-x}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on a donc : $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Z_n}(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$

Ainsi pour tout x réel, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = G(x)$.

Pour terminer cette question, il suffit de vérifier que G est effectivement la fonction de répartition d'une variable à densité : la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est croissante sur $\mathbb{R}$, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$.

3. Selon le même principe :

$$P(Z_n \leqslant x) = P(n^{1/a}(M_n - 1) \leqslant x) = P(M_n \leqslant n^{-1/a}x + 1)$$
$$= F^n(n^{-1/a}x + 1).$$

- si $x \geqslant 0$, alors $F(n^{-1/a}x+1) = 1$, donc, pour tout n, $F^n(n^{-1/a}x+1) = 1$,
- si $x \leqslant 0$, alors pour n assez grand $-n^{1/a} \leqslant x$, et dans ce cas :

$$F(n^{-1/a}x + 1) = \big(1 - (-n^{-1/a}x)^a\big)^n = \big(1 - \frac{1}{n}(-x)^a\big)^n$$

qui admet comme limite $\mathrm{e}^{-(-x)^a}$ lorsque n tend vers l'infini.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = H(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(-x)^a} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il reste à vérifier que H est effectivement une fonction de répartition, ce qui ne pose pas de problème.

Lorsque $a = 1$, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$, et Z_n tend en loi vers une variable aléatoire Y de fonction de répartition :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

($-Y$ suit donc la loi exponentielle de paramètre 1).

Exercice 3.6.

On dispose d'une infinité de pièces. La $k^{\text{ème}}$ pièce donne Pile avec la probabilité $p_k \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q_k = 1 - p_k$. On effectue une infinité de lancers, le $k^{\text{ème}}$ lancer utilisant la $k^{\text{ème}}$ pièce.

Pour tout $n \geqslant 1$, on définit une variable aléatoire réelle Y_n par

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{si Face est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \\ 1 & \text{si Pile est tombé au } n^{\text{ème}} \text{ lancer} \end{cases}$$

On pose de plus $Y_0 = 0$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires définies par $X_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 1$:

$$X_n = n - \max\{0 \leqslant i \leqslant n \mid Y_i = 0\}$$

1. a) Que représente la variable aléatoire X_n ?

b) Déterminer la loi de X_n.

2. Soit T la variable aléatoire définie par $T = \inf\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$, si cet ensemble est non vide et $T = 0$ si $\{m \geqslant 1 \mid X_m = 0\}$ est vide.

a) Calculer la probabilité de l'événement $(T = 0)$.

b) Montrer que $P(T = 0) = 0$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}(1 - p_k)$ diverge.

3. On suppose désormais que pour tout $k \geqslant 1, p_k = p$. Pour $n \geqslant 1$, calculer la probabilité $P(T = n)$.
Quelle est la loi de $T - 1$? En déduire l'espérance de T.

Solution :

1. a) X_n représente la longueur de la dernière séquence de Pile, après le dernier Face, à l'issue du n-ième lancer (cette séquence pouvant être de longueur nulle).

b) On a $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. De plus :

- l'événement $(X_n = 0)$ est l'événement « le dernier lancer est Face » ; donc $P(X_n = 0) = 1 - p_n$.
- L'événement $(X_n = 1)$ correspond à « on a eu Pile au n-ième lancer et Face au $(n-1)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = 1) = p_n(1 - p_{n-1})$.
- Plus généralement, pour tout $k \geqslant 2$, l'événement $(X_n = k)$ correspond à « on a eu Pile aux lancers $n, n-1, \dots, n-k+1$ et Face au $(n-k)$-ième lancer » ; donc $P(X_n = k) = p_n p_{n-1} \dots p_{n-k+1}(1 - p_{n-k})$.

2. a) La variable aléatoire T représente l'instant d'apparition du premier Face. L'événement $(T = 0)$ est donc l'événement « pour tout $m \geqslant 1, X_m \neq 0$ », et on a $P(X_m \neq 0) = p_m$. Donc, par le théorème de limite monotone :

$$P(T=0) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{m=1}^{n}(X_m \neq 0)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} P(X_m \neq 0)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} p_m = \lim_{n\to+\infty} \prod_{m=1}^{n} (1-q_m)$$

b) Posons $u_n = \prod_{m=1}^{n}(1-q_m)$. On a $\ln u_n = \sum_{m=1}^{n} \ln(1-q_m)$.

- si la série $\sum q_m$ converge, alors, $\lim_{m\to+\infty} q_m = 0$ et $\ln(1-q_m) \sim q_m$.

Ceci implique que la série $\sum \ln(1-q_m)$ converge, donc que $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = a$ et

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^a > 0.$$

- si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell > 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln \ell$.

Ainsi la série $\sum \ln(1-q_m)$ converge, ce qui entrane $\lim_{n\to+\infty} \ln(1-q_m) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} q_m = 0$ et $\ln(1-q_m) \sim -q_m$.

Par la règle d'équivalence pour les séries à termes de signe fixe, la série $\sum q_m$ converge.

Ainsi $P(T=0) = 0$ si et seulement si $\sum q_m$ diverge.

3. On a $P(T=1) = 1-p$ et pour tout $n \geqslant 2, P(T=n) = p^{n-1}(1-p)$. Ainsi $T-1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$ et par propriété de l'espérance

$$E(T) = E(T-1) + 1 = 1 + \frac{1}{1-p}.$$

Exercice 3.7.

On définit une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels par :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \text{ et pour tout } k \geqslant 2 \quad P_k(X) = \prod_{i=0}^{k-1}(X-i)$$

1. Montrer que pour tout n entier naturel, il existe $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \dots, a_{n,n}$ tels que $X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$

Ces réels sont-ils déterminés de manière unique ?

2. Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$, et Y une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\{0, 1, \dots, n\}$.

Pour tout réel x strictement positif, on pose $G(x) = E(x^Y)$, où $E(Z)$ représente l'espérance d'une variable aléatoire Z.

a) Montrer que G est de classe C^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(1)) = E(P_k(Y))$, où $G^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction G.

b) En déduire que $E(Y^k) = \sum_{i=0}^{k} a_{i,k} G^{(i)}(1)$.

3. On suppose que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p. En utilisant uniquement les questions précédentes, calculer $E(Y^2)$ et $E(Y^3)$.

Solution :

1. La famille $(P_n)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de $(n+1)$ polynômes de degrés échelonnés ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Aussi, existe–t–il $(n+1)$ réels $a_{0,n}, a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ déterminés de manière unique tels que :

$$X^n = \sum_{k=0}^{n} a_{k,n} P_k(X)$$

2. Par le théorème de transfert :

$$G(x) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k)x^k$$

C'est une fonction polynomiale donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$G(1) = \sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1 = E(P_0(Y))$$

De plus :

$$G'(1) = \sum_{k=0}^{n} kP(Y=k) = E(Y) = E(P_1(Y)),$$

et pour tout $\ell \leqslant n$:

$$G^{(\ell)}(x) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\ldots(j-\ell+1)P(Y=j)x^{j-\ell}$$

donc :

$$G^{(\ell)}(1) = \sum_{j=\ell}^{n} j(j-1)\ldots(j-\ell+1)P(Y=j) = E(P_\ell(Y))$$

Par linéarité de l'espérance, il vient, pour tout k :

$$E(Y^k) = E\Big(\sum_{j=0}^{n} a_{j,n}P_j(Y)\Big) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}E(P_j(Y)) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}G^{(j)}(1)$$

3. Lorsque Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, il vient :
$G(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} x^k = (px+q)^n$, soit $G'(1) = np$.
De plus :
$X^2 = X(X-1)+X$, d'o : $E(Y^2) = G''(1) + G'(1) = n(n-1)p^2 + np$
Enfin $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$, donne :
$E(Y^3) = G'''(1) + 3G''(1) + G'(1) = n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np.$

Exercice 3.8.

On considère deux pièces truquées A et B ; A donne Pile avec la probabilité a $(0 < a < 1)$, et B donne Pile avec la probabilité b $(0 < b < 1)$.

On choisit une pièce au hasard et on la lance ; si l'on obtient Pile, on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On poursuit ce processus k fois ($k \geqslant 2$).

1. Déterminer la probabilité de lancer la pièce A au k-ième lancer.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile au k-ième lancer.

3. Déterminer la limite de cette probabilité lorsque k tend vers l'infini. Interpréter le résultat obtenu si l'on suppose maintenant $a = 1$ et $0 < b < 1$.

Solution :

1. Notons les événements :
A_n : « on lance la pièce A au n-ième lancer »,
B_n : « on lance la pièce B au n-ième lancer »,
C_n : « Pile sort au n-ième lancer ».
On peut écrire :

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}/A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}/B_n)P(B_n).$$

Or si on lance la pièce A au n-ième lancer, la probabilité de la relancer au coup suivant est égale à celle de faire Pile avec cette pièce, soit a. De même, si on lance la pièce B au n-ième lancer, la probabilité de relancer la pièce A au coup suivant est égale à celle de faire Face avec la pièce B, soit $(1-b)$. Donc :

$$P(A_{n+1}) = aP(A_n) + (1-b)(1-P(A_n)) = (a+b-1)P(A_n) + 1 - b$$

Le point fixe de cette récurrence arithmético-géométrique est $\ell = \dfrac{1-b}{2-a-b}$ et classiquement :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(A_k) = \ell + (a+b-1)^{k-1}\big(\frac{1}{2} - \ell\big)$$

2. De la même façon, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(C_k) &= P(C_k/A_k)P(A_k) + P(C_k/B_k)P(B_k) \\ &= aP(A_k) + b(1-P(A_k)) = (a-b)P(A_k) + b \end{aligned}$$

et il suffit de remplacer $P(A_k)$ par sa valeur.

3. Comme $a, b \in]0,1[$, on a $-1 < a+b-1 < 1$, donc $\lim\limits_{k\to+\infty} P(A_k) = \ell$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = (a-b)\ell + b = (a-b)\frac{1-b}{2-a-b} + b.$$

Ce raisonnement est encore valable lorsque $a = 1$ et $0 < b < 1$ (on a encore $-1 < a+b-1 < 1$) ; dans ce cas $\ell = 1$ et :

$$\lim_{k\to+\infty} P(C_k) = 1.$$

Ce résultat est logique ; en effet si on lance au départ la pièce A, on obtient Pile puisque $a = 1$, et on la relance. Ainsi tous les lancers s'effectueront avec la pièce A. On est donc certain d'obtenir Pile au k-ième lancer.

Par contre, si on commence avec la pièce B, comme $b < 1$, on finira presque sûrement par changer de pièce. A partir de ce moment on n'obtiendra que des Pile et on ne lancera plus que la pièce A. Donc, asymptotiquement, la probabilité de jouer avec la pièce A et de ne faire que des Pile vaut 1.

Exercice 3.9.

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$, et f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f : x \mapsto px^2 + 1 - p$$

1. Étudier les variations de f sur $[0, 1]$.

2. Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 1 - p$ et pour tout $n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

3. On considère une plante qui peut donner naissance à deux descendants avec la probabilité p ou à aucun descendant avec la probabilité $1 - p$. On s'intéresse à sa descendance et on note X_n le nombre de descendants issus de la n-ième génération, *i.e.* le nombre de descendants de la plante à la $(n+1)$-ième génération.

a) Exprimer, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0)$ en fonction de u_n.

b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 0)$. Interpréter le résultat trouvé.

Solution :

1. f est dérivable et $f'(x) = 2px$, donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 1 - p$ et $f(1) = 1$.

2. $\star$ $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, donc (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0, 1]$.
$\star$ La fonction f étant croissante, la suite (u_n) est monotone, et comme :

$$u_1 = p(1-p)^2 + 1 - p = (1-p)(p(1-p)+1) > 1 - p = u_0,$$

la suite (u_n) est croissante et comme elle est bornée elle converge.

$\star$ $f(x) = x \iff px^2 - x + 1 - p = 0 \iff x \in \{1, \dfrac{1-p}{p}\}$, mais la seconde racine $r = \dfrac{1-p}{p}$, qui est positive, appartient à $[0, 1]$ si et seulement si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, la suite (u_n) est croissante bornée, donc converge vers l'unique point fixe de f, à savoir 1.

Si $p > \dfrac{1}{2}$, alors $u_0 = 1 - p < \dfrac{1-p}{p} = r < 1$. Par croissance de f on en déduit par récurrence : $\forall\, n, u_n < r$ et la suite (u_n) converge vers r.

3. a) $\star$ $p_0 = P(X_0 = 0) = 1 - p$;
Pour $n \in \mathbb{N}$, utilisons le système complet $\big((X_0 = 0), (X_0 = 2)\big)$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(X_{n+1} = 0) \\ &= P(X_0 = 0)P(X_{n+1} = 0/X_0 = 0) + P(X_0 = 2)P(X_{n+1} = 0/X_0 = 2) \end{aligned}$$

Or $P(X_{n+1} = 0/X_0 = 0) = 1$ (s'il n'y a pas de descendants à la première génération, il n'y en aura pas plus tard) ;
$P(X_{n+1} = 0/X_0 = 2) = [P(X_n = 0]^2$, car cela signifie que chacun des deux descendants de première génération n'a pas de descendant de n-ième génération et on conclut par indépendance.

Ainsi $p_{n+1} = (1-p) + p.p_n$ et la suite (p_n) vérifie la même relation de récurrence que la suite (u_n). Comme les termes initiaux sont les mêmes, on conclut :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P(X_n = 0) = u_n$$

b) Par conséquent :

si $p \leqslant \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0) = 1$, et si $p > \dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = 0) = \dfrac{1-p}{p}$

Ceci n'est pas étonnant, car $2p$ est l'espérance du nombre de descendants directs de chaque plante. Ainsi, si $2p < 1$, la tendance est à la raréfaction et on s'attend à ce que l'espèce disparaisse, tandis que si $2p > 1$, la disparition est possible mais n'est pas quasi-certaine.

Exercice 3.10.

Pour tout a réel, on pose : $M_a = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & -3 \end{pmatrix}$

1. a) Déterminer en fonction de a les valeurs propres de M_a, considérée comme élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

b) Pour quelles valeurs de a ces valeurs propres sont–elles réelles ?

c) Pour quelles valeurs de a, la matrice M_a est–elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 2]$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & -X(\omega) \\ X(\omega) & -3 \end{pmatrix}$$

Soit Y la variable aléatoire définie par « $Y(\omega)$ est la plus grande des valeurs propres de M_ω ».
Déterminer une densité de la loi de Y.

Solution :

1. a) Un calcul rapide montre que les valeurs propres de M_a sont $\lambda = -1 - \sqrt{4-a^2}$ et $\mu = -1 + \sqrt{4-a^2}$. Ces valeurs propres sont réelles si et seulement si $|a| \leq 2$.

b) Lorsque $a \notin \{-2, 2\}$, ces deux valeurs propres sont distinctes et M_a est diagonalisable. Les sous-espaces propres associés sont $E_\lambda = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 - \sqrt{4 - a^2} \\ a \end{pmatrix}$ et $E_\mu = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{4 - a^2} \\ a \end{pmatrix}$.

Lorsque $a \in \{-2, 2\}$, il existe une unique valeur propre valant -1. Les matrices M_2 et M_{-2} ne sont pas diagonalisables car autrement seraient égales à $-I$, ce qu'elles ne sont pas.

2. D'après la question précédente, $Y = -1 + \sqrt{4 - X^2}$ et Y prend ses valeurs entre -1 et 1.
La fonction $t \mapsto -t^2$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$, donc la fonction $f : t \mapsto -1 + \sqrt{4 - t^2}$ également.
Comme f est continue strictement décroissante sur $[0, 2]$, elle induit une bijection de $[0, 2]$ sur son image $[-1, 1]$. On a, pour $x \in [-1, 1]$:

$$P(Y \leqslant x) = P(X \geqslant f^{-1}(x)) = 1 - P(X < f^{-1}(x)) = 1 - P(X \leqslant f^{-1}(x))$$

Ainsi : $F_Y(x) = 1 - F_X(f^{-1}(x))$.

Un calcul élémentaire donne $f^{-1}(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ (on doit prendre la solution positive de l'équation en t : $-1 + \sqrt{4 - t^2} = x$).

On a alors $(f^{-1})'(x) = -\dfrac{1 + x}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$.

Comme $f_Y(x) = -f_X(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = -\frac{1}{2}(f^{-1})'(x)$, une densité de Y est donc :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + x}{2\sqrt{3 - 2x - x^2}} & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.11.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire à valeurs réelles, de fonction de répartition F définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x/2}(1 + \dfrac{x}{2}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

1. La fonction F est–elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$. Interpréter ce résultat.

3. Déterminer une densité de probabilité f de X.

4. Étudier les variations de f et représenter l'allure du graphe de cette fonction.

Solution :

1. La fonction F est manifestement continue sur $\mathbb{R}^*$. Sa continuité en 0 se déduit des limites à droite et à gauche en ce point qui sont nulles.

2. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\big(1+\frac{x}{2}\big)=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, ce qui n'a rien de surprenant puisque F représente une fonction de répartition !

3. Pour déterminer une densité f de X, il suffit de dériver F, soit :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x/2}\big(1+\frac{x}{2}\big) & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

ou encore :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{4}x.\mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Notons que l'on obtient bien une fonction positive !

4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, est nulle sur $\mathbb{R}_-$ et tend vers 0 en $+\infty$. De plus pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-x/2}-\dfrac{1}{8}x.\mathrm{e}^{-x/2}=\dfrac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-x/2}(2-x)$.

On en déduit que f est croissante sur $]-\infty,2]$ et décroissante sur $[2,+\infty[$ et donc que F est convexe sur le premier intervalle et concave sur le second.

Exercice 3.12.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases} C.\mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } x\in[-1,1]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

1. a) Déterminer la constante C pour que f soit une densité de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi admettant f pour densité.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X admette f pour densité et telles que Y suive une loi uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$. Déterminer la loi suivie par la variable $X-Y$.

3. Le livreur L d'un supermarché décide de passer livrer chez Madame M entre 9h et 11h du matin ; il attendra M pendant 15 minutes (si elle n'est pas là !). Pour sa part M rentrera chez elle entre 9h et 11h et y restera pendant une demi-heure. On prend comme origine des temps 10h et comme unité l'heure. On suppose que L et M agissent indépendamment et que leurs instants d'arrivée chez M sont des variables aléatoires qui suivent respectivement une loi de densité f, et une loi uniforme sur le segment $[-1,1]$.

Calculer la probabilité que M soit livrée par L.

Solution :

1. a) La fonction f est positive pour $C\geqslant 0$, continue sur $\mathbb{R}$, sauf en -1 et 1, points o elle admet une limite à gauche et une limite à droite. Pour que

f soit une densité de probabilité, il suffit de vérifier que son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1. Or :

$$C\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|x|}dx = 1 \Longleftrightarrow 2C\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-x}dx = 1 \Longleftrightarrow C = \frac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$$

Il faut donc prendre $C = \dfrac{\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$.

b) Par symétrie X est d'espérance nulle et un calcul élémentaire (par intégration par parties) donne :

$$V(X) = \frac{2\mathrm{e}-5}{\mathrm{e}-1}.$$

2. Comme Y suit la loi uniforme sur $[-1,1]$, $-Y$ suit également la loi uniforme sur $[-1,1]$. Comme $X-Y = X+(-Y)$ et X et $-Y$ sont indépendantes, on peut obtenir une densité f_{X-Y} de $X-Y$ par convolution :

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\,dt = C\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-|t|}f_Y(x-t)\,dt$$

Or $f_Y(u) = \dfrac{1}{2}$ si $-1 \leqslant u \leqslant 1$ et 0 sinon.
Comme $x-t \in [-1,1] \Longleftrightarrow t \in [x-1,x+1]$, il convient de distinguer plusieurs cas :

- si $x > 2$, alors $x-1 > 1$ et $f_{X-Y}(x) = 0$,
- si $x \in [1,2]$, alors $[x-1,x+1]\cap[-1,1] = [x-1,1]$ inclus dans $[0,1]$ et :

$$f_{X-Y}(x) = \frac{C}{2}\int_{x-1}^{1} \mathrm{e}^{-t}dt = \frac{C}{2}(\mathrm{e}^{1-x} - \mathrm{e}^{-1})$$

- si $x \in [0,1]$, alors $[x-1,x+1]\cap[-1,1] = [x-1,1]$, mais ici $x-1 \leqslant 0$, donc :

$$f_{X-Y}(x) = \frac{C}{2}\int_{x-1}^{0} \mathrm{e}^{t}dt + \frac{C}{2}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-t}dt = \frac{C}{2}(2 - \mathrm{e}^{x-1} - \mathrm{e}^{-1})$$

Enfin, on remarque que $X-Y$ est une variable aléatoire paire (puisque X et $-Y$ le sont), donc f est paire, ce qui évite de considérer le cas $x \leqslant 0$.

3. Soit X la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée de L et Y la variable aléatoire égale à l'instant d'arrivée de M. Ainsi l'événement « L et M se rencontrent » est l'événement « $\left[X, X+\frac{1}{4}\right] \cap \left[Y, Y+\frac{1}{2}\right] \neq \emptyset$ », ce qui est équivalent à :

$$-\frac{1}{4} < X - Y < \frac{1}{2}$$

Ainsi la probabilité p que M soit livrée est égale à :

$$\int_{-1/4}^{1/2} f_{X-Y}(x)dx = \frac{C}{2}\int_{-1/4}^{0}(2-\mathrm{e}^{-x-1}-\mathrm{e}^{-1})dx + \frac{C}{2}\int_{0}^{1/2}(2-\mathrm{e}^{-x-1}-\mathrm{e}^{-1})dx$$

Soit :

$$p = \frac{\mathrm{e}}{4(\mathrm{e}-1)}\left(\frac{3}{2} + \frac{5\mathrm{e}^{-1}}{4} - \mathrm{e}^{-1/2} - \mathrm{e}^{-3/4}\right)$$

Exercice 3.13.

Soient n et r deux entiers strictement positifs. Lors de la kermesse d'une association, n personnes sont présentes. On tire r fois au sort une personne (avec remise) pour offrir r lots aux personnes présentes.

1. a) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité qu'une personne donnée P_1 ne reçoive aucun lot.

b) Soit k un entier inférieur strictement à n. Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que les personnes $P_1, P_2, \ldots, P_k$ ne reçoivent aucun lot.

2. a) Rappeler la formule du crible.

b) Calculer, en fonction de n et de r, la probabilité que chaque personne ait reçu au moins un lot.

3. a) Soit m un entier inférieur strictement à n. Déduire de la question précédente le calcul, en fonction de n, r et m, de la probabilité p_m qu'exactement m personnes, parmi les n personnes présentes, n'aient rien reçu.

b) Comment calculer la probabilité q_m qu'au moins m personnes n'aient rien reçu ?

Solution :

1. a) Notons A_i l'événement « la personne P_i n'a rien reçu ». Les tirages ayant lieu avec remise, à chaque tirage on évite la personne P_1 avec la probabilité $1 - \dfrac{1}{n}$ et par indépendance :

$$P(A_1) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^r$$

b) Le même raisonnement donne :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = \big(1 - \frac{k}{n}\big)^r$$

2. a) $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} S_i$, avec :

$$S_i = \sum_{1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_i \leqslant n} P(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \ldots \cap A_{n_i})$$

b) L'événement G : « Tout le monde gagne au moins un lot » est l'événement contraire de l'événement $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Donc :

$$P(G) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

Dans l'application de la formule du crible, on remarque que la somme S_i comporte C_n^i termes qui valent tous $\big(1 - \frac{i}{n}\big)^r$, soit en intégrant le premier terme « 1 » à la sommation :

$$P(G) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k \big(1 - \frac{k}{n}\big)^r$$

3. a) $p_m = P\Big(\bigcup_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n}\big[(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})\bigcap(\bigcap_{j\notin\{i_1,\ldots,i_m\}}\overline{A_j})\big]\Big)$
(en clair : on choisit de toutes les façons possibles les m personnes qui ne reçoivent rien et les autres reçoivent quelque chose).
La réunion étant disjointe :
$p_m = \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_m\leqslant n} P\big((A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})\bigcap(\bigcap_{j\notin\{i_1,\ldots,i_m\}}\overline{A_j})\big)$
Tous les événements ayant la même probabilité :

$$\begin{aligned}p_m &= \mathrm{C}_n^m.P\big(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m\cap\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}\big)\\ &= \mathrm{C}_n^m P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)P(\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)\\ &= \mathrm{C}_n^m\big(1-\frac{m}{n}\big)^r.P(\overline{A_{m+1}}\cap\ldots\cap\overline{A_n}/A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m)\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer le résultat de 2. b) avec $n-m$ personnes au lieu de n :

$$p_m = \mathrm{C}_n^m\big(1-\frac{m}{n}\big)^r\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\mathrm{C}_{n-m}^k\big(1-\frac{k}{n-m}\big)^r, \text{ soit :}$$

$$p_m = \mathrm{C}_n^m\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\mathrm{C}_{n-m}^k\big(1-\frac{m+k}{n}\big)^r$$

b) On a $q_m = \sum_{k=m}^{n-1} p_k$ (car p_n est nul).

Exercice 3.14.

Soit $E=\mathbb{R}[X]$. On pose $Q_0=1$, $Q_1=X$ et pour $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geqslant 2$, $Q_k=X(X-1)\ldots(X-k+1)$.

1. Montrer que la famille $\mathcal{B}=(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de E.

2. On note F l'ensemble des polynômes $P\in E$ tels que $p_n=\dfrac{P(n)}{\mathrm{e}.n!}$ définisse une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire qu'il existe Y telle que $Y(\Omega)\subset\mathbb{N}$ et $\forall n, P(Y=n)=p_n$). Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $Q_k\in F$.

3. Montrer que F est convexe, c'est-à-dire que si $P_1,P_2\in F$ et $\lambda\in[0,1]$, alors $\lambda P_1+(1-\lambda)P_2\in F$. En déduire que si $P\in E$ a pour degré p et si $P=\sum_{k=0}^{p}\alpha_kQ_k$ avec $\alpha_k\in[0,1]$ et $\sum_{k=0}^{p}\alpha_k=1$, alors $P\in F$.

4. Soit $P=\sum_{k=0}^{p}\alpha_kQ_k\in F$ avec $\alpha_k\in[0,1]$ et $\sum_{k=0}^{p}\alpha_k=1$ et soit Y une variable aléatoire suivant la loi de probabilité associée.
Écrire XQ_k dans la base $\mathcal{B}$. En déduire l'espérance de Y en fonction des α_k.

Solution :

1. La famille $\mathcal{B}$ est graduée en degrés, donc est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $Q_k(n)$ n'est non nul que pour $n \geqslant k$ et est alors positif. La convergence étant évidente, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e} = 1$$

Donc $Q_k \in F$.

3. Si P_1 et P_2 sont dans F, alors pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2$ est à valeurs positives ou nulles sur $\mathbb{N}$ et, toutes les convergences étant encore évidentes, on peut « casser » la sommation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2](n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_1(n)}{\mathrm{e}.n!} + (1-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_2(n)}{\mathrm{e}.n!} = \lambda + (1-\lambda) = 1$$

Donc $\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \in F$.

De la même façon, si $P_1, \dots, P_n$ appartiennent à F et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs de somme 1, alors $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n \in F$.

Comme $Q_0, \dots, Q_p$ appartiennent à F, on a la conclusion voulue.

4. On a $XQ_k = Q_{k+1} + kQ_k$. Si on note Z_k une variable aléatoire suivant la loi associée à Q_k, on a :

$$E(Z_k) = \sum_{n=0}^{\infty} n\frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{k+1}(n)}{\mathrm{e}.n!} + k\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_k(n)}{\mathrm{e}.n!} = 1 + k$$

Par linéarité de l'espérance, on conclut :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(1+k) = 1 + \sum_{k=0}^{n} k\alpha_k$$

Exercice 3.15.

On observe depuis le bord d'une route R à sens unique le passage des voitures à partir d'un instant 0.

On note T_1 la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture, puis pour tout $n \geqslant 2$, T_n le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture.

On suppose que les T_k sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda} > 0$.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le temps d'attente de la $n^{\text{ème}}$ voiture. Y_0 est la variable certaine égale à 0.

Rappeler la loi de Y_n, son espérance et sa variance.

b) Pour tout $T > 0$, on note C_T la variable égale au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et T.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, comparer les événements $[C_T \geqslant k]$ et $[Y_k \leqslant T]$.

En déduire une expression intégrale de $P[C_T \geqslant k]$ puis, à l'aide d'une intégration par parties, la loi de C_T.

2. Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose que le point d'observation se situe à la jonction de deux routes R et R' (à sens unique).

On note T_1 (resp. T'_1) la variable aléatoire égale au temps d'attente de la première voiture venant de R (resp. de R'), puis pour tout $n \geqslant 2$, T_n (resp T'_n) le temps de passage entre la $(n-1)^{\text{ème}}$ et la $n^{\text{ème}}$ voiture venant de R (resp de R').

On suppose que les T_k (resp. les T'_k) suivent la loi exponentielle d'espérance $\dfrac{1}{\lambda}$ (resp. d'espérance $\dfrac{1}{\lambda'}$).

On suppose en outre l'indépendance mutuelle de toutes ces variables.

a) Pour tout $T > 0$ on note C_T et C'_T les variables respectivement égales au nombre de voitures passant devant le point d'observation entre les instants 0 et T venant de R et de R'.

On note S_T la variable $C_T + C'_T$ égale au nombre total de voitures passant devant l'observateur.

Quelle est la loi de S_T ?

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de C_T conditionnellement à $[S_T = n]$.

Une voiture passe. Quelle est la probabilité qu'elle vienne de la route R ?

Solution :

1. a) Les variables T_k suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, c'est-à-dire la loi Γ de paramètres 1 et $\dfrac{1}{\lambda}$. Par indépendance supposée, on en déduit que $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$ suit la loi $\Gamma(n, \dfrac{1}{\lambda})$, d'espérance $\dfrac{n}{\lambda}$ et de variance $\dfrac{n}{\lambda^2}$.

Rappelons qu'une densité de Y_n est $t \mapsto \dfrac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\, t^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, pour $t \geqslant 0$ et 0 sinon.

b) De façon évidente, $(C_T \geqslant k) = (Y_k \leqslant T)$, d'o, pour $k \geqslant 1$ et $T \geqslant 0$:

$$P(C_T \geqslant k) = \int_0^T \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\, t^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

et en intégrant par parties pour $k \geqslant 2$:

$$P(C_T \geqslant k) = \Big[-\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\, \lambda^{k-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} \Big]_0^T + \int_0^T \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!}\, t^{k-2}\mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

c'est-à-dire : $P(C_T \geqslant k) = -\dfrac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda T} + P(C_T \geqslant k-1)$

or : $P(C_T \geqslant k-1) - P(C_T \geqslant k) = P(C_T = k-1)$, d'o :

$$P(C_T = k-1) = \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda T}$$

Le résultat reste valable pour $k = 1$ et $C_T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda T)$.

2. a) C_T et C'_T étant indépendantes, par stabilité des lois de Poisson :

$$C_T + C'_T \hookrightarrow \mathcal{P}((\lambda+\lambda')T)$$

b) Pour $k > n$, $P(C_T = k/S_T = n) = 0$ et pour $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(C_T = k/S_T = n) &= \frac{P[(C_T = k) \cap (S_T = n)]}{P(S_T = n)} \\ &= \frac{P[(C_T = k) \cap (C'_T = n-k)]}{P(S_T = n)} \\ &= \frac{(\lambda T)^k}{k!} \frac{(\lambda' T)^{n-k}}{(n-k)!} \mathrm{e}^{-(\lambda+\lambda')T} \frac{n!}{[(\lambda+\lambda')T]^n} \mathrm{e}^{(\lambda+\lambda')T} \\ &= \mathrm{C}_n^k \Big(\frac{\lambda}{\lambda+\lambda'}\Big)^k \Big(\frac{\lambda'}{\lambda+\lambda'}\Big)^{n-k} \end{aligned}$$

Ainsi la loi conditionnelle de C_T conditionnée par la réalisation de l'événement $(S_T = n)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda'})$.

En particulier $P(C_T = 1/S_T = 1) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\lambda'}$.

Exercice 3.16.

Pour toute variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ et pour $B \in \mathcal{B}$ tel que $P(B)0$, sous réserve d'existence, on note $E(X/B)$ et on appelle espérance conditionnelle de X à B, l'espérance de X pour la loi conditionnelle à B.
On admet le résultat suivant :
Si X est une variable aléatoire quelconque et N une variable discrète telle que $N(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour tout n, $E(X/N = n)$ existe alors $E(X)$ existe et vaut $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P(N = n)E(X/N = n)$

A l'instant 0 un piéton se trouve sur le bord d'une route à sens unique qu'il désire traverser.
On note T_1 la variable aléatoire égale au temps qui s'écoule entre le début de l'expérience et le passage de la première voiture, puis plus généralement, T_i pour $2 \leqslant i$, le temps entre le passage de la $(i-1)^{\text{ème}}$ voiture et la $i^{\text{ème}}$.
On suppose que les T_i sont indépendantes et suivent une loi exponentielle de paramètre λ.
Prudent, le piéton décide de ne traverser à l'instant t que si la première voiture visible est éloignée de lui de plus d'une certaine distance de sécurité. Le temps mis pour parcourir cette distance par une voiture est a.
On note X la variable égale à l'instant où le piéton va traverser la route et N le nombre de voitures qui passeront avant qu'il ne puisse le faire.
On pose $p = \mathrm{e}^{-\lambda a}$, $q = 1 - p$.

1. a) Comparer $[X = 0]$ et $[T_1 > a]$. En déduire $P[X = 0]$ et $P[N = 0]$ en fonction de p.

b) Pour $n \geqslant 1$ déterminer $P\big([T_1 \leqslant a] \cap [T_2 \leqslant a] \cap \ldots \cap [T_n \leqslant a] \cap [T_{n+1} > a]\big)$ en fonction de p. En déduire la loi de N.

c) Soit $n \geqslant 1$.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $t > 0$ comparer les probabilités conditionnelles $P([T_i \leqslant t] \ / \ [N = n])$ et $P([T_i \leqslant t] \ / \ [T_i \leqslant a])$.
Déterminer $P([T_i \leqslant t] \ / \ [T_i \leqslant a])$ (on distinguera les cas $t \leqslant a$ et $t > a$)
En déduire une densité de T_i pour cette loi conditionnelle.

2. a) Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, déterminer l'espérance de T_i pour la loi conditionnelle à $[N = n]$, $n \geqslant 1$.

b) Déterminer l'espérance conditionnelle de X conditionnellement à la réalisation de $[N = n]$.

c) En déduire l'espérance de X en fonction de a.

Solution :

1. a) De manière évidente $[X = 0] = [T_1 > a]$ et :

$$P(X = 0) = P(T_1 > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = p = P(N = 0).$$

b) Les variables aléatoires $(T_i)_i$ étant indépendantes, on a :
$P(T_i \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a} = q$ et $P(T_{n+1} > a) = \mathrm{e}^{-\lambda a} = p$. Donc

$$P[(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)] = q^n p$$

Comme $[N = n] = [(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)]$, N suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$.

c) On a :

$$\begin{aligned} P[T_i \leqslant t / N = n] &= P[T_i \leqslant t / (T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)] \\ &= \frac{P(T_i \leqslant t) \cap (T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)}{P(N = n)} \end{aligned}$$

et par indépendance des variables aléatoires en jeu et puisque

$$P(N = n) = P[(T_1 \leqslant a) \cap (T_2 \leqslant a) \cap \ldots \cap (T_n \leqslant a) \cap (T_{n+1} > a)],$$

il vient :

$$P[T_i \leqslant t / N = n] = \frac{P[(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a)]}{P[T_i \leqslant a]} = P(T_i \leqslant t / T_i \leqslant a)$$

Ainsi :

- si $t \leqslant a$, $(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a) = (T_i \leqslant t)$; donc $P(T_i \leqslant t / T_i \leqslant a) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}$,
- si $t > a$, $(T_i \leqslant t) \cap T_i \leqslant a) = (T_i \leqslant a)$, donc $P(T_i \leqslant t / T_i \leqslant a) = 1$.

Si l'on note f une densité de T_i pour la loi $P_{T_i \leqslant a}$, on peut prendre :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ou } t > a \\ \dfrac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) La loi conditionnelle de T_i conditionnellement à $(T_i \leqslant a)$ est la même que la loi conditionnelle de T_i conditionnellement à $(N = n)$. Aussi, à l'aide d'une intégration par parties :

$$E(T_i/N = n) = \int_0^a \frac{\lambda t}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}} \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}$$

b) On a : $E(X/N = n) = E(T_1 + T_2 + \cdots + T_n/N = n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(T_i/N = n)$

Soit :

$$E(X/N = n) = n\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}\right)$$

c) Par la propriété admise en début d'exercice :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} E(X/N = n)P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{a\mathrm{e}^{-\lambda a}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}}\right)pq^n$$
$$= \frac{e^{\lambda a} - 1 - \lambda a}{\lambda(e^{\lambda a} - 1)} pq \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{e^{\lambda a} - 1 - \lambda a}{\lambda(e^{\lambda a} - 1)} \times \frac{q}{p} \mp$$

Exercice 3.17.

On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un étang.
On prélève dans l'étang un échantillon de m poissons. On les marque et on les remet dans l'étang.
On propose deux méthodes différentes d'estimation de N.

Méthode 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant m$.
On prélève des poissons dans l'étang, au hasard et avec remise.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de poissons qu'il a été nécessaire de pêcher pour obtenir n poissons marqués.
Pour tout $2 \leqslant i \leqslant n$, on pose $D_i = X_i - X_{i-1}$. On pose de plus $D_1 = X_1$ et on suppose que les D_i sont des variables aléatoires indépendantes.
1. a) Déterminer, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la loi de D_i, son espérance et sa variance.
En déduire l'espérance et la variance de X_n.

b) On pose $A_n = \dfrac{m}{n} X_n$. Montrer que A_n est un estimateur sans biais de N.

2. a) Pour n assez grand, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_n}{n}$?

b) On a marqué 200 poissons, puis effectué 450 prélèvements pour obtenir 50 poissons marqués.
On pose $\sigma = \sigma(A_n)$, l'écart-type de A_n. On a pu prouver par ailleurs que $\sigma \leqslant 100$.
Déterminer, en fonction de σ, un intervalle de confiance pour N au seuil de $0,9$. (On donne $\Phi(1,64) \simeq 0{,}95$.)

Méthode 2

On prélève successivement et avec remise n poissons. Soit Y_n le nombre de poissons marqués parmi eux.
1. Montrer que $\frac{1}{nm}Y_n$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{N}$.

2. Pour quelle raison évidente ne peut-on prendre $\frac{nm}{Y_n}$ comme estimateur de N ?
On pose alors $B_n = \dfrac{m(n+1)}{Y_n+1}$.

a) Calculer l'espérance de B_n.

b) Est-il un estimateur sans biais de N ?

Solution :

Première méthode.

1. a) La variable aléatoire D_i représente le nombre de poissons que l'on a pêché pour obtenir un nouveau poisson marqué. Les prélèvements se faisant au hasard et avec remise, D_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{m}{N}\big)$. Ainsi :

$$E(D_i) = \frac{N}{m} \quad ; \quad V(D_i) = \frac{N(N-m)}{m^2}$$

De manière évidente, on a $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.
Par indépendance des variables aléatoires (D_i), il vient :

$$E(X_n) = n\frac{N}{m} \quad ; \quad V(X_n) = nV(D_i) = n\frac{N(N-m)}{m^2}$$

b) On a $E(A_n) = N$. Donc, A_n, fonction des (D_n) est un estimateur sans biais de N.

2. a) Par le théorème de la limite centrée, la loi de $\overline{X_n} = \frac{X_n}{n} = \frac{A_n}{m}$, peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(E(\overline{X_n}), \sigma(\overline{X_n}))$, soit $\mathcal{N}\big(\frac{N}{m}, \frac{\sigma}{m}\big)$, avec :

$$\sigma^2 = V(A_n) = \frac{N(N-m)}{n}.$$

b) Si T suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $P(|T| \leqslant 1{,}64) = 2\Phi(1{,}64) - 1 \simeq 0{,}9$.
Ainsi : $P\Big(-1.64 \leqslant \dfrac{\frac{X_n}{n} - \frac{N}{m}}{\frac{\sigma}{m}} \leqslant 1.64\Big) \simeq 0{,}9$, soit :

$$P\Big[\frac{mX_n}{n} - 1{,}64\sigma \leqslant N \leqslant \frac{mX_n}{n} + 1{,}64\sigma\Big] \simeq 0{,}9$$

Ici $m = 200$, $n = 50$ et on a réalisé $X = 450$. L'intervalle de confiance cherché est :

$$[1800 - 1{,}64\sigma, 1800 + 1{,}64\sigma]$$

Si $\sigma \leqslant 100$, cet intervalle est inclus dans $[1636, 1964]$.

Seconde méthode.

1. La variable aléatoire Y_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, m/N)$. Aussi :

$$E(Y_n) = \frac{nm}{N}, \text{ donc } E\big(\frac{Y_n}{nm}\big) = \frac{1}{N}$$

et $\frac{Y_n}{nm}$ est un estimateur sans biais de $\frac{1}{N}$.

2. La variable aléatoire Y_n peut prendre la valeur 0 avec une probabilité non nulle, donc $\frac{nm}{Y_n}$ n'est pas définie sur un ensemble de probabilité non nulle et n'a pas le statut de variable aléatoire.

a) Par le théorème de transfert :

$$E(B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \big(\frac{m}{N}\big)^k \big(1 - \frac{m}{N}\big)^{n-k} \times \frac{m(n+1)}{k+1}$$

Comme $\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$, il vient :

$$\begin{aligned} E(B_n) &= N \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^{k+1} \big(\frac{m}{N}\big)^{k+1} \big(1 - \frac{m}{N}\big)^{n+1-k-1} \\ &= N \sum_{k=1}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^{k} \big(\frac{m}{N}\big)^{k} \big(1 - \frac{m}{N}\big)^{n+1-k}, \text{ soit :} \end{aligned}$$

$$E(B_n) = N\big(1 - (1 - \frac{m}{N})^{n+1}\big)$$

b) De manière générale, B_n n'est pas un estimateur sans biais de N. En revanche $\lim_{n \to +\infty} E(B_n) = N$, donc B_n est asymptotiquement sans biais.

Exercice 3.18.

On se donne un tableau A à n éléments distincts ($n \geqslant 2$). Que fait l'algorithme suivant :

```
mini :=1 ; maxi :=1 ;
for j := 2 to n do
if A[j]<A[mini] then mini := j else
if A[j]>A[maxi] then maxi := j ;
```

1. Évaluer le nombre minimal, puis le nombre maximal de comparaisons faites.

On cherche à déterminer un équivalent du nombre de comparaisons faites en moyenne. Pour cela, on considère que A contient les éléments de $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on associe donc à chaque tableau une permutation sur E_n. On suppose enfin que toutes les permutations sont équiprobables.

2. Pour toute permutation σ, on appelle minimum local un entier j tel que :

$$\forall i, 1 \leqslant i < j \Rightarrow \sigma(i) > \sigma(j)$$

On convient que 1 est toujours un minimum local.
Exprimer le nombre de comparaisons effectuées par l'algorithme en fonction du nombre de minimum locaux de σ.

3. On note $u_{n,k}$ le nombre de permutations sur E_n qui possèdent k minimum locaux. Montrer que

$$\begin{cases} u_{n,0} = 0, \quad u_{n,n} = 1 \\ u_{n,k} = (n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1} \ (1 \leqslant k \leqslant n) \end{cases}$$

4. Soit (P_n) la famille de polynômes définie par

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k} x^k$$

a) Déterminer une relation de récurrence entre P_n et P_{n-1}. En déduire une expression de P_n.

b) Exprimer la dérivée P_n' en fonction de P_n.

5. Déterminer le nombre moyen de minimum locaux dans les permutations de E_n et en déduire un équivalent du nombre moyen de comparaisons de l'algorithme.

Solution :

L'algorithme proposé détermine la place dans le tableau du maximum et du minimum (mais pas leur valeur).

1. Le nombre minimal de comparaisons est obtenu si on ne fait jamais le second « if » (car on fera toujours le premier). Il vaut donc $(n-1)$ et c'est le cas lorsque les éléments du tableau A sont rangés par ordre décroissant.
Le nombre maximal de comparaisons est obtenu lorsqu'on effectue toujours les deux « if ». Il vaut $2(n-1)$: c'est le cas lorsque les éléments du tableau A sont rangés par ordre croissant.

2. Montrons que j est un minimum local si et seulement si $A[j] < A[\text{mini}]$:

- si $A[j] < A[\text{mini}]$, j sera le nouveau mini et pour $1 \leqslant i < j$, on a $\sigma(i) > \sigma(j)$ (puisque $\sigma(i) \geqslant \sigma(\text{mini})$).
- si pour $1 \leqslant i < j$, on a $\sigma(i) > \sigma(j)$, alors $\sigma(j) > \sigma(\text{mini})$.

Soit p le nombre de minimums locaux ; le nombre de comparaisons vaut alors : $(p-1) + 2((n-1)-(p-1)) = 2n - p - 1$.

3. Toute permutation possède au moins un minimum local ; donc $u_{n,0} = 0$.
Il n'y a qu'une permutation qui possède n minimums locaux : celle où les éléments sont rangés par ordre décroissant.
Notons $U_{n,k}$ l'ensemble des permutations sur E_n possédant k minimums locaux. On peut diviser cet ensemble en deux sous–ensembles disjoints :

- celui où le dernier élément n est un minimum local ; c'est en fait le minimum de la permutation ($\sigma(n) = 1$). Si on le supprime, il restera $(n-1)$ éléments avec $(k-1)$ minimums locaux ;

• celui où le dernier élément n n'est pas un minimum local ; on a $\sigma(n) = m$, avec $2 \leqslant m \leqslant n$. Si on le supprime, il restera $(n-1)$ éléments avec k minimums locaux et on a $(n-1)$ possibilités pour m.

Finalement, il vient :

$$u_{n,k} = (n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1}.$$

4. a) On a :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_{n,k}x^k = \sum_{k=1}^{n} ((n-1)u_{n-1,k} + u_{n-1,k-1})x^k$$
$$= (n-1)\sum_{k=1}^{n} u_{n-1,k}x^k + x\sum_{k=1}^{n} u_{n-1,k-1}x^{k-1} = (n-1+x)P_{n-1}(x)$$

Par une récurrence immédiate : $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1}(x+k)$.

b) Par dérivation d'un produit de facteurs, il vient :

$$P_n'(x) = P_n(x) \times \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x+k}\Big)$$

5. le nombre moyen de minimums locaux est :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} ku_{n,k} = \frac{P_n'(1)}{n!} = \frac{P_n(1)}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Il est classique (comparaison suite-intégrale) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n$.

Le nombre moyen de comparaisons est donc de l'ordre de $2n - \ln n$, donc est équivalent à $2n$.

Exercice 3.19.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $U_k = \min(X_1, \dots, X_k)$. Déterminer la loi de U_k.

2. Soit $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit N une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. On définit la variable aléatoire réelle V par :

$$V = \begin{cases} X_1 & \text{si } N = 0 \\ U_k & \text{si } N = k > 0 \end{cases}$$

Déterminer la loi de V et une densité de cette variable aléatoire.

Solution :

1. De manière classique et par indépendance des variables aléatoires en jeu :

$$P(U_k > x) = P(\bigcap_{i=1}^{k} X_i > x) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i > x) = \big(1 - F(x)\big)^k$$

où F représente la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.

Notons F_k la fonction de répartition de U_k. Alors :

$$F_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction $x \mapsto F_k(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et sa dérivée à une limite à droite et à gauche aux points limites. Ainsi, par dérivation U_k admet une densité f_k donnée par :

$$f_k(x) = \begin{cases} k(1-x)^k & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Utilisons le système complet d'événements $(N=k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. On peut écrire, pour tout x réel :

$$\begin{aligned} P(U \leqslant x) &= \sum_{k=0}^{n} P[(U \leqslant x) \cap (N=k)] \\ &= P[(X_1 \leqslant x) \cap (N=0) + \sum_{k=1}^{n} P[(U_k \leqslant x) \cap (N=k)]. \end{aligned}$$

Les variables aléatoires étant indépendantes de N, il vient pour tout x réel :

$$P(U \leqslant x) = P(X_1 \leqslant x)P(N=0) + \sum_{k=1}^{n} F_k(x)P(N=k)$$

Aussi, $P(U \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, et si $x \in [0,1]$:

$$P(U \leqslant x) = xq^n + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(1-(1-x)^k)$$

$$P(U \leqslant x) = xq^n + \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}(1-x)^k$$

$$P(U \leqslant x) = xq^n + (p+q)^n - (p(1-x)+q)^n = xq^n + 1 - (1-px)^n$$

Une densité f de U est alors donnée par dérivation :

$$f(x) = \begin{cases} q^n + np(1-px)^{n-1} & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{, sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.20.

Soit U une variable aléatoire réelle suivant la loi uniforme sur $[0,1[$ et λ un réel strictement positif.

On considère les variables aléatoires suivantes :

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U), \; W = \lfloor V \rfloor$$

où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V puis

$$Y = V - \lfloor V \rfloor \text{ et } Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-Y)$$

1. Déterminer les lois de V et W.

2. Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance.

3. Déterminer une densité de Z.

4. On considère la variable aléatoire $X = \min(1, V)$. Déterminer la fonction de répartition de X et démontrer que $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) \geqslant 1/2$.

Solution :

1. $\star$ V prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et pour $v \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant v) = P(U \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda v}$$

V suit la loi exponentielle de paramètre λ.

$\star$ W prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$P(W = n) = P(n \leqslant V < n+1) = \mathrm{e}^{-\lambda n} - \mathrm{e}^{-\lambda(n+1)}$$

Soit $P(W = n) = p(1-p)^n$, avec $p = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$, donc $W + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

2. $\star$ Y prend ses valeurs dans $[0, 1[$ et pour $y \in [0, 1[$:

$$P(Y \leqslant y) = \sum_{k=0}^{\infty} P(k \leqslant V \leqslant y + k) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(y+k)}\right) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

$\star$ Par dérivation, on en déduit une densité g de Y :

$$g(y) = \frac{\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda y}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \text{ si } 0 < y < 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$\star$ $E(Y) = E(V) - E(\lfloor V \rfloor) = E(V) - E(W+1) + 1 = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\lambda} - 1}$

3. Z prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et pour $z \geqslant 0$, on a :

$$P(Z \leqslant z) = P(Y \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda(1 - \mathrm{e}^{-\lambda z})}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$

Par dérivation, on en déduit une densité h de Z :

$$h(z) = \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda(1 + z - \mathrm{e}^{-\lambda z})}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}, \text{ pour } z \geqslant 0 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

4. X prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et :

$$\forall x \in [0, 1[, P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \text{ et } P(X = 1) = P(V \geqslant 1) = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$P(2X^2 - 3X \geqslant -1) = P((X-1)(X - \tfrac{1}{2}) \geqslant 0) = P(X = 1) + P(X \leqslant \tfrac{1}{2})$$

Soit : $P(2X^2 - 3X \geqslant -1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda/2} + \mathrm{e}^{-\lambda} \geqslant \dfrac{1}{2}$

Exercice 3.21.

On considère une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes $N, X_1, \ldots, X_n, \ldots$. Soit $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et λ un réel strictement positif.

On suppose que N suit la loi géométrique de paramètre p et que les variables (X_i), $i \in \mathbb{N}^*$, suivent la loi exponentielle de paramètre λ.

On note S la variable aléatoire $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une densité de $X_1 + \cdots + X_n$ (on pourra procéder par récurrence).

2. Montrer que :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!}\big) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Déterminer la fonction de répartition de S. (On supposera que l'on peut intervertir l'ordre des sommations dans les expressions obtenues).

b) En déduire la loi de S et montrer que $E(S) = E(X_1)E(N)$.

Solution :

1. Les théorèmes du cours donnent :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \dfrac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

2. On a :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \lambda \int_{-\infty}^{x} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}dt$$

Une succession d'intégrations par parties donne alors :

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{(\lambda x)^k}{k!} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

3. Pour tout x, on a :

$$P(S \leqslant x) = \sum_{n=1}^{\infty} P([S \leqslant x] \cap [N = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} P([X_1 + \cdots + X_n \leqslant x] \cap [N = n])$$

Soit, par indépendance :

$$P(S \leqslant x) = \sum_{n=1}^{\infty} P([X_1 + \cdots + X_n \leqslant x])P(N = n)$$

Ainsi si $x < 0, P(S \leqslant x) = 0$ et si $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} P(S \leqslant x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\big)P(N = n) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} P(N = n) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \sum_{n=k+1}^{\infty} P(N = n) \end{aligned}$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} P(N \geqslant k+1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda q x)^k}{k!} = 1 - \mathrm{e}^{\lambda p x}$$

b) Ainsi S suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda p)$.

On a donc $E(S) = \dfrac{1}{\lambda p}$ et comme $E(X_1) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $E(N) = \dfrac{1}{p}$ on a la conclusion.

Exercice 3.22.

Paul possède un sac qui contient au début 3 billes ordinaires et 1 bille en agate. Il joue avec son copain Luc de la façon suivante : à chaque étape, Luc ajoute 3 billes ordinaires dans le sac, puis il tire de façon équiprobable une bille du sac et la garde. Le jeu s'arrête dès que Luc tire la bille en agate.

On note X le nombre d'étapes du jeu ; avec la convention $X = 0$ si Luc ne tire jamais la bille en agate.

1. Soit n un entier naturel. Vérifier que $\dfrac{n}{n+1} \leqslant \dfrac{n+1}{n+2}$.

2. En majorant la probabilité de l'événement «la bille en agate n'a pas encore été tirée à l'étape n», montrer que $P(X = 0) = 0$.

3. Déterminer la loi de X.

4. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

Solution :

1. Question évidente.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, notons G_n l'événement «Luc ne tire pas la bille en agate à l'étape n». Il vient, pour tout n :

$$\begin{aligned} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) &= P(G_1)P(G_2/G_1)\dots P(G_n/(G_1 \cap \cdots \cap G_{n-1})) \\ &= \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{2n+4}{2n+5} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, écrivons :

$$[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \dots \times \frac{2n+4}{2n+5} \times \frac{2n+5}{2n+6}$$

Soit, par télescopage : $[P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)]^2 \leqslant \dfrac{6}{2n+6}$ et donc :

$$\lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Et, par le théorème de limite monotone :

$$P(X = 0) = \lim_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$$

Variante : on peut aussi prouver ce résultat de façon directe. En effet :

$-\ln\big(P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n)\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(1 + \dfrac{1}{2k+4}\big)$.

Comme $\ln\big(1 + \dfrac{1}{2k+4}\big) \sim \dfrac{1}{2k+4}$, la divergence de la série de terme général $\dfrac{1}{2k+4}$ donne la divergence de la série de terme général $\ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big)$.

Cette série étant à termes positifs, on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\big(\dfrac{2k+5}{2k+4}\big) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P(G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n) = 0$.

3. On a $P(X=1)=1/7$. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$u_n = P(X=n) = P(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1} \cap \overline{G_n})$
$\quad = P(G_1)\ldots P(G_{n-1}/(G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-2})) \times P(\overline{G_n}/G_1 \cap G_2 \cap \ldots \cap G_{n-1}))$
Soit :

$$P(X=n) = \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{1}{2n+5}$$

4. On a :
$P(X=n) \geqslant \frac{6}{7} \times \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} \times \ldots \times \frac{2n+2}{2n+3} \times \frac{2n+3}{2n+4} \times \frac{1}{2n+5}$
Soit, encore par télescopage : $P(X=n) \geqslant \dfrac{6}{(2n+4)(2n+5)}$.

Ainsi $nP(X=n) \geqslant \dfrac{3n}{(n+2)(2n+5)}$, qui est le terme général d'une série divergente (car équivalent à $\dfrac{3}{2n}$) . Donc X n'admet pas d'espérance.

Exercice 3.23.

Deux joueurs jouent à pile ou face avec une pièce identique non truquée, et lancent alternativement leur pièce. On définit une variable aléatoire X_1 (respectivement X_2) comme le numéro du jet à l'issue duquel le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile pour la première fois (les jets sont comptés indépendamment pour chacun des joueurs).
La variable aléatoire X est le numéro du jet à l'issue duquel un des deux joueurs obtient pile pour la première fois.
La variable aléatoire J vaut 1 (respectivement 2) si le premier (respectivement le deuxième) joueur obtient pile en premier, et vaut 0 si les deux joueurs obtiennent pile en un même nombre de coups.
On cherche à montrer que conditionnellement au fait qu'ils n'obtiennent pas pile en un même nombre de coups, les variables aléatoires X et J sont indépendantes. Autrement dit, si on nomme H l'événement $(X_1 \neq X_2)$, on cherche à montrer que, pour $j = 0, 1, 2$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P([(J=j) \cap (X>k)]/H) = P(J=j/H) \cdot P(X>k/H)$$

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k)$. Calculer $P(X_1 < X_2)$ et en déduire $P(H)$.

2. Démontrer que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $X_1 < X_2$ est une loi géométrique de paramètre $3/4$. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 > k/X_1 < X_2)$.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(H \cap (J=1) \cap X > k) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P([(J=1) \cap (X>k)]/H) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X > k/H) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \text{ et que } P(J = 1/H) = P(J = 2/H) = \frac{1}{2}$$

6. Conclure.

Solution :

1. Les variables aléatoires X_1 et X_2 correspondent à des temps d'attente d'un premier succès au cours d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. On en déduit que X_1 et X_2 sont indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre $1/2$. On a :

$$P(X_1 > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^i = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k.$$

(On peut aussi considérer l'événement complémentaire qui est : «les k premiers essais sont des échecs».)

La famille $(X_1 = k)_{k \geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Ainsi, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2, on a :

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X_1 = k)P(X_2 > k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \\ &= 4\sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Les variables X_1 et X_2 étant indépendantes et de même loi ; on en déduit par symétrie que $P(X_1 > X_2) = \dfrac{1}{3}$ et que $P(H) = 2P(X_1 < X_2) = \dfrac{2}{3}$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \dfrac{P((X_1 = k) \cap (X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)}$.

Par indépendance :

$$P(X_1 = k/X_1 < X_2) = \frac{P(X_1 = k)P(X_2 > k))}{P(X_1 < X_2)} = \frac{(1/2)^{2k}}{1/3} = \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{k-1},$$

ce qui montre que la loi de X_1 conditionnelle à l'événement $(X_1 < X_2)$ est la loi géométrique de paramètre $3/4$. Enfin :

$$P(X_1 > k/X_1 < X_2) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^{j-1} = \left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

3. Puisque $(J = 1) \subset H$, et que sur l'ensemble $(J = 1)$ on a $X = X_1$, il vient l'égalité des ensembles $H \cap (J = 1) \cap (X > k) = (X_1 > k) \cap (X_1 < X_2)$ et :

$$P(H \cap (J = 1) \cap (X > k)) = P(X_1 > k/X_1 < X_2)P(X_1 < X_2) = \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{1}{4}\right)^k$$

4. D'après la question précédente :

$$P_H\big((J = 1) \cap (X > k)\big) = \frac{P(H \cap (J = 1) \cap (X > k))}{P(H)} = \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2k}$$

5. On a l'égalité d'ensembles $H \cap (J=2) \cap (X>k) = (X_2>k) \cap (X_2<X_1)$ et en suivant un raisonnement identique à celui développé plus haut et par symétrie :

$$P(H \cap (J=2) \cap (X>k)) = P(H \cap (J=1) \cap (X>k)) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

On remarque enfin que $H \cap (J=0) = \emptyset$ donc

$$\begin{aligned} P_H(X>k) &= P_H\big((J=1) \cap (X>k)\big) + P_H\big((J=2) \cap (X>k)\big) \\ &= 2P_H\big((J=1) \cap (X>k)\big) = \left(\frac{1}{4}\right)^k. \end{aligned}$$

6. En conclusion :

$$P_H(J=1) = \frac{P\big(H \cap (J=1)\big)}{P(H)} = \frac{P(X_1<X_2)}{P(H)} = \frac{1}{2}$$

et puisque $P_H(J=0)=0$ on en déduit que $P_H(J=2)=\frac{1}{2}$.

Exercice 3.24.

1. Soit U une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0,1]$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes ayant chacune la même loi que U.

Soit, d'autre part, Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.
Montrer que la suite de variables (nZ_n) converge en loi vers Y.

2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^{-\lambda X}$.

3. On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les limites en loi des suites de terme général :

a) $A_n = n.\min(\mathrm{e}^{-\lambda X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda X_n})$

b) $D_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n$, dans le cas où $\lambda = 1$.

Solution :

1. $nZ_n(\Omega) = [0,n]$ et les variables U_k étant indépendantes et de même loi que U :

$$P(nZ_n > x) = P[(U_1 > \frac{x}{n}) \cap \ldots \cap (U_n > \frac{x}{n})] = [P(U > \frac{x}{n})]^n$$

D'o :

$$P(nZ_n > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x > n \\ (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$, pour n assez grand, on a donc $P(nZ_n > x) = (1-\frac{x}{n})^n$, d'o :

$$\ln[P(nZ_n > x)] = n\ln(1-\frac{x}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -x, \text{ et donc :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \lim_{n\to\infty} P(nZ_n > x) = \mathrm{e}^{-x} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}^-, \lim_{n\to\infty} P(nZ_n > x) = 1$$

La suite (nZ_n) converge donc en loi vers Y.

2. X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et Y prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Pour $x \in]0,1], F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(-\lambda X \leqslant \ln x) = P(X \geqslant -\dfrac{\ln x}{\lambda})$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda(-\frac{\ln x}{\lambda})} = x$$

Ainsi Y suit la loi uniforme sur $]0,1]$ (ou sur $[0,1]$, ce qui revient au même).

3. a) Les variables $\mathrm{e}^{-\lambda X_1}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda X_n}$ sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$, donc (A_n) converge en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

b) Les variables X_i étant indépendantes et de même loi :

$$\begin{aligned} P(D_n \leqslant x) &= P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leqslant x + \ln n) \\ &= P[(X_1 \leqslant x + \ln n) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x + \ln n)] \\ &= P(X_1 \leqslant x + \ln n) \ldots P(X_n \leqslant x + \ln n) = [P(X_1 \leqslant x + \ln n)]^n \end{aligned}$$

Soit, pour tout $x \in \mathbb{R}$, et n assez grand :

$$F_{D_n}(x) = P(D_n \leqslant x) = (1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln n)})^n = \big(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\big)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

Cette loi limite est appelée *loi de Gumbel*.

Exercice 3.25.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES crt ;
VAR h,X,n :INTEGER ;
BEGIN
RANDOMIZE ;
READLN(n) ;X :=n ;
REPEAT h :=RANDOM(n)+1 ;
IF h>X THEN X :=0 ELSE X :=h ;
WRITELN(X) ;
UNTIL X=0 ;
END.
```

On rappelle que l'instruction a :=RANDOM(n), où a et n sont des variables INTEGER, permet de mettre dans la variable a une valeur au hasard entre 0 et $n-1$. L'instruction RANDOMIZE permet d'initialiser la fonction RANDOM.

Pour tout entier naturel N, on définit la variable aléatoire X_N égale au $(N+1)$-ème nombre affiché.

1. Déterminer la loi de X_0

2. a) En déduire la probabilité de $(X_1 = k)$, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.

b) Déterminer la loi de X_1.

3. a) Montrer que pour tout $N \geqslant 1$ et tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(X_N = k) \ = \ \frac{\mathrm{C}_{N+n-k}^N}{n^{N+1}}$$

b) En déduire la loi de X_N.

Solution :

1. Au premier tour, on a obligatoirement $h \leqslant X$; donc X prendra une valeur au hasard entre 1 et n.

Ainsi X suit la loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. a) Après le premier tour, lorsque $X = j$, tout se passe comme si l'on choisissait au hasard dans l'ensemble $\{1, \ldots, j, 0, \ldots, 0\}$ (les $n - j$ derniers éléments de cet ensemble sont des 0).

Utilisons le système complet d'événements $(X_0 = j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$. Il vient :

$$\begin{aligned} P(X_1 = k) &= \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = k / X_0 = j) P(X_0 = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} P(X_1 = k / X_0 = j) P(X_0 = j) = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{n} P(X_0 = j) \\ &= \frac{n - k + 1}{n^2} \end{aligned}$$

b) Comme $X_1(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$, par la question précédente, il suffit de calculer $P(X_1 = 0)$. Il vient :

$$P(X_1 = 0) = 1 - \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

3. a) Faisons un raisonnement par récurrence. L'amorce est la question précédente. Pour l'hérédité, on utilise le même argument que précédemment, en notant que pour $k \neq 0, P(X_{N+1} = k / X_N = 0) = 0$. On a :

$$\begin{aligned} P(X_{N+1} = k) &= \sum_{j=0}^{n} P(X_{N+1} = k / X_N = j) P(X_N = j) \\ &= \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{n} \frac{\mathrm{C}_{N+n-j}^N}{n^{N+1}} = \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=k}^{n} \mathrm{C}_{N+n-j}^N = \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=N}^{N+n-k} \mathrm{C}_j^N \\ &= \frac{1}{n^{N+2}} \sum_{j=N}^{N+n-k} (\mathrm{C}_{j+1}^{N+1} - \mathrm{C}_j^{N+1}) = \frac{\mathrm{C}_{N+n-k}^N}{n^{N+2}}. \end{aligned}$$

b) On procède comme dans la question 2. b) :

$P(X_N = 0) = 1 - \sum_{j=1}^{n} P(X_N = j) = 1 - \frac{1}{n^{N+1}} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{N+n-j}^{N}$

Soit, en utilisant à nouveau la formule de Pascal, donnant la «loi des colonnes» du triangle de Pascal : :

$$P(X_N = 0) = 1 - \frac{1}{n^{N+1}} \mathrm{C}_{N+n}^{N+1}$$

Exercice 3.26.

On considère le programme Pascal suivant :

```
PROGRAM exo ;
USES CRT ;
const ...
VAR   ...
FUNCTION X(a :REAL) :REAL ;
BEGIN
X :=RANDOM*a ;
END ;
BEGIN
READLN(a) ;u :=X(a) ;v :=a-u ;
w :=u ; IF u>v THEN w :=v ;
t :=u ; IF u<v THEN t :=v ;
FOR k :=1 TO n DO y[k] :=X(a) ;
...
END.
```

où la fonction RANDOM, sans paramètres, retourne, au hasard, une valeur de type REAL comprise entre 0 et 1.

1. Compléter les déclarations du programme ci-dessus.

2. On note U, V, W, T les variables aléatoires réelles égales aux valeurs se trouvant dans les variables `u`, `v`, `w` et `t` du programme ci-dessus.
Quelles sont les lois suivies par U, V, W, T ?

3. Déterminer les espérances et variances de W et T.
Comment peut-on justifier l'égalité des variances ? Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(W,T)$.

4. Compléter le programme précédent pour que Z soit la variable aléatoire égale au minimum des variables `y[1]`, `y[2]`,. . .,`y[n]`.

5. Déterminer la loi de Z, ainsi que l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

Solution :

1. Voici une proposition

```
const n = 50 ;
Var y := array[1..n] of real ;
a,u,v,w,z : real ;
k : integer ;
```

2. $\star$ La variable aléatoire U suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,a]$; son espérance vaut $\frac{a}{2}$ et sa variance $\frac{a^2}{12}$.

$\star$ La variable $V = a - U$ suit la même loi que U.

$\star$ On a $W = \min(U,V)$. D'où, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} P(W > x) &= P((V > x) \cap (U > x)) = P(U > x) \cap (U < a - x)) \\ &= P(x < U < a - x) \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$P(W < x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > \frac{a}{2} \\ 1 - \dfrac{a-2x}{a} = \dfrac{2x}{a} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi W suit une loi uniforme sur $[0, a/2]$.

$\star$ De même $T = \max(U,V)$ suit la loi uniforme sur $[a/2, a]$.

3. Un calcul immédiat donne $E(W) = \frac{a}{4}, E(T) = \frac{3a}{4}$, $V(W) = V(T) = \frac{a^2}{48}$.
Comme $T + W = U + V = a$, on a $W = a - T$ et l'égalité des variances.
Enfin $\rho(W,T) = \rho(a - T, T) = -\rho(T,T) = -1$.

4. Voici une proposition de complément :

```
Z :=y[1] ;
For k :=2 to n do
if Z<y[k] then Z :=y[k] ;
```

5. Les variables `y[k]` suivent toutes une loi uniforme sur $[0,a]$. Supposons–les indépendantes. Alors :

$$P(Z > x) = P\big(\bigcap_k (\mathtt{y[k]} > x)\big) = \prod_k P(\mathtt{y[k]} > x)$$

d'où pour tout $x \in [0,a]$:

$$P(Z > x) = 1 - \big(1 - \frac{x}{a}\big)^n$$

Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{a}\left(1 - \dfrac{x}{a}\right)^{n-1} & \text{si } x \in [0,a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul élémentaire donne :

$$E(Z) = \frac{n}{a}\int_0^a t\big(1 - \frac{t}{a}\big)^{n-1} dt = \frac{a}{n+1} \mp$$

Exercice 3.27.

On considère les lancers successifs (indépendants) d'une pièce non pipée et on note T le nombre de Face précédant le premier Pile. On propose à un joueur la suite de paris suivante :

• Pari P_0 : si $T = 0$, on perd 1 Euro ; si $T = 1$, on gagne 3 Euros ; sinon on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_1 : si $T = 1$, on perd 4 Euros ; si $T = 2$, on gagne 9 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;
• Pari P_2 : si $T = 2$, on perd 10 Euros ; si $T = 3$, on gagne 27 Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

...

• Pari P_n : si $T = n$, on perd $3^n + 1$ Euros ; si $T = n + 1$, on gagne 3^{n+1} Euros ; sinon, on ne gagne ni ne perd rien ;

etc.

1. Chaque pari est-il favorable au joueur ?
2. Calculer l'espérance du gain Γ si le joueur parie sur la suite de tous les résultats.

Solution :

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(T = k) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$ (on a k fois de suite Face, puis Pile)
Supposons que le joueur joue sur le pari P_n et soit G_n le gain du joueur.
$\star$ $G_0(\Omega) = \{-1, 0, 3\}$ et :

$$P(G_0 = -1) = P(T = 0) = \frac{1}{2},\ P(G_0 = 3) = P(T > 1) = \frac{1}{4}$$

Donc $E(G_0) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{4}$.
$\star$ Pour $n \geqslant 1$, $G_n(\Omega) = \{-(3^n + 1), 0, 3^{n+1}\}$ et :

$$P(G_n = -3^n - 1) = P(T = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$P(G_n = 3^{n+1}) = P(T = n + 1) = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Donc $E(G_n) = -(3^n + 1)\dfrac{1}{2^{n+1}} + 3^{n+1}\dfrac{1}{2^{n+2}} = \dfrac{3^n - 2}{2^{n+2}}$.
Ainsi, dans tous les cas $E(G_n) > 0$ et chaque pari est favorable au joueur.

2. Supposons que le joueur joue sur l'ensemble de tous les paris. Alors :
Si $(T = 0)$ est réalisé, le joueur perd 1 euro sur le pari P_0 et ne perd ni ne gagne rien sur les autres paris, et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
Si $(T = 1)$ est réalisé, alors P_0 est gagné (il gagne 3 euros) et P_1 est perdu (il perd 4 euros) et rien n'est gagné ni perdu sur les autres paris ; le joueur perd au total 1 euro et ceci se réalise avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
Si $(T = 2)$ est réalisé, alors le joueur gagne le pari P_1 et perd le pari P_2 (il ne gagne ni ne perd rien sur P_0 et sur les paris postérieurs) ; le joueur

gagne 9 euros et en perd 10, au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{8}$;

...

Plus généralement si $(T = n)$ est réalisé, le joueur gagne le pari P_{n-1} et perd le pari P_n (sur les paris antérieurs ou postérieurs il ne gagne ni ne perd rien). Au total il perd 1 euro et ceci se produit avec la probabilité $\frac{1}{2^{n+1}}$

...

Finalement le joueur perd 1 euro avec la probabilité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$, soit :

$$E(\Gamma) = -1$$

Ce résultat qui peut paratre paradoxal est dû au fait que pour $n \geqslant 1$, on a : $E(G_n) = -(3^n + 1)\frac{1}{2^{n+1}} + 3^{n+1}\frac{1}{2^{n+2}}$ et que dans la somme $\sum_{n=1}^{\infty} E(G_n)$, il n'est pas possible de calculer séparément la somme des pertes et la somme des gains, pour distinguer les paris perdus et les paris gagnés ...

Exercice 3.28.

1. Soit U et V deux variables à densité sur $\mathbb{R}_+$. On note F la fonction de répartition de U et g une densité de V.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} F\left(\frac{z}{v}\right) g(v)\, dv$ converge pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

On admet que si U et V sont indépendantes, alors

$$(\forall\, z \in \mathbb{R}_+) \quad P(UV \leqslant z) = \int_0^{+\infty} F\left(\frac{z}{v}\right) g(v)\, dv$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = X_1 X_2 \dots X_n$ (produit des n variables $X_1, \dots, X_n$) et on note F_n (resp. f_n) la fonction de répartition (resp. une densité) de Z_n.

2. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)\ (\forall\, z \in]0,1])\quad F_n(z) = z + z\int_z^1 \frac{1}{u^2} F_{n-1}(u)\, du.$

3. Montrer que $(\forall\, n \geqslant 2)\ (\forall\, t \in]0,1])\quad f_n(t) = \int_t^1 \frac{1}{u} f_{n-1}(u)\, du$

4. En déduire une expression explicite de f_n.

5. Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n.

Solution :

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}^+$, la fonction $v \mapsto F\left(\frac{z}{v}\right) g(v)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.

C'est la fonction nulle si $z = 0$.

Si $z > 0$, alors :

- elle est équivalente à $g(v)$ au voisinage de 0 et l'intégrale est donc convergente en ce voisinage,
- c'est un $o(g(v))$ au voisinage de $+\infty$, et l'intégrale est donc convergente en ce voisinage.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} F\big(\frac{z}{v}\big)g(v)\,dv$ converge pour tout $z \in \mathbb{R}_+$.

2. Comme $X_1, \dots X_n$ sont à valeurs dans $[0,1]$, Z_n l'est également. Soit $z \in [0,1]$, et $n \geqslant 2$. Par indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$ la variable $Z_{n-1} = X_1 \dots X_{n-1}$ est indépendante de X_n, qui suit la loi $\mathcal{U}([0,1])$ et donc :

$$F_n(z) = P(Z_n \leqslant z) = P(Z_{n-1}X_n \leqslant z) = \int_0^{+\infty} F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)dx$$
$$= \int_0^1 F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx = \int_0^z F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx + \int_z^1 F_{n-1}\big(\frac{z}{x}\big)dx$$
$$= z + z\int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du$$

(changement de variable$u = \frac{z}{x}$ dans la deuxième intégrale et dans la première intégrale $\frac{z}{x} > 1$, donc la fonction à intégrer vaut 1)

d'où :

$$F_n(z) = z + z\int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du$$

3. Par dérivation, il vient, toujours pour $z \in]0,1]$:

$$f_n(z) = 1 + \int_z^1 \frac{1}{u^2}F_{n-1}(u)du - \frac{1}{z}F_{n-1}(z)$$

Une intégration par parties donne :

$$f_n(z) = \int_z^1 \frac{1}{u}f_{n-1}(u)du$$

4. On se restreint à l'intervalle $]0,1]$. On a

- $f_1(z) = 1$, car $Z_1 = X_1$;
- $f_2(z) = \displaystyle\int_z^1 \frac{du}{u} = -\ln z$;
- $f_3(z) = \displaystyle\int_z^1 -\frac{\ln u}{u}du = \frac{\ln^2 z}{2}$;
- $f_4(z) = \displaystyle\int_z^1 \frac{\ln^2 u}{2u}du = -\frac{\ln^3 z}{6}$.

Supposons que $f_{n-1}(u) = \dfrac{(-\ln u)^{n-2}}{(n-2)!}$. Alors, $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ étant la dérivée de $u \mapsto \ln u$, il vient :

$$f_n(z) = \int_z^1 \frac{1}{u}\frac{(-\ln u)^{n-2}}{(n-2)!}du = \frac{(-\ln z)^{n-1}}{(n-1)!}$$

5. Soit $z \in]0,1]$. Il vient :

$$F_n(z) = \int_0^z f_n(t)dt = \left[t\frac{(-\ln t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]_0^z + \int_0^z \frac{(-\ln t)^{n-2}}{(n-2)!}dt$$

soit

$$F_n(z) = zf_n(z) + \int_0^z f_{n-1}(t)dt$$

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$F_n(z) = z\sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) = z\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-\ln z)^k}{k!}$$

Exercice 3.29.

On considère une population dont l'effectif aléatoire à chaque instant $n = 0, 1, 2, \ldots$ est noté X_n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, la taille de la population est égale à 1 soit $X_0 = 1$. Entre l'instant n et l'instant $n + 1$, et indépendamment pour chaque n, la population entière double ou est totalement détruite, chacune de ces éventualités se produisant avec la probabilité $\frac{1}{2}$, puis un individu s'ajoute à la population. On note Y_n la variable aléatoire égale à 1 ou à 0 selon que c'est la première ou la seconde des deux éventualités précédentes qui se produit entre les instants n et $n+1$.

1. Préciser la loi des variables aléatoires Y_n. Que peut-on dire de ces variables aléatoires ?

2. a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_{n+1} en fonction de X_n et Y_n.

b) En déduire l'ensemble E_n des valeurs prises par la variable aléatoire X_n.

c) Les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles indépendantes ?

d) La suite d'événements $(X_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle formée d'événements indépendants ?

3. a) Déterminer la loi des variables aléatoires X_1, X_2, X_3.

b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n en fonction de n.

4. Montrer que la suite (X_n) converge en loi quand n tend vers l'infini et préciser sa limite.

Solution :

1. Par hypothèse, les variables aléatoires Y_n sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

2. a) En distinguant les deux cas $Y_n = 0$ et $Y_n = 1$, on obtient :

$$X_{n+1} = 2X_nY_n + 1.$$

b) Comme $2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$, on montre facilement que :

$$E_n = \{2^k - 1, 1 \leqslant k \leqslant n+1\}$$

c) La suite de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas formée de variables indépendantes, car par exemple, $(X_1 = 1) \cap (X_2 = 7)$ est l'événement impossible, alors que $(X_1 = 1)$ et $(X_2 = 7)$ ne sont pas de probabilité nulle.

d) Comme $(X_n = 1) = (Y_{n-1} = 0)$ et comme les variables Y_n sont indépendantes, la suite d'événements $(X_n = 1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est formée d'événements indépendants.

3. a) $\star$ $X_1(\Omega) = \{1, 3\}$ et $P(X_1 = 1) = P(X_1 = 3) = \dfrac{1}{2}$;

$\star$ $X_2(\Omega) = \{1, 3, 7\}$ et :

$P(X_2 = 1) = P(Y_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$; $P(X_2 = 7) = P\big((Y_0 = 1) \cap (Y_1 = 1)\big) = \dfrac{1}{4}$;

d'o $P(X_2 = 3) = \dfrac{1}{4}$;

$\star$ on obtient de même $X_3(\Omega) = \{1, 3, 7, 15\}$â et :

$P(X_3 = 1) = \dfrac{1}{2}, P(X_3 = 3) = \dfrac{1}{4}, P(X_3 = 7) = \dfrac{1}{8}, P(X_3 = 15) = \dfrac{1}{8}.$

b) On a :

$\star$ $P(X_n = 2^{n+1} - 1) = \dfrac{1}{2^n}$ (car cet événement se réalise si et seulement si on réalise $Y_0 = 1, Y_1 = 1, \ldots, Y_{n-1} = 1$)

$\star$ $P(X_n = 1) = \dfrac{1}{2}$ (car la population a été détruite entre l'instant $n-1$ et l'instant n, *i.e.* $(Y_{n-1} = 0)$ est réalisé et ce qui s'est passé avant est sans incidence)

$\star$ $P(X_n = 3) = \dfrac{1}{4}$ (car la population a été détruite entre l'instant $n-2$ et l'instant $n-1$, *i.e.* $(Y_{n-2} = 0)$ est réalisé, puis on réalise $(Y_{n-1} = 1)$ et ce qui s'est passé avant l'instant $n-2$ est sans incidence)

$\star$ Plus généralement et soit directement, soit par récurrence :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!], P(X_n = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k}$$

c) $E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (2^k - 1)\dfrac{1}{2^k} + (2^{n+1} - 1)\dfrac{1}{2^n} = n - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + 2 - \dfrac{1}{2^n}$, *i.e.* :

$$E(X_n) = n + 1$$

4. Soit $E = \{2^k - 1, k \in \mathbb{N}^*\}$. Alors pour tout n on a $X_n(\Omega) \subset E$, et pour chaque valeur de k dans $\mathbb{N}^*$, dès que $n \geqslant k$, on a :

$$P(X_n = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2^k}$$

Ainsi la suite (X_n) converge en loi vers une variable X telle que :

$$X(\Omega) = E, \forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(X = 2^k - 1) = \frac{1}{2^k}$$

(On remarque que l'on a bien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X = 2^k - 1) = 1$)

Exercice 3.30.

Dans tout l'exercice $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \P)$ et à valeurs dans $[0,1]$, qui sont indépendantes, à densité et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. On note pour n entier naturel non nul, f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

a) Indiquer une relation entre f_{n+1} et f_n.

b) En déduire l'expression de $F_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

c) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier k tel que F_n soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\omega \in \Omega$ on pose $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n(\omega) > 1\}$, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) > 1$ et sinon, on pose $N(\omega) = 0$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

b) Montrer que N possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Donner la valeur de $P\Big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\Big)$

Solution :

1. a) On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et X_{n+1} est indépendante de S_n (car S_n ne dépend que de $X_1, \ldots, X_n$). Une densité f_{n+1} de S_{n+1} s'obtient donc par convolution de f_n et d'une densité de X_{n+1} :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\, dt = \int_{x-1}^{x} f_n(t)\, dt$$

b) S_n prend ses valeurs entre 0 et n, donc pour $x \in [0,1]$, l'intervalle utile d'intégration est $[0,x]$:

$$\forall\, x \in [0,1], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt = F_n(x) - F_n(0) = F_n(x)$$

Ainsi, $\forall\, x \in [0,1], F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x F_n(t)\, dt$

Comme $\forall\, x \in [0,1], F_1(x) = x$, une récurrence simple donne :

$$\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*, F_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_n(x-1)$.
Ainsi si F_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors f_{n+1} aussi et F_{n+1}, qui est une primitive de f_{n+1}, est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme F_1 est seulement continue sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas dérivable en 0 et en 1), une récurrence simple montre que F_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$, sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Par construction, N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
$\star$ L'événement $(N = 0)$ est l'événement $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \leqslant 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$P(N=0) \leqslant P(S_n \leqslant 1) = F_n(1) = \frac{1}{n!}$$
Donc $P(N=0) = 0$ et $(N=0)$ est donc quasi-impossible.
$\star$ Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}, P(N > n) = P(S_n \leqslant 1) = \dfrac{1}{n!}$ (ceci vaut même pour $n = 0$) et donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$
b) Pour $n \geqslant 2$, $n.P(N = n) = n\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc N admet une espérance et comme $P(N=1) = 0$:
$$E(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n.P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \mathrm{e}$$
De même, les convergences étant évidentes :
$$E(N^2) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!}$$
$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 3.\mathrm{e}$$
et :
$$V(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \mathrm{e}(3 - \mathrm{e})$$

3. On a $(S_n \geqslant n-1) = (n - S_n \leqslant 1)$, or $n - S_n = (1 - X_1) + \cdots + (1 - X_n)$ et chaque X_i ayant même loi que $(1 - X_i)$, et les variables $(1 - X_i)$ étant indépendantes, $(n - S_n)$ a même loi que S_n, donc $P(S_n \geqslant n-1) = \dfrac{1}{n!}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\big) \leqslant P(S_k \geqslant k-1) = \dfrac{1}{k!}$, soit :
$$P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\big) = 0$$

Exercice 3.31.

1. Montrer que pour tout polynôme P à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ est convergente et préciser, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt.$

2. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = (i+j-2)!$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

a) Montrer que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n réels et qu'on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on a

$$ {}^tXAX = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\right)^2 \mathrm{e}^{-t}\, dt $$

b) En déduire que toutes les valeurs propres de A sont strictement positives. A est-elle inversible ?

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles positives pour laquelle il existe n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que X admette pour densité la fonction f définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}^+, f(t) = \big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\big)\mathrm{e}^{-t} \text{ si } t \geqslant 0, \text{ et } \forall\, t < 0, f(t) = 0$$

a) Préciser la valeur de $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \,.\, (i-1)!$

b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et exprimer $m_k = E(X^k)$ en fonction des x_i.

c) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est entièrement déterminé par le $(n-1)$ uplet $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$.

d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1})$ pour que X suive la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

Solution :

1. La connaissance de la fonction Γ permet d'affirmer que pour tout polynôme P à coefficients réels, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t} dt$ est combinaison linéaire d'intégrales convergentes, donc est convergente et :

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt = \Gamma(n+1) = n!$$

2. a) D'une part : ${}^tXAX = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} x_i x_j = \sum\limits_{i,j} (i+j-2)! x_i x_j$.

D'autre part :

$$\int_0^{+\infty} \big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\big)^2 \mathrm{e}^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{i,j} x_i x_j t^{i+j-2} \mathrm{e}^{-t} dt = \sum_{i,j} x_i x_j (i+j-2)!$$

D'o l'égalité souhaitée.

b) Soit λ une valeur propre de A (A est symétrique réelle, donc $\lambda \in \mathbb{R}$) et X un vecteur colonne propre associé, de terme générique x_i. Alors :

$$^tXAX = {}^tX\lambda X = \lambda({}^tXX) = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Or, d'après a) : $^tXAX = \displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i t^{i-1}\Big)^2 \mathrm{e}^{-t} dt > 0$, car la fonction à intégrer est continue, positive et différente de la fonction nulle (il existe au moins un x_i non nul).

Ainsi $\lambda > 0$ et comme 0 n'est pas valeur propre de A, la matrice A est inversible.

3. a) f est une densité, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, soit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(i-1)! = 1$.

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt$ est convergente, et :

$$m_k = E(X^k) = \int_0^{+\infty} t^k f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{+\infty} x_i t^{i+k-1} \mathrm{e}^{-t} dt = \sum_{i=1}^{n} x_i(i+k-1)!$$

c) Ainsi $\begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, d'o $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix}$

ce qui prouve que la connaissance des moments $(m_1, m_2, \dots, m_{n-1})$ détermine parfaitement les valeurs des x_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

d) Pour une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, le moment d'ordre k vaut $k!$.

Par suite, une variable aléatoire X du type précédent suit la loi $\mathcal{E}(1)$ si et seulement si $\forall\, k \in [\![1, n-1]\!], E(X^k) = k!$.

Exercice 3.32.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n et de N boules numérotées de 1 à N où $N = an$, a étant un entier fixé non nul. On place « au hasard » et de manière indépendante chacune des N boules dans une des urnes (chaque boule est donc placée avec la probabilité $\dfrac{1}{n}$ dans l'urne numéro k).

On note :

Y_n le nombre d'urnes vides.

T_i la variable qui vaut 1 si l'urne numéro i est vide et 0 sinon.

$S_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Donner la loi de T_i et son espérance.

2. Calculer $E(T_iT_j)$ et $\mathrm{Cov}(T_i, T_j)$.

3. Calculer $E(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
4. Calculer $V(S_n)$ et sa limite quand n tend vers l'infini.
5. a) Vérifier que $\forall\,\omega \in \Omega, |S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \leqslant |S_n(\omega) - E(S_n)| + |E(S_n) - \mathrm{e}^{-a}|$.
   b) En déduire que :
   $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, n_0, \forall\, n \geqslant n_0, P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|S_n(\omega) - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2})$.
   c) Montrer que $\forall\,\varepsilon > 0, \lim\limits_{n\to\infty} P(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon) = 0$.

Solution :

1. Par indépendance des résultats des différents placements, on a :
$$P(T_i = 1) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^N = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{na}$$
Ainsi $T_i \hookrightarrow \mathcal{B}\big(\big(1 - \frac{1}{n}\big)^N\big)$ et :
$$E(T_i) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^N \; ; \; V(T_i) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^N \big[1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^N\big].$$
2. De même T_iT_j ne prend que les valeurs 0 et 1 et prend la valeur 1 avec la probabilité $\big(1 - \frac{2}{n}\big)^N$. Ainsi $E(T_iT_j) = \big(1 - \frac{2}{n}\big)^N$ et :
$$\mathrm{Cov}(T_i, T_j) = \big(1 - \frac{2}{n}\big)^N - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2N}$$
3. On a $Y_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$, donc par linéarité de l'espérance :
$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \big(1 - \frac{1}{n}\big)^N$$
D'o : $\ln(E(S_n)) = N\ln(1 - \frac{1}{n}) = na\ln(1 - \frac{1}{n}) \underset{(\infty)}{\sim} na(-\frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -a$, et
$$\lim_{n\to\infty} E(S_n) = \mathrm{e}^{-a}$$
4. $V(S_n) = \frac{1}{n^2}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} V(T_k) + 2\sum\limits_{i<j} \mathrm{Cov}(T_i, T_j)\big)$. Il y a dans cette somme n variances toutes égales et $\dfrac{n(n-1)}{2}$ covariances toutes égales, d'o :
$$V(S_n) = \frac{1}{n}\big(1 - \frac{1}{n}\big)^{an}\big[1 - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{an}\big] + \frac{n-1}{n}\big[\big(1 - \frac{2}{n}\big)^{an} - \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2an}\big]$$
On a $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 - \frac{2}{n}\big)^{an} = \mathrm{e}^{-2a}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 - \frac{1}{n}\big)^{2an} = \mathrm{e}^{-2a}$, d'o :
$$\lim_{n\to\infty} V(S_n) = 0$$
5. a) Il s'agit de l'inégalité triangulaire.
   b) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} E(S_n) = \mathrm{e}^{-a}$, on a :
   pour $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geqslant n_0 \implies |E(S_n) - \mathrm{e}^{-a}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, si l'événement $|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon$ est réalisé, alors l'événement $|S_n(\omega) - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$ est également réalisé, ce qui donne l'inégalité demandée par croissance d'une probabilité.

c) Or, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\big(|S_n - E(S_n)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big) \leqslant \frac{4V(S_n)}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et, *a fortiori* : $\lim\limits_{n\to\infty} P\big(|S_n(\omega) - \mathrm{e}^{-a}| \geqslant \varepsilon\big) = 0$.

Exercice 3.33.

On admettra, sans démonstration, la formule :

$$\forall\, x \in [0,1[, \forall\, r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{C}_{r+k}^{r} x^k = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

On dispose d'une urne contenant une proportion p de boules rouges et $q = 1 - p$ de boules vertes $(0 < p < 1)$. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise et on note, pour $r \in \mathbb{N}^*$, X_r la variable aléatoire définie par :

$X_r = k$ si k est le nombre de boules vertes tirées avant l'apparition de la $r^{\text{ème}}$ème boule rouge et $X_r = -1$ si l'on obtient jamais r boules rouges.

On dit que X_r suit la loi $J(r, p)$.

1. Donner la loi de X_1 et son espérance.

2. a) Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression de $P(X_r = k)$.

b) Que vaut $P(X_r = -1)$?

c) Calculer $E(X_r)$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables indépendantes telles que, pour tout n, X_n suit la loi $J(n, p_n)$ où $\lim\limits_{n\to\infty} n(1 - p_n) = \lambda$, avec $\lambda > 0$.

Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable X dont on déterminera la loi.

4. On suppose dans cette question que X suit la loi $J(2, p)$.

a) Montrer que $\forall\, x \in [0,1[, \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

(on remarquera que $\dfrac{x^k}{k} = \displaystyle\int_0^x t^{k-1}\, dt$).

b) Calculer $E\big(\dfrac{1}{X+2}\big)$.

Solution :

1. $X_1 + 1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, d'o $E(X_1) = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$.

2. a) Pour $k \in \mathbb{N}$, l'événement $(X_n = k)$ est réalisé si et seulement si les $k+n-1$ premiers tirages amènent $n-1$ boules rouges, le tirage de rang $k+n$ amenant la n-ième boule rouge. Les tirages ayant lieu avec remise, il vient :

$$P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^{n-1} p = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k p^n$$

b) Par la formule admise :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X_n = k) = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} q^k = p^n \frac{1}{(1-q)^n} = 1$$

D'o $P(X_n = -1) = 0$.

c) Soit Y_k le nombre de boules vertes obtenues entre les $(k-1)$-ième et k-ième boules rouges obtenues (on pose $Y_1 = X_1$). Par indépendance, chaque Y_k suit la même loi que $Y_1 = X_1$, d'espérance $\dfrac{q}{p}$.

Comme $X_r = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$, par linéarité de l'espérance, il vient :

$$E(X_r) = \frac{rq}{p}$$

3. Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X_n = k) = \mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k p_n^n$.

$\star$ $\ln(p_n^n) = n\ln(p_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n(p_n - 1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\lambda$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^n = \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$\star$ $\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1} = \dfrac{(k+n-1)(k+n-2)\dots n}{k!} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$, donc :

$$\mathrm{C}_{k+n-1}^{n-1}(1-p_n)^k \sim \frac{[n(1-p_n)]^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Ainsi, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$, ce qui signifie que la suite (X_n) converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

4. a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\, dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\, dt$, soit :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - R_n(x)$, avec $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \displaystyle\int_0^x \frac{x^n}{1-x}\, dt = \frac{x^{n+1}}{1-x}$

On a donc $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in [0,1[,\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$$

b) $\dfrac{1}{X+2}$ est une variable bornée, donc admet une espérance, et :

$$\begin{aligned}
E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}(k+1) q^k p^2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} q^k p^2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2} q^k p^2 = p^2 \frac{1}{1-q} - \frac{p^2}{q^2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^k}{k} \\
&= p - \frac{p^2}{q^2}\big(-\ln(1-q) - q\big)
\end{aligned}$$

Soit, après simplifications :

$$E\Big(\frac{1}{X+2}\Big) = \frac{p}{q} + \frac{p^2}{q^2}\ln p$$

Exercice 3.34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portent le numéro 1, deux boules portent le numéro 2, ..., deux boules portent le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant : si les deux boules obtenues portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant, si les deux boules portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour $i \in [\![2, n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une $i^{\text{ème}}$ paire de boules portant le même numéro, **à partir du retrait** d'une $(i-1)^{\text{ème}}$ paire de boules.

1. a) Quelle relation lie X_n à $Y_1, \ldots, Y_n$?

b) Déterminer la loi de Y_1. Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1, n]\!]$, la loi de Y_i. Quelle est son espérance ?

c) En déduire que $E(X_n) = n^2$.

2. a) Dans les cas $n = 1$, puis $n = 2$, déterminer la loi de X_n.

b) On suppose $n = 3$. Montrer que :

$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{4}{5}\Big)^{k-2} - \Big(\frac{2}{3}\Big)^{k-2}\Big]$$

3. On revient au cas général.

a) Montrer que $P(X_n = n) = \dfrac{2^n n!}{(2n)!} \mp$

b) Exprimer $P(X_n = n+1)$ à l'aide de termes de la suite (h_k) définie, pour $k \geqslant 1$, par $h_k = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{k} \mp$

Solution :

1. a) Clairement : $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$, si $(i-1)$ paires ont déjà été retirées, il reste $2(n-i+1)$ boules dans l'urne et le tirage d'une paire est de probabilité :

$$p_i = \frac{n-i+1}{\mathrm{C}^2_{2(n-i+1)}} = \frac{1}{2(n-i)+1}$$

Ainsi Y_i suit la loi géométrique de paramètre p_i et $E(Y_i) = \dfrac{1}{p_i} = 2(n-i)+1$.

c) Par linéarité de l'espérance :

$E(X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(Y_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} [2(n-i)+1] = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (2k+1)$

Soit :

$$E(X_n) = n(n-1) + n = n^2$$

2. a) $\star$ Pour $n = 1$, X_1 est la constante égale à 1.

$\star$ Pour $n = 2$, on attend une première paire (loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$) puis on conclut au tirage suivant :

$$X_2(\Omega) = [\![2, +\infty[\![, \forall\, k \geqslant 2, P(X_2 = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \frac{1}{3}$$

b) Pour $n = 3$, $X_3 = Y_1 + Y_2 + 1$, o $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{5})$ et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{3})$, Y_1 et Y_2 étant indépendantes. Donc, par convolution discrète :

$$\forall\, k \geqslant 3, P(X_3 = k) = \sum_{i=0}^{n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^i \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-3-i} \left(\frac{1}{3}\right)$$

Soit, par la relation $x^n - y^n = (x-y) \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i y^{n-1-i}$:

$$P(X_3 = k) = \frac{1}{15} \frac{(\frac{4}{5})^{k-2} - (\frac{2}{3})^{k-2}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. a) Pour réaliser $(X_n = n)$, il faut gagner à chaque essai, *i.e.* réaliser $(Y_1 = 1)$, $(Y_2 = 1)$, $\ldots$,$(Y_n = 1)$. On obtient donc par indépendance :

$$P(X_n = n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2(n-i)+1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{2n} k} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

b) De même pour réaliser $(X_n = n+1)$, il faut obtenir une paire à chaque essai, sauf une fois (pas la dernière) o l'on doit s'y prendre à deux fois ! En clair :

$(X_n = n+1) = \bigcup\limits_{i=1}^{n-1} \Big((Y_i = 2) \bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ ji}}^{n-1} (Y_j = 1)\Big)$

Avec les notations de la question 1., $P(Y_i = 1) = p_i$ et $P(Y_i = 2) = (1-p_i)p_i$, d'o par disjonction, puis indépendance :

$$P(X_n = n+1) = p_1 p_2 \ldots p_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (1-p_j) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\Big(n - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\Big)$$

$$= \frac{2^n n!}{(2n)!}\Big(n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1}\Big)$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2j+1} = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$, soit finalement :

$$P(X_n = n+1) = \frac{2^n n!}{(2n)!}\Big(n - h_{2n} + \frac{1}{2}\, h_n\Big)$$