3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

Soit n un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, à valeurs réelles. On pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(\frac{2k+1}{2n}) - f(\frac{k}{n}) \right)$$

et

$$\Pi_n = \frac{(2n+1)(2n+3)\cdots(4n-1)}{(2n)(2n+2)\cdots(4n-2)}$$

1. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$. (On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.)

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\Pi_n\right) = \ln(\sqrt{2})$. En déduire la limite de Π_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On considère une urne contenant initialement $2n+1$ boules identiques au toucher, dont une seule est rouge, et les autres noires.
On effectue une suite de tirages selon le processus suivant :
à chaque tirage, si l'on a tiré une boule noire, on la remet dans l'urne et on ajoute deux autres boules noires prises dans un stock annexe, avant de procéder au tirage suivant. La suite de tirages s'arrête lorsque l'on a obtenu la boule rouge.
A désigne l'événement :« le $n^{\text{ème}}$ tirage est effectué ».
Calculer la probabilité p_n de l'événement A, puis la limite de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f étant de classe C^2, on peut lui appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange, soit :

$$\left|f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)-f\left(\frac{2k}{2n}\right)-\frac{1}{2n}f'\left(\frac{2k}{2n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{8n^2}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$$

En sommant, il vient :

$$\left|S_n-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{8n}\sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$$

Ainsi la suite $(2S_n)_n$ a même limite que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)_n$, qui est une somme de Riemann associée à la fonction f' continue sur $[0,1]$. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)\,dt=\frac{1}{2}\big(f(1)-f(0)\big)$$

2. Les éléments composant Π_n étant tous positifs, il vient, en introduisant haut et bas des facteurs $2n$:

$$\begin{aligned}\ln\Pi_n&=\ln\left(\left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{2n+3}{2n}\right)\cdots\left(\frac{4n-1}{2n}\right)\times\left(\frac{2n}{2n}\right)\left(\frac{2n}{2n+2}\right)\cdots\left(\frac{2n}{4n-2}\right)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\ln\left(1+\frac{2k+1}{2n}\right)-\ln\left(1+\frac{2k}{2n}\right)\right)\end{aligned}$$

Il suffit de poser $f(x)=\ln(1+x)$ pour reconnaître le résultat de la question précédente. Cette fonction est bien de classe C^2 sur $[0,1]$, et donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\Pi_n=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\ln\sqrt{2}$$

Par composition par la fonction exponentielle (qui est continue), il vient :

$$\lim_{n\to+\infty}\Pi_n=\sqrt{2}$$

3. Notons N_i l'événement « on obtient une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage ». Réaliser le $n^{\text{ème}}$ tirage, c'est obtenir une boule noire au cours des $(n-1)$ premiers tirages, donc par la formule des probabilités composées, il vient :

$$\begin{aligned}p(A)=p_n&=P(N_1\cap N_2\cap\ldots\cap N_{n-1})\\&=P(N_1)P(N_2/N_1)P(N_3/N_1\cap N_2)\cdots P(N_{n-1}/(N_1\cap N_2\cap\cdots\cap N_{n-2})\end{aligned}$$

et :

$$p_n=\frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n+2}{2n+3}\times\cdots\times\frac{2n+2(n-2)}{2n+2(n-2)+1}\times\frac{2n+2(n-1)}{4n-1}=\frac{1}{\Pi_n}$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Exercice 3.2.

On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots$ indépendantes et identiquement distribuées, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{si } x>\theta\end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $M_n=\sup(X_1,\ldots,X_n)$ est une variable aléatoire réelle dont on déterminera une densité.

2. Calculer les deux premiers moments de M_n.

3. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(|M_n - \theta| > \varepsilon) \subset \big(|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}| > \frac{\varepsilon}{2}\big)$$

4. En déduire que la suite $(M_n)_n$ converge en probabilité vers θ.

5. Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

6. Montrer que la suite $(Y_n)_n$ converge en probabilité vers $\frac{2\theta}{3}$.

7. Comparer les variances de M_n et de $Z_n = \frac{3Y_n}{2}$.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

Solution :

1. On sait que pour tout réel x :

$$P(M_n \leqslant x) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leqslant x)\big) = \big(F_\theta(x)\big)^n$$

Une densité de M_n est donc :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{2nx^{2n-1}}{\theta^{2n}} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Des calculs immédiats donnent :

$$E(M_n) = \frac{2n\theta}{2n+1}, E(M_n^2) = \frac{2n\theta^2}{2n+2}, V(M_n) = \frac{n\theta^2}{(n+1)(2n+1)^2}$$

3. Par l'inégalité du triangle :

$$|M_n - \theta| \leqslant \big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| + \big|\frac{2n\theta}{2n+1} - \theta\big|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\big|\frac{2n\theta}{2n+1} - \theta\big| < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, pour $n > N$:

$$(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \subseteq \big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big)$$

4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Cebishev :

$$P\big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big) \leqslant \frac{4V(M_n)}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Et comme $P(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant P\big(\big|M_n - \frac{2n\theta}{2n+1}\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\big)$, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} P(|M_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0$$

5. Un calcul immédiat donne :

$$E(Y_n) = E(X_1) = \frac{2\theta}{3}, V(Y_n) = \frac{V(X_1)}{n} = \frac{\theta^2}{18n}$$

6. D'après l'inégalité de Bienaymé-Cebishev :

$$P\big(\big|Y_n - \frac{2\theta}{3}\big| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\theta^2}{18n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui montre que la suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable constante égale à $\frac{2\theta}{3}$.

7. On sait que $V(M_n) \sim \dfrac{\theta^2}{4n^2}$, et $V(Z_n) = \dfrac{\theta^2}{8n}$.

Ainsi Z_n est un estimateur sans biais et convergent de θ, alors que M_n est un estimateur biaisé (asymptotiquement sans biais) et convergent de θ.
Mais $V(M_n) < V(Z_n)$ pour n assez grand.
On peut parfois accepter un léger biais pour une variance plus petite et préférer l'estimateur M_n pour estimer θ.

Exercice 3.3.

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé, toutes deux de loi uniforme sur l'intervalle $]0, r[$, r étant un nombre réel strictement positif donné.
On note ln le logarithme népérien.

On définit les variables aléatoires suivantes :
- $T = \min(X, Y)$
- $U = \max(X, Y)$
- $Z = \dfrac{T}{U}$.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $\ln X$, puis de la variable aléatoire $\ln X - \ln Y$.

2. Exprimer $\ln Z$ en fonction de $\ln X$ et $\ln Y$.

3. Déterminer successivement :
 a) une densité de la variable aléatoire $Z' = -\ln Z$,
 b) une densité de la variable aléatoire Z,
 c) une densité de la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{Z}$.

Reconnaître la loi de probabilité suivie par les variables aléatoires Z' et Z et préciser pour chacune des trois variables aléatoires Z', Z et V son espérance et sa variance.

Solution :

1. $\star$ Posons $A = \ln X$. Alors $A(\Omega) =]-\infty, \ln r]$, et pour tout $a \in A(\Omega)$:

$$F_A(a) = P(X \leqslant \mathrm{e}^a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a}{r} & \text{si } a \leqslant \ln r \\ 1 & \text{si } a \geqslant \ln r \end{cases}$$

Donc, on peut prendre pour densité de A la fonction :

$$f_A(a) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^a}{r} & \text{si } a \leqslant \ln r \\ 0 & \text{si } a \geqslant \ln r \end{cases}$$

$\star$ La loi de $B = \ln Y$ est identique à celle de A.
Comme $P(-B \leqslant b) = P(B \geqslant -b) = 1 - P(B \leqslant -b)$, une densité de $-B$ est donnée par :

$$f_{-B}(b) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-b}}{r} & \text{si } b \geqslant -\ln r \\ 0 & \text{si } b \leqslant -\ln r \end{cases}$$

$\star$ Enfin, une densité de $W = A - B$ est donnée par convolution : pour tout $w \in \mathbb{R}$, on prend :

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_A(t) f_{-B}(w-t)\ dt = \int_{-\infty}^{\min(\ln r, w+\ln r)} f_A(t) f_{-B}(w-t)\, dt$$

Ainsi :

• si $w \leqslant 0$:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{w+\ln r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{e}^{-w+t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^w}{2}$$

• si $w \geqslant 0$:

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\ln r} \frac{1}{r^2}\,\mathrm{e}^{-w}\mathrm{e}^{2t}\,dt = \frac{\mathrm{e}^{-w}}{2}$$

2. Comme $Z = \dfrac{T}{U}$, on a $\ln Z = \ln\big(\min(X,Y)\big) - \ln\big(\max(X,Y)\big)$.
Par croissante du logarithme :

$$\ln Z = \min(\ln X, \ln Y) - \max(\ln X, \ln Y) = -|\ln X - \ln Y|$$

3. a) On a $Z'(\Omega) = \mathbb{R}^+$, et pour tout $u \geqslant 0$

$$F_{Z'}(u) = P(|A-B| < u) = F_W(u) - F_W(-u)$$

Une densité de Z' est donc donnée par

$$f_{Z'}(u) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-u} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc Z' suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, d'espérance et de variance égales à 1.

b) La variable aléatoire Z vérifie $Z = \mathrm{e}^{-Z'}$. Donc $Z(\Omega) = [0,1]$ et pour tout $z \in [0,1]$,

$$F_Z(z) = P(Z' > -\ln z) = 1 - F_{Z'}(-\ln z)$$

Une densité sur $[0,1]$ de Z est donnée par :

$$f_Z(z) = f_{Z'}(-\ln z) \times \frac{1}{z} = 1$$

Ainsi Z suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ d'espérance $\dfrac{1}{2}$ et de variance $\dfrac{1}{12}$.

c) Comme $V = \dfrac{1}{Z}$, on a $V(\Omega) = [1, +\infty[$ et pour tout $v \geqslant 1$:

$$F_V(v) = 1 - P\big(Z < \tfrac{1}{v}\big) = 1 - \frac{1}{v}$$

Une densité de V est donnée par :

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{v^2} & \text{si } v \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La règle de Riemann montre que la variable aléatoire V n'admet ni espérance, ni variance (elle suit la loi de Pareto $\mathcal{P}(1,1,0)$).

Exercice 3.4.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de cette loi, appelée «loi logistique».

2. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant la loi logistique et on pose $Y = \sup(X_1, \ldots, X_n)$, $Z = Y - \ln n$.

Déterminer les fonctions de répartition F_Y et F_Z de Y et Z.

3. a) Montrer qu'il existe une fonction Φ que l'on déterminera telle que
$$\forall z \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} F_Z(z) = \Phi(z).$$

b) Vérifier que Φ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité et déterminer une densité φ de cette loi.

4. Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de densité φ.

a) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-V$.

b) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $U - V$?

Solution :

1. La fonction F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $F'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$. Ainsi F a les propriétés requises pour être une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Si X suit cette loi, une densité de X est :
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$$

2. On a, pour tout réel y :
$$F_Y(y) = P(Y \leqslant y) = P\big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant y)\big) = [F(y)]^n = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-y})^n}$$
Puis, pour tout réel z :
$$F_Z(z) = F_Y(z + \ln n) = \big(1 + \frac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big)^{-n}$$

3. a) On a : $-n \ln\big(1 + \frac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -n\times\frac{\mathrm{e}^{-z}}{n} = \mathrm{e}^{-z}$, d'où :
$$\lim_{n\to+\infty} \big(1 + \frac{\mathrm{e}^{-z}}{n}\big)^{-n} = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-z}} = \Phi(z)$$

b) La fonction Φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\Phi'(x) = \mathrm{e}^{-x}\times \exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$.
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$. Ainsi Φ est une fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Une densité associée est donnée par :
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\times \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

4. a) On a : $F_{-V}(x) = P(-V \leqslant x) = 1 - \Phi(-x)$, et :
$$f_{-V}(x) = \mathrm{e}^{-x}\times \exp(-\mathrm{e}^{x})$$

b) Une densité g de $U - V$ est donnée par le produit de convolution :
$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t-x) f_{-V}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2x-t} \exp(-\mathrm{e}^{-t+x} - \mathrm{e}^{x})\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{2x-t} \exp(-\mathrm{e}^{x}(1+\mathrm{e}^{-t}))\, dx$$
Effectuons le changement de variable bijectif de classe C^1 : $y = \mathrm{e}^x(1+\mathrm{e}^{-t})$.
Il vient :

$$g(t) = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\int_0^{+\infty} y.\mathrm{e}^{-y}\,dy = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$$

Ainsi $U - V$ suit une loi logistique.

Exercice 3.5.

On considère le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ que l'on identifiera au cercle trigonométrique. On pose $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
Un point de D sera représenté soit par ses coordonnées cartésiennes (x, y), soit par ses coordonnées trigonométriques (r, θ) avec $r \in [0, 1]$, $\theta \in]-\pi, \pi]$, avec $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

On lance au hasard une fléchette qui se fiche en un point (x, y) de D (on suppose qu'elle atteint toujours la cible). On suppose que la probabilité de lancer la fléchette en un point donné ne dépend que de la distance de ce point à l'origine. Soit X la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact (x, y) à l'origine. On suppose que sa fonction de répartition F est de classe C^1 sauf peut-être en 0 et en 1. On note f sa dérivée.

1. Montrer que F est croissante et que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

2. On suppose que la probabilité d'atteindre la cible sur un domaine $A \subset D$ est proportionnelle à la surface de A.

Calculer alors la fonction de répartition de X et calculer son espérance et sa variance.

3. Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Deux joueurs Alain et Bernard visent la cible. Soient X_A et X_B les variables aléatoires associées à leurs lancers. On suppose que les fonctions de répartition de leurs lancers respectifs sont $F_A(r) = r^\alpha$ et $F_B(r) = r^\beta$.
Calculer la probabilité que Bernard atteigne la cible en un point plus proche que celui atteint par Alain.
(On admettra que si X et Y sont des variables aléatoires à densité indépendantes, alors $P(X < Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F_X(t) f_Y(t)\,dt$.)

4. On partage la cible en n cercles concentriques, centrés en O de rayons respectifs k/n.

On note Y la variable aléatoire donnant la valeur n si la cible est atteinte dans le cercle de rayon $1/n$, la valeur $n-1$ si elle est atteinte dans le cercle de rayon $2/n$ mais en dehors du cercle de rayon $1/n$. Et ainsi de suite jusqu'à la valeur 1 si elle est atteinte en dehors du cercle de rayon $(n-1)/n$.

a) Donner la loi de Y en fonction de la fonction de répartition de X.

b) Trouver $\alpha > 0$ tel que la loi de X de fonction de répartition $F(r) = r^\alpha$ pour $r \in [0, 1]$, $F(r) = 0$ si $r < 0$ et $F(r) = 1$ si $r > 1$ corresponde à la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$ pour Y.

Solution :

1. Puisque la fléchette atteint toujours la cible, on a : $X(\Omega) = [0, 1]$.

La fonction F est croissante puisque c'est une fonction de répartition. Enfin, $F(0) = P(X \leqslant 0) = 0$, et $F(1) = P(X \leqslant 1) = 1$.

2. L'aire $A(r)$ du disque centré en l'origine et de rayon r est égale à πr^2. Donc, pour tout $r \in [0,1]$:

$$F(r) = \frac{A(r)}{A(1)} = r^2$$

Soit :

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leqslant 0 \\ r^2 & \text{si } 0 \leqslant r \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } r \geqslant 1 \end{cases} \text{ et } f(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin [0,1] \\ 2r & \text{si } r \in [0,1] \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(X) = \int_0^1 2r^2\,dr = \frac{2}{3}, E(X^2) = \int_0^1 2r^3\,dr = \frac{1}{2},\ V(X) = \frac{1}{18}$$

3. On a donc :

$$P(X_\alpha < X_\beta) = \int_0^1 F_\alpha(t) f_\beta(t)\,dt = \int_0^1 r^\alpha \beta r^{\beta-1}\,dt = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

4. a) L'événement $(Y = k)$ signifie que la cible est atteinte à une distance comprise entre $\dfrac{n-k+1}{n}$ et $\dfrac{n-k}{n}$ du centre de la cible. Donc

$$P(Y = k) = F\big(\frac{n-k+1}{n}\big) - F\big(\frac{n-k}{n}\big)$$

b) Pour obtenir une loi uniforme, il faut que $\big(\dfrac{k+1}{n}\big)^\alpha - \big(\dfrac{k}{n}\big)^\alpha = \dfrac{1}{n}$, ce qui est réalisé pour $\alpha = 1$.

Exercice 3.6.

Soit b un nombre entier naturel tel que $b \geqslant 2$.

I. Comparer les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$x \mapsto 1 + x,\ x \mapsto 1 + 2x \text{ et } x \mapsto e^x.$$

II. On effectue, dans une urne contenant initialement 1 jeton rouge et 1 jeton vert, une succession de tirages de la faon suivante :

$\star$ Tant que l'on obtient des jetons verts, on replace le jeton obtenu dans l'urne, on multiplie par b entier le nombre de jetons verts alors contenus dans l'urne (à l'aide d'un stock annexe de jetons verts) puis on procède au tirage suivant.

$\star$ Dès que l'on obtient le jeton rouge, on arrête l'expérience.

On note X_b la variable aléatoire définie par :

$\star$ $(X_b = 0)$ est l'événement «l'expérience ne s'arrête pas» ;

$\star$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_b = n)$ est l'événement «l'expérience s'arrête à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage».

1. Déterminer $P(X_b = n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la probabilité de l'événement «au bout de n tirages, l'expérience n'est pas achevée».
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et que sa limite $V(b)$ est comprise entre 0 et 1/2.

3. a) Montrer que $u_n - V(b) \leqslant \dfrac{1}{b^{n-1}(b-1)}$.

b) Montrer que la suite $\big(V(b)\big)_{b\geqslant 2}$ admet une limite lorsque b tend vers l'infini.

c) Que peut-on dire de la probabilité de ne jamais tirer le jeton rouge ?

Solution :

I. Une étude rapide de fonctions permet d'obtenir pour tout x de $[0,1]$:

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant 1 + 2x$$

On peut également procéder de la façon suivante :

⋆ on sait que pour tout x réel $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$; donc, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.

⋆ Pour tout $x \in [0,1]$, pour tout $n \geqslant 1$, on a $x^n \leqslant x$. Donc :

$$\mathrm{e}^x \leqslant 1 + x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + x(\mathrm{e}-1) \leqslant 1 + 2x$$

II. 1. Notons R_i l'événement « on tire un jeton rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage » et V_i l'événement « on tire un jeton vert au $i^{\text{ème}}$ tirage ». On a :

$$(X_b = n) = V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1} \cap R_n$$

Donc, par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(X_b = n) &= P(V_1)P_{V_1}(V_2)\cdots P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{b}{1+b}\times\cdots\times\frac{b^{n-2}}{1+b^{n-2}}\times\frac{1}{1+b^{n-1}} \end{aligned}$$

2. Par la formule des probabilités composées :

$$u_n = P(V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1} \cap V_n) = P(V_1)P_{V_1}(V_2)\cdots P_{V_1\cap\ldots\cap V_{n-1}}(V_n)$$

et :

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{b^k}{1+b^k}$$

La suite $(u_n)_n$ est positive et décroissante. Elle converge vers une limite $V(b)$ qui vérifie $0 \leqslant V(b) \leqslant u_0 = \dfrac{1}{2}$.

3. a) Soit $p > 0$. Alors, par la question I :

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+p}} &= \prod_{k=n}^{n+p-1} \Big(\frac{1+b^k}{b^k}\Big) \leqslant \prod_{k=n}^{n+p-1} \mathrm{e}^{b^{-k}} \leqslant \exp\Big(\sum_{k=n}^{n+p} b^{-k}\Big) \\ &\leqslant \exp\Big(\sum_{k=n}^{\infty} b^{-k}\Big) = \exp\Big(\frac{1}{(b-1)b^{n-1}}\Big) \end{aligned}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante :

$$1 \leqslant \frac{u_n}{u_{n+p}} \leqslant \exp\Big(\frac{1}{(b-1)b^{n-1}}\Big) \leqslant 1 + \frac{2}{(b-1)b^{n-1}}$$

En faisant tendre p vers l'infini, il vient :

$$0 \leqslant u_n - V(b) \leqslant \frac{2V(b)}{(b-1)b^{n-1}} \leqslant \frac{1}{(b-1)b^{n-1}}$$

b) Ce dernier résultat est valable pour tout n. En particulier pour $n = 1$, il vient :

$$0 \leqslant \frac{b}{2(1+b)} - V(b) \leqslant \frac{1}{b-1}$$

D'où :

$$\lim_{b \to +\infty} V(b) = \frac{1}{2}$$

c) Ne jamais tirer le jeton rouge correspond à $(X_b = 0) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (V_1 \cap \ldots \cap V_n)$.

Donc :

$$P(X_b = 0) = \lim_{n \to +\infty} u_n = V(b)$$

Exercice 3.7.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur le segment $[\theta, \theta+1]$, θ étant un réel inconnu.

Pour estimer θ, on considère pour tout n de $\mathbb{N}^*$, n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant toutes la loi de X et on pose $S_n = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$, $I_n = \inf\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$.

1. a) Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

b) Montrer que $S_n - 1$ est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ.

c) Déterminer le risque quadratique de cet estimateur.

2. a) Quelle est la loi de $-X$?

b) En déduire l'espérance et la variance de I_n.

c) Montrer que I_n est un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ. Quel est son risque quadratique ?

On admet dans la suite que $\mathrm{Cov}(I_n, S_n) = \dfrac{1}{(n+1)^2(n+2)}$.

3. On pose $\widehat{\theta_n} = \frac{1}{2}(S_n - 1 + I_n)$.

a) Calculer l'espérance et la variance de $\widehat{\theta_n}$.

b) Montrer que $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4. On pose $\theta_n^* = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k - \dfrac{1}{2}$.

a) Montrer que θ_n^* est un estimateur sans biais et convergent de θ.

b) Entre θ_n^* et $\widehat{\theta_n}$, quel estimateur choisissez-vous et pourquoi ?

Solution :

1. a) Pour x appartenant à $[\theta, \theta+1]$:

$$F_{S_n}(x) = P(S_n \leqslant x) = (x-\theta)^n$$

Donc S_n est une variable aléatoire à densité, et par dérivation légitime :

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1} & \text{si } \theta \leqslant x \leqslant \theta+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors, en effectuant le changement de variable $x - \theta = y$:

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \int_\theta^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}\,dx = \int_0^1 (y+\theta)ny^{n-1}\,dy \\ &= \theta\int_0^1 ny^{n-1}\,dy + n\int_0^1 y^n\,dy = \theta + \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

et en procédant de même :

$$E(S_n^2) = \int_\theta^{\theta+1} nx^2(x-\theta)^{n-1}\,dx = \theta^2 + \frac{2n\theta}{n+1} + \frac{n}{n+2}$$

D'où :

$$V(S_n) = E(S_n^2) - [E(S_n)]^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

b) On a

$$E(S_n-1) = \theta - \frac{1}{n+1},\ V(S_n-1) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

Donc, $S_n - 1$ est un estimateur asymptotiquement sans bais et convergent de θ.

c) On a :

$$r_{S_n-1} = [E(S_n-1)-\theta]^2 + V(S_n-1) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

2. a) La variable aléatoire $-X$ suit la loi uniforme sur $[-\theta-1,-\theta] = [\theta_1, \theta_1+1]$, avec $\theta_1 = -\theta-1$.

b) Comme $\sup\limits_i(-X_i) = -\inf\limits_i X_i$, la loi de $-I_n$ a été obtenue dans la première question : il suffit de remplacer θ par θ_1, d'où :

$$E(-I_n) = \theta_1 + \frac{n}{n+1},\ \text{donc}\ E(I_n) = \theta + \frac{1}{n+1},$$
$$V(-I_n) = V(I_n) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

c) I_n est donc un estimateur asymptotiquement sans biais et convergent de θ. Son risque quadratique est égal à $\dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

3. a) On a : $E(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{2}[E(S_n-1)+E(I_n)] = \theta$ et

$$\begin{aligned} V(\widehat{\theta_n}) &= \frac{1}{4}[V(S_n-1)+V(I_n)+2\operatorname{Cov}(S_n-1,I_n)] \\ &= \frac{1}{4}[V(S_n-1)+V(I_n)+2\operatorname{Cov}(S_n,I_n)] \end{aligned}$$

Donc :

$$V(\widehat{\theta_n}) = \frac{1}{4}\left[\frac{2n}{(n+2)(n+1)^2} + \frac{2}{(n+2)(n+1)^2}\right] = \frac{1}{2(n+2)(n+1)}$$

b) On a $E(\widehat{\theta_n}) = \theta$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\widehat{\theta_n}) = 0$. Ainsi $\widehat{\theta_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de θ.

4. a) On a $E(\theta_n^*) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n E(X_k) - \dfrac{1}{2} = \theta$ et $V(\theta_n^*) = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^n V(X_k) = \dfrac{1}{12n}$

Donc θ_n^* est un estimateur sans biais et convergent de θ.

On a

$$\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{12n} \iff n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2) \geqslant 0$$

Donc, dès que $n \geqslant 2$ on a $V(\widehat{\theta_n}) \leqslant V(\theta_n^*)$.
Ainsi $\widehat{\theta_n}$ est meilleur que θ_n^* pour estimer θ.

Exercice 3.8.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Dans un hypermarché, entre 10 heures et 11 heures, un animateur fait N offres promotionnelles sur certains produits précis que l'on note $1, 2, \ldots, N$.
On suppose que les offres promotionnelles des produits $1, 2, \ldots, N$ ont lieu aux instants $10 + X_1, 10 + X_2, \ldots, 10 + X_N$ (exprimés en heures), où $X_1, \ldots, X_N$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Soit $10 + Y_1$ la variable aléatoire désignant l'instant où la première offre promotionnelle est faite par l'animateur, et plus généralement, pour $r \in [\![1, N]\!]$, $10 + Y_r$ désigne l'instant de la $r^{\text{ème}}$ offre promotionnelle.

1. Soit $t \in [0, 1]$.

a) Calculer la probabilité que le produit noté k soit offert en promotion avant l'instant $10 + t$.

b) Soit Z_t la variable aléatoire égale au nombre d'offres promotionnelles faites avant l'instant t. Déterminer la loi de Z_t.

c) Calculer l'espérance E_t et la variance V_t de la variable Z_t.

2. Soit $r \in [\![1, N]\!]$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable Y_r.

b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_r.

Solution :

1. a) Le produit numéro k est offert en promotion à l'instant $10 + X_k$, où X_k suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Ainsi, la probabilité que ce produit soit en promotion avant l'instant $10 + t$ est égale à t.

b) Soit t fixé. La variable aléatoire Z_t suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, t)$. En effet l'événement $(Z_t = k)$ signifie que k produits (parmi N) sont offerts en promotion avant l'instant t. Par la question précédente, ceci est possible pour chaque produit avec la probabilité t.

c) Bien évidemment $E(Z_t) = Nt, V(Z_t) = Nt(1 - t)$.

2. a) On a l'égalité $(Y_r \leqslant t) = (Z_t \geqslant r)$. Donc, pour $t \in [0, 1]$

$$P(Y_r \leqslant t) = \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} t^k (1 - t)^{N-k}$$

Donc

$$F_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} t^k (1 - t)^{N-k} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Or : $k\dbinom{N}{k} = N\dbinom{N-1}{k-1}$ et $(N - k)\dbinom{N}{k} = N\dbinom{N-1}{k}$, donc pour t appartenant à $[0, 1]$, il vient par dérivation :

$$f_r(t) = \sum_{k=r}^{N} \binom{N}{k} k t^{k-1} (1 - t)^{N-k} - \sum_{k=r}^{N-1} \binom{N}{k} (N - k) t^k (1 - t)^{N-k-1}$$

$$= N\Big[\sum_{k=r}^{N}\binom{N-1}{k-1}t^{k-1}(1-t)^{N-k} - \sum_{k=r}^{N-1}\binom{N-1}{k}t^{k}(1-t)^{N-k-1}\Big]$$

Les dominos sont alors en place et il reste :

$$\forall\, t \in [0,1], f_r(t) = N\binom{N-1}{r-1}t^{r-1}(1-t)^{N-r}$$

et bien entendu $f_r(t) = 0$ sinon.

b) On a : $E(Y_r) = N\binom{N-1}{r-1}\displaystyle\int_0^1 t^r(1-t)^{N-r}\,dt$

Des intégrations par parties successives montrent que pour a et b dans $\mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^a(1-t)^b\,dt = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}$$

D'où :

$$E(Y_r) = N\binom{N-1}{r-1}\frac{r!(N-r)!}{(N+1)!} = N\frac{(N-1)!}{(N-r)!(r-1)!}\frac{r!(N-r)!}{(N+1)!} = \frac{r}{N+1}$$

De la même faon :

$$E(Y_r^2) = N\binom{N-1}{r-1}\int_0^1 t^{r+1}(1-t)^{N-r}dt = \frac{r(r+1)}{(N+1)(N+2)}$$

et enfin :

$$V(Y_r) = \frac{r}{N+1}\times\frac{N-r+1}{(N+1)(N+2)}$$

Exercice 3.9.

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type `tab`) sont des permutations de l'intervalle $[\![1,n]\!]$ d'entiers.

On considère la fonction `T` définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a :tab) :integer ;
var i,k :integer ;
begin
  k :=0 ;
  for i :=1 to n do
    if a[i]=i then k :=k+1 ;
  T :=k ;
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire T_n sur l'univers S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si $(a[i] = i)$ est réalisé et la valeur 0 sinon.

a) Quelle est la loi de X_i ? Pour $i \neq j$, les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ? Calculer $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

b) Exprimer T_n à l'aide des variables X_i et en déduire l'espérance et la variance de T_n.

3. a) Calculer $P(T_n = n)$, $P(T_n = n-1)$ et $P(T_n = n-2)$.

b) Exprimer $(T_n \neq 0)$ à l'aide des événements $(X_i = 1)$ et en déduire une expression de $P(T_n = 0)$ sous forme d'une somme. Donner un équivalent de $P(T_n = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.

c) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n-2$, $P(T_n = k) = \dfrac{1}{k!}P(T_{n-k} = 0)$, et en déduire la loi de T_n.

d) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{n-k} \dfrac{(-1)^j}{(k-1)!j!}$.

Solution :

1. La fonction T associe à une permutation de $\{1,\dots,n\}$ le nombre de ses points fixes.

2. a) La variable aléatoire X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = P(a[i] = i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Les variables aléatoires X_i et X_j, pour $i \neq j$ ne sont pas indépendantes. En effet :

$$P\big((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\big) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$
$$\neq P(X_i = 1)P(X_j = 1) = \frac{1}{n^2}$$

Ainsi la variable aléatoire X_iX_j suit la loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{n(n-1)}$, et

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{1}{n^2(n-1)}$$

b) On a immédiatement :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad E(T_n) = 1$$

et :

$$V(T_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$
$$= n\times\frac{n-1}{n^2} + 2\binom{n}{2}\frac{1}{n^2(n-1)} = 1$$

3. a) L'événement $(T_n = n)$ est réalisé si et seulement si la permutation a est l'identité. Donc $P(T_n = n) = \dfrac{1}{n!}$.

L'événement $(T_n = n-1)$ est impossible car si l'on a $(n-1)$ points fixes, alors le point restant est aussi fixe ! Sa probabilité est donc nulle.

L'événement $(T_n = n-2)$ est réalisé si et seulement on a $(n-2)$ points fixes, ce qui signifie que les deux autres éléments sont échangés. Donc il existe $\binom{n}{2}$ permutations de ce type (on dit que ce sont des transpositions)

$$P(T_n = n-2) = \frac{\binom{n}{2}}{n!}$$

b) On a $(T_n \neq 0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X_i = 1)$.

Soit k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$ et $i_1,\dots,i_k$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n$. Alors :

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} (X_{i_j} = 1)\Big) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Par la formule du crible :

$$P(T_n \neq 0) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$$

Donc :

$$P(T_n = 0) = 1 - P(T_n \neq 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{(n\to+\infty)}{\sim} \frac{1}{\mathrm{e}}$$

c) Soit $1 \leqslant k \leqslant n-2$. L'événement $(T_n = k)$ est réalisé si et seulement si k éléments de $[\![1, n]\!]$ sont fixes, et la restriction de la permutation aux $(n-k)$ éléments restant est une permutation sans point fixe.

Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles de ces k éléments. Il y a $(n-k)!P(T_{n-k} = 0)$ permutations possibles des $(n-k)$ éléments restants. Donc :

$$P(T_n = k) = \binom{n}{k} \times \frac{(n-k)!P(T_{n-k} = 0)}{n!} = \frac{1}{k!} P(T_{n-k} = 0)$$

Donc la loi de T_n est définie par : pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!], P(T_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

(on vérifie que cette relation est également valable pour $k = 0, n-1, n$).

d) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{(k-1)!j!} = \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k) = E(T_n) = 1$$

Exercice 3.10.

La détection d'une maladie repose sur une expérience consistant à examiner la durée de vie de cellules placées dans un milieu selectif. Le début de l'expérience étant pris comme origine, la « durée de vie expérimentale d'une cellule » est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1 pour une cellule saine et de paramètre 2 pour une cellule malade. On note p la probabilité qu'une cellule soit malade : p est le taux de contamination.

Un prélèvement sur un patient permet d'étudier n cellules dont les durées de vie expérimentales $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi et sont indépendantes.

1. Soit A l'événement « la première cellule considérée est saine ». A l'aide du système complet $\{A, \overline{A}\}$, déterminer la fonction de répartition, une densité, l'espérance et la variance de X_1.

2. On se propose d'estimer p à l'aide de l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$.

a) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) Montrer que $\widehat{p_n} = 2(1 - Y_n)$ est un estimateur sans biais de p. Est-il convergent ?

3. Il est naturel d'imposer à un estimateur de p de prendre ses valeurs dans $[0, 1]$, on va donc affiner la démarche précédente ...

a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par $\widehat{p_n}$.

b) On définit un nouvel estimateur p_n^* de p par :

$$p_n^* = \begin{cases} \widehat{p_n} & \text{si } 0 < \widehat{p_n} < 1 \\ 0 & \text{si } \widehat{p_n} \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } \widehat{p_n} \geqslant 1 \end{cases}$$

p_n^* est-elle une variable à densité ?

4. Trois individus subissent un prélèvement ; pour chacun d'eux 100 cellules sont étudiées et on obtient pour le premier $Y_{100} = 0{,}87$, pour le second $Y_{100} = 0{,}46$ et pour le troisième $Y_{100} = 1{,}23$. Quel est votre diagnostic pour chacun d'eux ?

Solution :

1. On a $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$. Pour tout $x \geqslant 0$, par la formule des probabilités totales :

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = P(X \leqslant x/A)P(A) + P(X \leqslant x/\overline{A})P(\overline{A})$$
$$= (1 - \mathrm{e}^{-x})(1 - p) + (1 - \mathrm{e}^{-2x})p$$
$$F_X(x) = 1 - (1 - p)\mathrm{e}^{-x} - p.\mathrm{e}^{-2x}$$

et, par dérivation :

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1-p)\mathrm{e}^{-x} + 2p.\mathrm{e}^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi, après calculs simples :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_X(x)\, dx = 1 - \frac{p}{2}$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}$$

2. a) On a :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n} \times n.E(X) = 1 - \frac{p}{2}$$
$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2} \times n.V(X) = \frac{1}{n}\big(1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}\big)$$

b) Ainsi :

$$E(\widehat{p_n}) = 2\big(1 - E(Y_n)\big) = p, V(\widehat{p_n}) = 4V(Y_n) = \frac{4}{n}\big(1 - \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}\big)$$

Ainsi $\widehat{p_n}$ est un estimateur sans biais et convergent de p.

3. a) Comme $X_1(\Omega) = [0, +\infty[$, on a $Y_n(\Omega) = [0, +\infty[$, et $\widehat{p_n}(\Omega) =]-\infty, 2]$

b) La variable aléatoire p_n^* n'est pas une variable à densité, puisque :

$$P(p_n^* = 0) = P(\widehat{p_n} \leqslant 0) \neq 0, P(p_n^* = 1) = P(\widehat{p_n} \geqslant 1) \neq 0$$

4. On a :

- premier individu : $\widehat{p_{100}} = 0.26 = p_{100}^*$,
- second individu : $\widehat{p_{100}} = 1.06, p_{100}^* = 1$,
- troisième individu : $\widehat{p_{100}} = -0.46, p_{100}^* = 0$.

Ainsi, le deuxième individu est sain, le troisième est contaminé, et le premier est en cours de contamination.

Exercice 3.11.

On considère dans cet exercice un réel $\alpha > 0$.

1. Soient X et Y des variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la loi exponentielle de paramètre α.

Montrer que la variable aléatoire $\inf(X, Y)$ suit la loi exponentielle de paramètre 2α.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $X - Y$.

En déduire que $|X - Y|$ suit la loi exponentielle de paramètre α.

Trois personnes, A, B et C, arrivent en même temps à une borne téléphonique qui comporte deux cabines qu'occupent immédiatement A et B ; C remplace le premier sorti (qui quitte tout de suite les lieux). On note U, V et W les temps aléatoires respectifs d'occupation de leur cabine par A, B et C.
On suppose que U, V et W sont des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre α.

2. Calculer la probabilité que C soit le dernier des trois à sortir de sa cabine.

3. Expliciter la fonction de répartition et, s'il y a lieu, une densité, de la variable aléatoire $\sup(U, V)$.
Préciser la loi de la variable aléatoire T égale au temps total passé par C à cette borne.
La variable aléatoire T admet-elle une espérance ? Dans l'affirmative, préciser $E(T)$.

4. On note Z la variable aléatoire égale à l'instant où la dernière des trois personnes A, B et C quitte la borne, l'instant 0 étant celui de leur arrivée simultanée.
Montrer que $Z = \inf(U, V) + \sup\big(|U - V|, W\big)$.
On admet que les variables aléatoires $\inf(U, V)$, $|U-V|$ *et* W *sont indépendantes.*
Préciser la loi de Z.
Montrer que $Z - T = \sup\big(|U - V| - W, 0\big)$. La variable aléatoire $Z - T$ est-elle à densité ?

Solution :

1. Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, pour tout réel t :

$$P\big(\inf(X, Y) \geqslant t\big) = P\big((X \geqslant t) \cap (Y \geqslant t)\big) = P(X \geqslant t)P(Y \geqslant t)$$

Donc :

$$P\big(\inf(X, Y) \geqslant t\big) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ \mathrm{e}^{-2\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases} ;$$

$$P\big(\inf(X, Y) \leqslant t\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-2\alpha t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $\inf(X, Y)$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(2\alpha)$.

Notons f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha.\mathrm{e}^{-\alpha t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$, f est la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre α.

On sait que $-Y$ admet pour densité $g : t \longmapsto f(-t)$. On sait également, par indépendance de X et $-Y$ qu'une densité h de $X - Y$ est donnée par, pour tout réel x :

$$h(x) = (f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt = \int_{\max(0,x)}^{+\infty} \alpha^2.\mathrm{e}^{-\alpha t}.\mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,dt$$

Donc

$$h(x) = \alpha^2.\mathrm{e}^{\alpha x}\int_{\max(0,x)}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\alpha t}\,dt = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{\alpha(x-2\max(0,x))} = \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{e}^{-\alpha|x|}$$

(la loi de $X - Y$ s'appelle loi de Laplace de paramètre α.)

Enfin, pour tout x réel :

$$P(|X-Y| \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\int_{-x}^{x} \mathrm{e}^{-\alpha|t|}\,dt = \int_0^x \alpha\mathrm{e}^{-\alpha t}dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que $|X - Y|$ suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\alpha)$.

2. L'individu C sort le dernier de sa cabine si, et seulement si, l'événement $(W + \inf(U, V) \geqslant \sup(U, V))$ est réalisé. Or :

$$\begin{aligned}(W + \inf(U,V) \geqslant \sup(U,V)) &= [W \geqslant \sup(U,V) - \inf(U,V)] \\ &= [W \geqslant |U-V|] = [|U-V| - W \leqslant 0]\end{aligned}$$

Comme les variables aléatoires $|U - V|$ et W sont indépendantes et suivent toutes deux la loi $\mathcal{E}(\alpha)$, la variable aléatoire $|U-V|-W$ suit la loi de Laplace de paramètre α, loi qui est symétrique par rapport à 0 : la probabilité que C soit le dernier à sortir de sa cabine est donc égale à $\frac{1}{2}$.

3. Comme X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, pour tout réel t :

$$P(\sup(X,Y) \leqslant t) = P(X \leqslant t) \cap (Y \leqslant t)) = P(X \leqslant t)P(Y \leqslant t)$$

Donc :

$$P(\sup(X,Y) \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (1-\mathrm{e}^{-\alpha t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction de répartition est continue sauf peut-être en un nombre fini de points ; ainsi $\sup(U, V)$ est une variable aléatoire à densité, de densité :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2\alpha(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-2\alpha t}) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Les variables aléatoires $\inf(U, V)$ et W sont indépendantes ; la variable aléatoire $T = \inf(U, V) + W$ est à densité, de densité donnée, pour tout réel x par :

$$f_T(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_W(t) f_{\min(U,V)}(x-t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\alpha^2\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{e}^{-2\alpha(x-t)}\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Donc une densité de T est :

$$f_T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\alpha(e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Un calcul élémentaire montre que T admet une espérance et que $E(T) = \frac{3}{2\alpha}$.

4. Il est clair que :

$$Z = \sup(\sup(U,V), T) = \sup(\sup(U,V), \inf(U,V) + W)$$

$$= \inf(U,V) + \sup(\sup(U,V),W) - \inf((U,V),W)$$
$$= \inf(U,V) + \sup(|U-V|,W)$$

Les variables aléatoires $\inf(U,V), |U-V|$ et W étant indépendantes, les variables $\inf(U,V)$ et $\sup(|U-V|,W)$ sont indépendantes. Comme elles sont à densité, la variable Z l'est également. Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 4\alpha^2 \displaystyle\int_0^x (e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t})e^{-2\alpha(x-t)}dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit :

$$f_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x)e^{-2\alpha x}}{\alpha} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Enfin la variable $Z - T$ n'est pas à densité puisque $P(Z - T = 0) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.12.

1. Soit c un nombre réel. On définit l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ cx.e^{-2x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Indiquer pour quelle valeur du réel c, f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, f désignera la fonction précédente pour la valeur de c qu'on vient de déterminer.

2. Un appareil fonctionne à l'aide d'une pile. Le type de piles utilisé pour cet appareil a une durée de vie exprimée en mois (lorsque l'appareil fonctionne en continu) qui est une variable aléatoire de densité f.

On procède de la manière suivante : à l'instant 0 une pile neuve est placée dans l'appareil, ensuite celui-ci reste branché en permanence et chaque fois qu'il cesse de fonctionner on remplace la pile usagée par une pile neuve, le temps mis pour effectuer le remplacement étant négligé.

Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i la variable aléatoire donnant la date mensuelle où on procède au $i^{\text{ème}}$ remplacement de pile.

a) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, donner une densité de la variable X_i, ainsi que la valeur de son espérance $E(X_i)$.

b) Pour m réel, calculer $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m)$ en fonction de m.

c) Si $m > 0$, déterminer le signe de $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m)$ dans les cas suivants :

(i) $m = \dfrac{E(X_1)}{2}$;

(ii) m proche de 0 ;

(iii) m suffisamment grand.

Solution :

1. La connaissance de la loi $\Gamma(b,\tau)$ qui a pour densité

$$\frac{e^{-\frac{x}{b}}x^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)b^\tau}, \text{ si } x > 0 \text{ et } 0 \text{ si } x \leqslant 0$$

permet de conclure (cas où $b = 1/2$ et $\tau = 2$) que la fonction f est une densité si et seulement si :

$$c = \frac{1}{\Gamma(2)(1/2)^2} = 4$$

2. a) Notons Y_i la durée de fonctionnement de la $i^{\text{ème}}$ pile. On a $Y_i \hookrightarrow \Gamma\big(\frac{1}{2}, 2\big)$.

Les variables aléatoires, $Y_1, \ldots, Y_i$ sont indépendantes, et $X_i = \sum\limits_{k=1}^{i} Y_k$. Ainsi :

$$X_i \hookrightarrow \Gamma\big(\frac{1}{2}, 2i\big).$$

Une densité de X_i est donnée par :

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 4^i \dfrac{\mathrm{e}^{-2x} x^{2i-1}}{(2i-1)!} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On sait alors que $E(X_i) = \frac{1}{2} \times (2i) = i$.

b) A l'aide d'intégrations par parties :

$$P(X_1 > m) = \int_m^{+\infty} 4x.\mathrm{e}^{-2x}\, dx = (2m+1)\mathrm{e}^{-2m}$$

$$P(X_2 > 2m) = \int_{2m}^{+\infty} \frac{16}{6} x^3.\mathrm{e}^{-2x}\, dx = \big(\frac{32}{3}\, m^3 + 8m^2 + 4m + 1\big)\mathrm{e}^{-4m}$$

i) Pour $m = \dfrac{E(X_1)}{2} = \dfrac{1}{2}$, il vient :

$$P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{3}(6\mathrm{e} - 19) < 0$$

ii) Pour m voisin de 0 :

$$\begin{aligned} P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) &= \mathrm{e}^{-4m}\big(\mathrm{e}^{2m}(2m+1) - (\frac{32}{3} m^3 + 8m^2 + 4m + 1)\big) \\ &= \mathrm{e}^{-4m}(-2m^2 + o(m^2)) \end{aligned}$$

donc $P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) < 0$ lorsque m est au voisinage de 0.

iii) Lorsque m est au voisinage de $+\infty$:

$$P(X_1 > m) - P(X_2 > 2m) \sim (2m+1)\mathrm{e}^{-2m} > 0$$

Exercice 3.13.

Une expérience aléatoire est simulée par la fonction Pascal suivante :

```
Const n = ... ;
var u :array[1..n] of integer ;
function escp2005(m :integer) :integer ;
var  i,j,s :integer ;
begin
randomize ;
u[1] :=random(m)+1 ;
i :=1 ;
s :=0 ;
repeat i :=i+1 ;
       u[i] :=random(m)+1 ;
       for j :=1 to i-1 do  if u[i]=u[j] then s :=s+1
until s=1 ;
escp2005 :=i
end ;
```

On rappelle que l'instruction `x :=random(m)` place dans `x` et au hasard une valeur entière comprise entre 0 et $m-1$, la procédure `randomize` permettant d'initialiser la fonction `random`.

1. On souhaite appeler `escp2005` avec $m = 6$. Quelle valeur minimale de `n` doit-on donner pour que la fonction rende un résultat ? Décrire alors l'expérience ainsi simulée.

2. On note X_m la variable aléatoire correspondant à la valeur rendue par la fonction `escp2005` (n ayant une valeur telle que le programme fonctionne).

a) Donner la loi de X_6.

b) On se place dans le cas où m est quelconque. Exprimer la probabilité de l'événement $\{X_m = k+1\}$ en fonction de celle de l'événement $\{X_m = k\}$.

c) En déduire un programme en Pascal demandant deux entiers m et k compris entre 2 et 100 et permettant de calculer la probabilité de l'événement $\{X_m = k\}$ et l'espérance de X_m.

Solution :

1. Pour $m = 6$, l'expérience simulée est la suivante : on effectue des lancers successifs d'un dé équilibré (l'instruction `random(m)+1` donne un nombre aléatoire entre 1 et 6 suivant la loi uniforme $\mathcal{U}[\![1,6]\!]$) et on arrête les lancers dès que l'on a obtenu pour la seconde fois un numéro obtenu lors d'un des lancers précédents (la variable `s` sert de « drapeau », condition d'arrêt lorsque $s = 1$).

Comme il y a 6 numéros distincts, le nombre maximal de lancers sera 7.

Il faut donc choisir $n = 7$.

2. a) On a $X_6(\Omega) = [\![2,7]\!]$, et pour tout $i \in X_6(\Omega)$

$$P(X_6 = i) = \mathrm{A}_6^{i-1}\,\frac{i-1}{6^i} = \frac{6!}{(7-i)!}\times\frac{(i-1)}{6^i}$$

b) Dans le cas général, $X_m(\Omega) = [\![2, m+1]\!]$, et pour tout $k \in X_m(\Omega)$:

$$P(X_m = k) = \frac{\mathrm{A}_m^{k-1}(k-1)}{m^k} = \frac{m!}{m^k}\times\frac{k-1}{(m-k+1)!}$$

Alors, pour $k \in [\![2, m]\!]$:

$$\frac{P(X_m = k+1)}{P(X_m = k)} = \frac{k(m-k+1)}{m(k-1)}$$

et :

$$P(X_m = k+1) = \frac{k(m-k+1)}{m(k-1)}\,P(X_m = k)$$

avec $P(X_m = 2) = \dfrac{1}{m}$.

c) Voici une proposition de programme :

```
Programm ESCP05b
Var P :array[1..101] of real ; e :real ;
     i,m,k : integer ;
Begin
Readln(m,i) ;
```

```
For k :=1 to 101 do P[k] :=0 ;
P[2] := 1/m ;
e :=0 ;
For k :=2 to m do
   Begin
   P[k+1] := k*(m-k+1)/(m*(k-1))*P[k] ;
   e := a+k*P[k]
   End ;
Writeln(P[i], e+(m+1)*P[m+1]) ;
Readln
End.
```

Exercice 3.14.

Soit X une variable aléatoire à densité, à valeurs dans $[0,+\infty[$. On note f une densité de X.

1. a) Montrer que pour $x \in]0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt$ converge et que sa valeur est comprise entre 0 et 1.

On définit la fonction H sur $\mathbb{R}$, par :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

b) Montrer que H est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On suppose que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Expliciter $H(x)$, selon les valeurs de x et montrer que H est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire ayant H pour fonction de répartition.

b) Déterminer une densité h de $\widetilde{X}$.

c) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et une variance (on ne cherchera pas à les calculer).

3. On suppose dans cette question que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter $H(x)$ selon les valeurs de x et montrer que H est la fonction de répartition d'une variable à densité. On note $\widetilde{X}$ une variable aléatoire ayant H pour fonction de répartition.

b) Déterminer une densité h de $\widetilde{X}$.

c) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et une variance (on ne cherchera pas à les calculer).

Solution :

1. a) Comme $x \in]0,1]$, $x^t = \mathrm{e}^{t \ln x}$ vérifie, pour tout $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x^t \leqslant 1$. Comme $f(t) \geqslant 0$, il vient

$$0 \leqslant x^t f(t) \leqslant f(t)$$

et comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 1$, on en déduit que pour tout $x \in]0,1]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^t f(t)\,dt$ existe et reste compris entre 0 et 1.

b) Soit x et y réels tels que $x < y$. Au vu de la question précédente, le seul cas à traiter est $0 \leqslant x < y \leqslant 1$.
Dans ce cas, par croissance de la fonction logarithme : $\mathrm{e}^{t\ln x} \leqslant \mathrm{e}^{t\ln y}$ et par intégration : $H(x) \leqslant H(y)$.

2. a) Lorsque X suit une loi uniforme sur $[0,1]$, il vient, pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{t\ln x}\,dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{t\ln x}}{\ln x}\right]_0^1 = \frac{x-1}{\ln x}$$

Soit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie que H est une fonction de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, que l'on a $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et qu'elle est croissante. C'est donc une fonction de répartition.

b) Pour tout $x \in]0,1[$:

$$H'(x) = \frac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2}$$

Donc :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x - x + 1}{x(\ln x)^2} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Soit $g(x) = xh(x) = \dfrac{x\ln x - x + 1}{(\ln x)^2}$.

- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$
- au voisinage de 1, en posant $x = 1-h$: $g(x) = \dfrac{h^2/2 + o(h^2)}{h^2 + o(h^2)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$

Ainsi g est prolongeable par continuité sur $[0,1]$, ce qui entraîne que $E(\widetilde{X})$ existe et plus généralement que $\widetilde{X}$ admet des moments de tous ordres.

3. a) Lorsque X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, il vient, pour $x \in]0,1[$:

$$H(x) = \int_0^1 \lambda\mathrm{e}^{t(\ln x - \lambda)}\,dt = \frac{\lambda}{\lambda - \ln x}$$

Soit :

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\lambda}{\lambda - \ln x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie que H est une fonction de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, que $\lim\limits_{x\to-\infty} H(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 1$ et qu'elle est croissante. C'est donc une fonction de répartition.

b) Pour tout $x \in]0,1[$, $H'(x) = \dfrac{\lambda}{x(\lambda - \ln x)^2}$.

Donc :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x(\lambda - \ln x)^2} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) Soit $g(x) = xh(x) = \dfrac{\lambda}{(\lambda - \ln x)^2}$.

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$ et comme $\lambda > 0$ et $\ln x \leqslant 0$, la fonction g est continue sur $]0,1]$. Donc g est prolongeable en une fonction continue sur $[0,1]$. Il en est de même de la fonction $x \mapsto x^2 h(x)$. Ainsi $E(\widetilde{X})$ et $V(\widetilde{X})$ existent.

Exercice 3.15.

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$. On pose, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$V(\omega) = \int_{-1}^{1} \min(x, U(\omega))\, dx$$
$$W(\omega) = \int_{-1}^{1} \max(x, U(\omega))\, dx$$

et on admet par la suite que V et W sont des variables aléatoires.

1. Montrer que $P(V \leqslant 0) = P(W \geqslant 0) = 1$.

2. Établir la relation $V = -\dfrac{(U-1)^2}{2}$ et en déduire la loi de V. Calculer l'espérance de $\min(x,U)$ pour tout $x \in [-1,1]$, puis l'espérance de V. Conclusion ?

3. Déduire la loi de W de celle de V.

4. On considère dans cette question une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\geqslant 1}$, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, où U_n suit la loi normale d'espérance nulle et de variance $\dfrac{1}{n}$ et on pose :

$$\forall\, \omega \in \Omega, V_n(\omega) = \int_{-1}^{1} \min(x, U_n(\omega))\, dx.$$

Étudier la convergence en loi de la suite V_n.
On pourra calculer la fonction de répartition de V_n.

Solution :

1. Pour tout $x \in [-1,1]$ et tout ω de Ω, on a :

$$\min(x, U(\omega)) \leqslant x \text{ et } \max(x, U(\omega)) \geqslant x.$$

La fonction $x \mapsto x$ est d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, d'où le résultat.

2. On peut écrire :

$$V(\omega) = \int_{-1}^{U(\omega)} x\, dx + \int_{U(\omega)}^{1} U(\omega)\, dx = \frac{1}{2}(U(\omega)^2 - 1) + U(\omega)(1 - U(\omega))$$
$$V(\omega) = -\frac{(U(\omega)-1)^2}{2}$$

Ainsi, pour tout $v \geqslant 0$:

$$P(V \leqslant -v) = P((1-U)^2 \geqslant 2v) = P(U \leqslant 1 - \sqrt{2v})$$

et :

$$P(V \leqslant -v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \geqslant 2 \\ 1 - \sqrt{\dfrac{v}{2}} & \text{si } 0 \leqslant v \leqslant 2 \end{cases}$$

Par conséquent, une densité de V est :

$$f_V(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \notin]-2, 0[\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{\sqrt{-v}} & \text{si } v \in]-2, 0[\end{cases}$$

Et :

$$E(V) = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} \sqrt{\frac{-v}{2}}\, dv = -\frac{2}{3}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} E(\inf(x,U)) &= E(x.1_{(U \geqslant x)} + U.1_{(U \leqslant x)}) = xP(U \geqslant x) + \int_{-1}^{x} \frac{u}{2}\, du \\ &= \frac{x(1-x)}{2} + \frac{1}{4}(x^2-1) = -\frac{1}{4}(x-1)^2 \end{aligned}$$

On a $\displaystyle\int_{-1}^{1} E(\inf(x,U))\, dx = -\frac{2}{3}$: l'intégrale de l'espérance est donc l'espérance de l'intégrale.

3. La loi de $-U$ est celle de U. En effectuant le changement de variable $y = -x$ dans l'expression de W, et après avoir remarqué que $\sup(-x, -U) = -\inf(x, U)$, on obtient que la loi de W est celle de $-V$ ou encore celle de $\dfrac{(U+1)^2}{2}$.

4. Pour tout a réel, $P(V_n \geqslant a) = P\big(-\dfrac{(U-1)^2}{2} \geqslant a\big) = P\big((U-1)^2 \leqslant -2a\big)$.

⋆ Si $a \geqslant 0$, on a $P(V_n \geqslant a) = 0$.

⋆ Si $a < 0$, $P(V_n \geqslant a) = P\big((U_n-1)^2 \leqslant -2a\big)$, soit puisque $\sqrt{n}U_n$ suit la loi normale centrée réduite, de fonction de répartition Φ :

$$\begin{aligned} P(V_n \geqslant a) &= P(1 - \sqrt{-2a} \leqslant U_n \leqslant 1 + \sqrt{-2a}) \\ &= \Phi(\sqrt{n}(1 + \sqrt{-2a}\,) - \Phi(\sqrt{n}(1 - \sqrt{-2a}\,) \end{aligned}$$

- Si $a < -\dfrac{1}{2}$, on a $-2a > 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(V_n \geqslant a) = \lim_{+\infty} \Phi - \lim_{-\infty} \Phi = 1$
- Si $a > -\dfrac{1}{2}$, on a $-2a < 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(V_n \geqslant a) = \lim_{+\infty} \Phi - \lim_{+\infty} \Phi = 0$

Donc la suite (V_n) converge en loi vers une variable certaine égale à $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.16.

Au milieu de leurs révisions, Evariste et Raymond décident, chacun de leur côté, d'aller se changer les idées à la cafétéria, mais comme ils ont beaucoup de travail, ils n'y restent que 10 minutes.

On note X et Y les heures d'arrivée respectives d'Evariste et de Raymond à la cafétéria, et on suppose que X et Y sont indépendantes et uniformément distribuées entre 10 h et 11 h.

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $X - Y$.

2. Déterminer la probabilité qu'Evariste et Raymond se retrouvent ensemble à la cafétéria.

3. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h. Déterminer, en fonction de h, la probabilité qu'il retrouve Raymond.

4. On suppose qu'Evariste est arrivé à l'heure h et que Raymond ne se trouvait pas à la cafétéria à cette heure là. Calculer la probabilité qu'Evariste rencontre Raymond.

Solution :

1. On sait que X suit la loi $\mathcal{U}\big([10,11]\big)$ et que $-Y$ suit la loi $\mathcal{U}\big([-11,-10]\big)$. Comme ces deux variables aléatoires sont indépendantes, une densité de $X-Y$ est donnée par convolution, soit pour tout réel x :

$$f_{X-Y}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_{-Y}(x-t)\,dt$$

Or $f_X(t)f_{-Y}(x-t)\neq 0$ (donc égal à 1) si et seulement si $\begin{cases}10\leqslant t\leqslant 11\\ -11\leqslant x-t\leqslant -10\end{cases}$, c'est-à-dire $\max(10,x+10)\leqslant t\leqslant \min(11,11+x)$

Donc :

$$f_{X-Y}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant -1\\ \displaystyle\int_{10}^{x+11} dt=x+1 & \text{si } -1\leqslant x\leqslant 0\\ \displaystyle\int_{x+10}^{11} dt=1-x & \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$$

soit, en regroupant :

$$f_{X-Y}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[-1,1]\\ 1-|x| & \text{si } x\in[-1,1]\end{cases}$$

2. La probabilité cherchée est :

$$p_1=P\big(|X-Y|\leqslant \tfrac{1}{6}\big)=P\big(-\tfrac{1}{6}\leqslant X-Y\leqslant \tfrac{1}{6}\big)=\int_{-1/6}^{1/6}(1-|t|)\,dt$$
$$=2\int_0^{1/6}(1-t)\,dt=\frac{11}{36}$$

3. Comme h est fixé, la probabilité demandée est $p_2=P\big(h-\frac{1}{6}\leqslant Y\leqslant h+\frac{1}{6}\big)$.

Aussi :

$$p_2 = \begin{cases} \displaystyle\int_{10}^{h+\frac{1}{6}} dt = h - 10 + \frac{1}{6} & \text{si } 10 \leqslant h \leqslant 10 + \frac{1}{6} \\ \displaystyle\int_{h-\frac{1}{6}}^{h+\frac{1}{6}} dt = \frac{1}{3} & \text{si } 10 + \frac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 - \frac{1}{6} \\ \displaystyle\int_{h-\frac{1}{6}}^{11} dt = 11 - h + \frac{1}{6} & \text{si } 11 - \frac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 \end{cases}$$

4. On cherche, dans cette question la probabilité :

$$p_3 = P\big((h \leqslant Y \leqslant h + \frac{1}{6})/(Y > h) \cup (Y < h - \frac{1}{6})\big)$$

(car dire que Raymond n'était pas là, c'est dire qu'il n'était pas encore arrivé ou était déjà reparti !)

• Si $h \leqslant 10 + \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(h \leqslant Y \leqslant h + 1/6)}{P(Y > h)} = \frac{1/6}{11 - h}$$

• Si $10 + \dfrac{1}{6} \leqslant h \leqslant 11 - \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(h \leqslant Y \leqslant h + 1/6)}{P(Y > h) + P(Y < h - 1/6)} = \frac{1/6}{(11 - h) + (h - 1/6 - 10)} = \frac{1}{5}$$

• Si $h \geqslant 11 - \dfrac{1}{6}$, alors

$$p_3 = \frac{P(Y \geqslant h)}{P(Y \geqslant h) + P(Y < h - 1/6)} = \frac{11 - h}{5/6} = \frac{6(11 - h)}{5}$$

Exercice 3.17.

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher et numérotées 1, 2 et 3.
On effectue une succession de tirages au hasard d'une boule de cette urne, avec à chaque fois remise de la boule obtenue avant le tirage suivant.
Soit X le nombre aléatoire de tirages juste nécessaires pour obtenir pour la première fois trois fois de suite le même numéro. On note p_n la probabilité de l'événement $(X = n)$ et c_n la probabilité de l'événement $(X \leqslant n)$.

1. a) Que valent p_1 et p_2 ? Calculer p_3 et p_4.

b) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $p_n = c_n - c_{n-1}$.

2. a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, $p_{n+3} = 2\times\big(\frac{1}{3}\big)^3(1 - c_n)$.

b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_{n+3} - p_{n+2} + \dfrac{2}{27}\,p_n = 0$.

3. a) Pour $n \geqslant 2$, on pose $u_n = p_{n+2} - \dfrac{2}{3}\,p_{n+1} - \dfrac{2}{9}\,p_n$. Calculer u_2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est la suite nulle.

b) En déduire que pour $n \geqslant 2$, $p_n = \dfrac{1}{6\sqrt{3}}\Big(\big(\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}\big)^{n-2} - \big(\dfrac{1-\sqrt{3}}{3}\big)^{n-2}\Big)$.

c) Montrer que la série de terme général p_n est convergente et calculer $\sum\limits_{n=2}^{\infty} p_n$. Que signifie le résultat obtenu ?

d) Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer son espérance.

Solution :

1. a) $\star$ Au vu de l'expérience réalisée, il est évident que $p_1 = p_2 = c_1 = c_2 = 0$.

$\star$ L'événement $(X = 3)$ est réalisé si les trois premiers tirages amènent le même résultat, donc si les tirages de rang 2 et 3 amènent le même résultat que le premier tirage (et le résultat du premier tirage est indifférent).

Donc $p_3 = \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{9} = \frac{3}{27}$ et $c_3 = p_3$.

$\star$ L'événement $(X = 4)$ consiste à tirer une boule au premier coup (indifférente), puis une boule portant un autre numéro (avec la probabilité $\frac{2}{3}$), puis deux fois encore cette même boule (avec la probabilité $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$). Ainsi :

$$p_4 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{9} = \frac{2}{27} \text{ et } c_4 = \frac{5}{27}$$

b) Comme, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, il vient, pour $n \geqslant 2$:

$$p_n = c_n - c_{n-1}$$

2. a) L'événement $(X = n + 3)$ est réalisé si et seulement si jusqu'au tirage de rang n, on n'a jamais tiré trois fois consécutivement le même numéro (on réalise ainsi $(X > n)$) et si on a obtenu aux tirages de rangs $n + 1, n + 2$ et $n + 3$ le même numéro distinct de celui obtenu au tirage de rang n.

Comme les résultats des tirages effectués sont indépendants, il vient :

$$p_{n+3} = P(X > n)\times\frac{2}{3}\times\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 = \frac{2}{27}(1 - c_n)$$

b) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_{n+3} - p_{n+2} = \frac{2}{27}(1 - c_n) - \frac{2}{27}(1 - c_{n-1}) = \frac{2}{27}(c_{n-1} - c_n) = -\frac{2}{27}p_n$$

3. a) Pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_{n+1} = p_{n+3} - \frac{2}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} = \frac{1}{3}p_{n+2} - \frac{2}{9}p_{n+1} - \frac{2}{27}p_n = \frac{1}{3}u_n$$

La suite $(u_n)_n$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et comme $u_2 = 0$, on a $u_n = 0$, pour tout $n \geqslant 2$.

b) Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$$

Le polynôme $X^2 - \frac{2}{3}X - \frac{2}{9}$ admet deux racines $a = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$ et $b = \frac{1-\sqrt{3}}{3}$.

On sait donc qu'il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \lambda a^n + \mu b^n$$

ces deux réels étant fixés par les valeurs de p_2 et p_3. Finalement, après calculs, pour tout $n \geqslant 2$:

$$p_n = \frac{1}{6\sqrt{3}}\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Big)^{n-2} - \Big(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\Big)^{n-2}\Big)$$

c) On remarque que $\Big|\frac{1+\sqrt{3}}{3}\Big| < 1$ et $\Big|\frac{1-\sqrt{3}}{3}\Big| < 1$.

Donc la série $\sum p_n$ est convergente ; en particulier, la suite $(p_n)_n$ tend vers 0 et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$.
Comme la suite $(X \leqslant n)$ est croissante pour l'inclusion, on en déduit que $P\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1}(X \leqslant n)\big) = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$.
Ce qui signifie que l'on obtiendra presque sûrement trois fois consécutivement le même numéro.

d) Pour tout $k \geqslant 1$, les séries $\sum n^k a^n$ et $\sum n^k b^n$ convergent. Aussi X admet des moments de tous ordres.
Enfin :

$$E(X) = \frac{1}{6a\sqrt{3}}\sum_{n=2}^{\infty} na^{n-1} - \frac{1}{6b\sqrt{3}}\sum_{n=2}^{\infty} nb^{n-1}$$

$$E(X) = \frac{1}{6a\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{(1-a)^2} - 1\Big) - \frac{1}{6b\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{(1-b)^2} - 1\Big)$$

et, en remplaant a et b par leurs valeurs :

$$E(X) = 13$$

Exercice 3.18.

Dans tout cet exercice, α est un réel tel que $\alpha > 2$.

1. Soit b un réel tel que $b \geqslant 1$. Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$$g(x) = (1-x)^b + x^b - 1$$

En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $[0,1]$.

2. Soit f_α la fonction définie sur $[-1,1]$ par :

$$f_\alpha : t \mapsto 2^{\alpha-1}(1+|t|^\alpha) - (1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha$$

En utilisant la question précédente (ou de toute autre manière) montrer que pour tout t de $[-1,1]$, on a $f_\alpha(t) \geqslant 0$.

3. Soit h_α la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_\alpha : t \longmapsto \begin{cases} k_\alpha f_\alpha(t) & \text{si } t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où k_α est une constante réelle.

a) Déterminer k_α pour que h_α soit une densité de variable aléatoire réelle.

On note dans la suite X_α une variable aléatoire admettant alors cette densité

b) Déterminer la fonction de répartition F_α de X_α.

4. Déterminer la limite de k_α, lorsque α tend vers l'infini. En déduire que pour tout réel t, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} F_\alpha(t)$ existe. Que représente cette limite en termes de probabilités ?

5. a) Calculer l'espérance $E(X_\alpha)$ et la variance $V(X_\alpha)$ de X_α.

b) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} V(X_\alpha)$.

Solution :

1. La fonction $g : x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $[0,1]$ et pour tout x de cet intervalle :

$$g'(x) = b(x^{b-1} - (1-x)^{b-1})$$

$g'(x) \geqslant 0 \iff x^{b-1} \geqslant (1-x)^{b-1} \iff x \geqslant 1-x \iff x \geqslant \dfrac{1}{2}$.
L'équation $g'(x) = 0$ est équivalente à $x = 1/2$.
Donc g est décroissante sur $\big[0, \frac{1}{2}\big]$, croissante sur $\big[\frac{1}{2}, 1\big]$, et comme $g(0) = g(1) = 0$, il vient $g(x) \leqslant 0$, pour tout $x \in [0,1]$.

2. La fonction $f_\alpha : t \mapsto f_\alpha(t)$ est paire. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,1]$ et sur cet intervalle :

$$f_\alpha(t) = 2^{\alpha-1}(1+t^\alpha) - (1+t)^\alpha - (1-t)^\alpha$$

Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ et :

$$f'_\alpha(t) = \alpha\big((2t)^{\alpha-1} - (1+t)^{\alpha-1} + (1-t)^{\alpha-1}\big)$$

Si l'on pose $u = 1+t, v = 1-t$, alors :
$f'_\alpha(t) = \alpha\big((u-v)^{\alpha-1} - u^{\alpha-1} + v^{\alpha-1}\big) = \alpha u^{\alpha-1}\big((1-\frac{v}{u})^{\alpha-1} + (\frac{v}{u})^{\alpha-1} - 1\big)$
avec $0 \leqslant \dfrac{v}{u} \leqslant 1$.

Par la question précédente, il vient $f'_\alpha(t) \leqslant 0$. La fonction f_α est donc décroissante sur $[0,1]$ et comme $f_\alpha(1) = 0$, elle reste positive sur cet intervalle, et par parité, sur $[-1,1]$.

3. a) La fonction f_α est continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\alpha(t)\,dt &= 2\int_0^1 f_\alpha(t)\,dt \\ &= 2\Big[2^{\alpha-1}\big(t + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big) - \frac{(1+t)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big]_0^1 \\ &= 2\big(2^{\alpha-1}\big(1 + \frac{1}{\alpha+1}\big) - \frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\big) = \frac{2^\alpha}{\alpha+1}(\alpha-2)\end{aligned}$$

Donc :

$$k_\alpha = \frac{\alpha+1}{2^\alpha(\alpha-2)}$$

b) On vient en fait de déterminer une primitive de f_α et donc :

- Si $x \leqslant -1$, $F_\alpha(x) = 0$ et si $x \geqslant 1$, $F_\alpha(x) = 1$.
- Si $-1 < x \leqslant 0$:
$$F_\alpha(x) = \frac{-2^{\alpha+1} + \alpha 2^\alpha(x+1) - 2^\alpha(-x)^{\alpha+1} + 2(1-x)^{\alpha+1} - 2(1+x)^{\alpha+1}}{2^{\alpha+1}(\alpha-2)}$$
- Si $0 \leqslant x < 1$:
$$F_\alpha(x) = \frac{1}{2} + \frac{x2^{\alpha-1}(\alpha+1) + 2^{\alpha-1}x^{\alpha+1} + (1-x)^{\alpha+1} - (1+x)^{\alpha+1}}{2^\alpha(\alpha-2)}$$

4. On a $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\alpha+1}{2^\alpha(\alpha-2)} = 0$, et on obtient :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \lim_{\alpha\to+\infty} F_\alpha(x) = \frac{1+x}{2}$$

Ainsi (X_α) tend en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([-1,1])$.

5. a) La fonction $x \mapsto xf_\alpha(x)$ étant impaire, on a $E(X_\alpha) = 0$.

b) On trouve :

$$V(X_\alpha) = 2\int_0^1 k_\alpha t^2 f_\alpha(t)\,dt = \frac{\alpha^2 - \alpha + 6}{3(\alpha^2 + 5\alpha + 6)}$$

et

$$\lim_{\alpha \to +\infty} V(X_\alpha) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.19.

Un gendarme va constater une suite illimitée d'infractions sur l'autoroute. Chaque infraction peut être sanctionnée par une verbalisation ou un avertissement (sans frais).

Il décide qu'il tirera au sort (avec une pièce de monnaie non truquée) la sanction pour la première infraction constatée. Puis pour tout p de $\mathbb{N}^*$, si pour la $p^{\text{ème}}$ infraction il verbalise, alors la $(p+1)^{\text{ème}}$ fera l'objet d'un avertissement, tandis que si la $p^{\text{ème}}$ infraction fait l'objet d'un avertissement, alors la $(p+1)^{\text{ème}}$ fera l'objet d'une verbalisation ou d'un avertissement par tirage au sort.

1. Ecrire un programme qui simule les sanctions successives pour les n premières infractions constatées.

2. On note a_p (respectivement b_p) la probabilité pour que la $p^{\text{ème}}$ infraction fasse l'objet d'une verbalisation (respectivement d'un avertissement).

a) Exprimer a_{p+1} et b_{p+1} en fonction de a_p et b_p.

b) En déduire a_p et b_p en fonction de p.

c) Que vaut la probabilité que ce gendarme ne fasse jamais aucune verbalisation ?

3. Soit X la variable aléatoire égale au rang de la première verbalisation effectuée. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par Y_n (resp. Z_n) le nombre de verbalisations (resp. d'avertissements) effectuées au cours des n premières infractions.

a) Déterminer une relation entre les espérances de Y_n et de Z_n, puis entre les variances de ces variables aléatoires. Que vaut le coefficient de corrélation de Y_n et de Z_n ?

b) Déterminer les valeurs prises par Y_n.

c) Calculer la probabilité de l'événement $[Y_n = 0]$.

Solution :

1. Voici une proposition de programme :

```
Var n,k : integer ;
Begin
Randomize ;
Readln(n) ;
k :=1 ;
While k<n do
      If random(2)=0 then begin
            writeln('verbalisation') ;
            k :=k+2
            end
```

```
      else begin
            writeln('avertissement') ;
            k :=k+1
            end
end ;
If k=n then if random(2)=0 then writeln('verbalisation')
      else writeln('avertissement')
End.
```

2. a) Avec des notations évidentes (sic !) :

$$\begin{aligned} a_{p+1} &= P(V_{p+1}) = P(A_p)P(V_{p+1}/A_p) + P(V_p)P(V_{p+1}/V_p) \\ &= P(A_p)\times\frac{1}{2} + P(V_p)\times 0 = \frac{1}{2}\, b_p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_{p+1} &= P(A_{p+1}) = P(A_p)P(A_{p+1}/A_p) + P(V_p)P(A_{p+1}/V_p) \\ &= P(A_p)\times\frac{1}{2} + P(V_p)\times 1 = \frac{1}{2}\, b_p + a_p \end{aligned}$$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. On a alors $\begin{pmatrix} a_{p+1} \\ b_{p+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \end{pmatrix}$.

Un calcul élémentaire montre que la matrice A est diagonalisable et que l'on peut écrire : $A = PDP^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $p \geqslant 0$:

$$a_p = -\frac{1}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^p + \frac{1}{3}, \quad b_p = \frac{1}{3}\big(-\frac{1}{2}\big)^p + \frac{2}{3}$$

c) L'événement considéré est $A = \bigcap\limits_{p=1}^{\infty} B_p$. La suite $\big(\bigcap\limits_{p=1}^{n} B_p\big)_n$ est une suite décroissante pour l'inclusion. Aussi

$$P(A) = \lim_{n\to+\infty} P\big(\bigcap_{p=1}^{n} B_p\big)$$

Par la formule des probabilités composées :

$$P\big(\bigcap_{p=1}^{n} B_p\big) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{n-1}}(B_n) = \big(\frac{1}{2}\big)^n$$

et $P(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^n = 0$.

3. On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \geqslant 1$, l'événement $(X = p)$ est égal à $B_1 \cap \cdots \cap B_{p-1} \cap \overline{B_p}$. Par la formule des probabilités composées, il vient :

$$P(X = p) = \big(\frac{1}{2}\big)^p$$

Ainsi X suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{1}{2}\big)$; et $E(X) = 2, V(X) = 2$.

4. a) On a $Y_n + Z_n = n$. D'où $E(Y_n) + E(Z_n) = n$ et $V(Y_n) = V(Z_n)$.

Comme $Y_n = n - Z_n$, on a $\rho_{Y_n,Z_n} = -1$.

b) Il n'y a pas deux verbalisations consécutives, donc on a $Y_n(\Omega) = [\![0, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor]\!]$

c) Et $P(Y_n = 0) = \big(\frac{1}{2}\big)^n$.

Exercice 3.20.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, N étant un entier naturel non nul.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne *avec* remise.

Soit X la variable aléatoire prenant la valeur $k \in \mathbb{N}^*$ si, au cours des k premiers tirages mais pas des $k-1$ premiers, chaque numéro a été sorti au moins une fois, et prenant la valeur 0 si un tel rang ne se présente pas.

1. Quelles sont la loi et l'espérance de X lorsque $N = 1$?

On suppose dans toute la suite que $N \geqslant 2$.

2. Déterminer $P\big([X=1]\big), P\big([X=2]\big), \dots, P\big([X=N]\big)$.
Établir à l'aide de la formule du crible que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\big([X>k]\big) = \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}(-1)^{j-1}(N-j)^k$$

Vérifier que cette formule est également valide pour $k = 0$.

De quelle façon obtient-on la loi de X ? (Ne pas effectuer le calcul.)

3. *On admet qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{N}$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $P\big([T>k]\big)$ converge et qu'en ce cas* $E(T) = \sum_{k=0}^{+\infty} P\big([T>k]\big)$.

Montrer que X admet une espérance et que $E(X) = N\sum_{j=1}^{N}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\binom{N}{j}$.

4. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^N-1}{x}\,dx$. En déduire que $E(X) = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.

5. Retrouver simplement le résultat précédent en introduisant N variables aléatoires de lois géométriques.

Solution :

1. Lorsque $N = 1$, X est égale à la constante 1 et $E(X) = 1$.

2. On a immédiatement, pour $k \in [\![1, N]\!]$, $P(X = k) = 0$.

Notons, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, N]\!]$, $Z_{k,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si le numéro i est sorti au cours des k premiers tirages, et à 0 sinon.

Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(X > k) = \bigcup_{i=1}^{N}(Z_{k,i} = 0)$. Donc, par la formule de Poincaré :

$$P(X>k) = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_j\leqslant N} P\big((Z_{k,i_1}=0)\cap\cdots\cap(Z_{k,i_j}=0)\big)$$

Or l'événement $\bigcap_{a\in A}(Z_{k,a}=0)$ est réalisé si, au cours des k premiers tirages ne sortent que des numéros de $\overline{A}$. Ainsi pour toute partie A de $[\![1, N]\!]$, on a

$$P\Big(\bigcap_{a\in A}(Z_{k,a}=0)\Big) = \Big(\frac{N-\mathrm{card}(A)}{N}\Big)^k$$

Donc en remarquant que $\binom{N}{j} = \binom{N}{N-j}$, et à l'aide du changement d'indice $j \to N-j$:

$$P(X > k) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j-1}\binom{N}{j}\big(\frac{N-j}{N}\big)^k = \frac{(-1)^{N-1}}{N^k}\sum_{j=0}^{N-1}\binom{N}{j}(-1)^j j^k$$

L'événement $(X = 0)$ étant l'intersection de la famille décroissante d'événements $(X > k)_{k \geqslant 1}$, on a :

$$P(X = 0) = \lim_{k\to+\infty} P(X > k) = 0$$

Donc :

$\star$ $P(X > 0) = 1$ et d'autre part :

$\star$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\binom{N}{j}\big(\frac{N-j}{N}\big)^0 = \sum_{j=0}^{N-1}\binom{N}{j}(-1)^{j-1} - (-1)^{-1}$

$$= -(1-1)^N + 1 = 1$$

Ce qui prouve que la formule précédente est valable pour $k = 0$.

Pour déterminer la loi de X, il suffirait d'utiliser la relation :

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

3. Comme pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, on a $0 \leqslant 1 - \frac{j}{N} < 1$, la série $\sum \big(1 - \frac{j}{N}\big)^k$ converge et la série $\sum P(X > k)$ converge ; aussi X admet-elle une espérance et :

$$E(X) = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\binom{N}{j}\sum_{k=0}^{\infty}\big(1 - \frac{j}{N}\big)^k = \sum_{j=1}^{N}(-1)^{j-1}\binom{N}{j}\frac{1}{1-(1-\frac{j}{N})}$$

Soit :

$$E(X) = N\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}\frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

4. L'intégrale proposée est convergente, puisque la fonction à intégrer se prolonge par continuité en 0 par N. Or :

$$\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^N - 1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0}\big(\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}x^{j-1}\big)\,dx = -\sum_{j=1}^{N}\binom{N}{j}\frac{(-1)^j}{j}$$

et le changement de variable affine $x = t - 1$ donne :

$$\int_{-1}^{0}\frac{(1+x)^N - 1}{x}\,dx = \int_{0}^{1}\frac{t^N - 1}{t-1}\,dt = \int_{0}^{1}\big(\sum_{j=1}^{N}t^{j-1}\big)dt = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}$$

Donc :

$$E(X) = N\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j}$$

5. Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, soit T_k le nombre aléatoire de tirages à effectuer pour obtenir un $k^{\text{ème}}$ numéro distinct des $(k-1)$ numéros distincts déjà tirés. Alors T_k suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{N-k+1}{N}\big)$.

Comme $X = \sum_{k=1}^{N} T_k$, il (re)vient :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N}E(T_k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{N}{N-k+1} = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$$

Exercice 3.21.

I. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P'^2$.

1. L'application φ est-elle injective ? Surjective ?

2. Déterminer les polynômes P pour lesquels il existe un réel λ tel que $\varphi(P) = \lambda P$.

II. On considère $n \in \mathbb{N}^*$, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, a, b, c trois variables aléatoires indépendantes telles que :

$\star$ a et b suivent la loi uniforme sur $\{0, 1, \ldots, n\}$.

$\star$ c suit la loi uniforme sur $\left\{0, \dfrac{1}{n}, \ldots, \dfrac{n}{n}\right\}$

et un polynôme aléatoire défini par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Q_\omega(X) = a(\omega) + b(\omega)X + c(\omega)X^2$$

1. Déterminer la probabilité de l'événement : $\big(\varphi(Q_\omega) = Q_\omega\big)$.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, la probabilité de l'événement : «la série de terme général $Q_\omega\big(\frac{1}{i^\alpha}\big)$, $i \geqslant 1$, est convergente».

Solution :

I. 1. $\star$ L'application φ n'est pas injective : par exemple, $\varphi(X) = 1 = \varphi(-X)$.
$\star$ Elle n'est pas surjective : il suffit de considérer un polynôme Q prenant des valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}$ (par exemple $Q = -1$) et il n'existe alors pas de polynôme P tel que $Q = P'^2$.

2. Soit P tel que $P'^2 = \lambda P$ et supposons $P \neq 0$.

$\star$ Si P est constant, alors $P' = 0$ et la relation précédente est valide, avec $\lambda = 0$.

$\star$ Si P n'est pas constant, soit n le degré de P, on sait que $\deg(P'^2) = 2(n-1)$ et $\deg(\lambda P) = n$. Donc $n = 2$.
Ainsi $P(X) = aX^2 + bX + c$, $P'^2(X) = (2aX + b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$ et $P'^2 = \lambda P$ est alors équivalent à :

$$\begin{cases} 4a^2 = \lambda a \\ 4ab = \lambda b \\ b^2 = \lambda c \end{cases}, \text{ avec } a \neq 0$$

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} a = \lambda/4 \\ b = b \\ c = b^2/\lambda \end{cases}, \text{ avec } \lambda \neq 0$$

Soit, pour tout $\lambda \neq 0$, $P(X) = \dfrac{\lambda}{4}X^2 + bX + \dfrac{b^2}{\lambda}$.

II. 1. Par la partie précédente, pour $Q_\omega = a(\omega) + b(\omega)X + c(\omega)X^2$:

$$P(\varphi(Q) = Q) = P((Q_\omega = 0) \cup (Q_\omega = b^2 + bX + \frac{1}{4}X^2))$$

Par incompatibilité :

$$P(\varphi(Q) = Q) = P(Q_\omega = 0) + P(Q_\omega = b^2 + bX + \frac{1}{4}X^2)$$

Or :

$$P(Q_\omega = 0) = P(a = b = c = 0) = P(a = 0)P(b = 0)P(c = 0) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

et :

$$P(Q_\omega = b^2 + bX + \frac{1}{4}X^2) = P\big((a = b^2) \cap (c = \frac{1}{4})\big) = P(a = b^2)P(c = \frac{1}{4})$$

Enfin :

$\star$ Si n n'est pas un multiple de 4, $P(c = \dfrac{1}{4}) = 0$ et si n est un multiple de 4, $P(c = \dfrac{1}{4}) = \dfrac{1}{n+1}$.

$\star$ $P(a = b^2) = \sum\limits_{k=0}^{n} P\big((a = k^2) \cap (b = k)\big) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a = k^2)P(b = k)$

$$P(a = b^2) = \frac{1 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{(n+1)^2}$$

Finalement :

$$P(\varphi(Q) = Q) = \begin{cases} \dfrac{2 + \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{(n+1)^3} & \text{si } n \text{ est un multiple de } 4 \\ \dfrac{1}{(n+1)^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. On a $Q\big(\dfrac{1}{i^\alpha}\big) = a + \dfrac{b}{i^\alpha} + \dfrac{c}{i^{2\alpha}}$.

Comme $a \geqslant 0, b \geqslant 0, c \geqslant 0$, la série $\sum Q\big(\dfrac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge si $a \neq 0$.

• Si $a = 0$ et $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, la série $\sum Q\big(\dfrac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge comme somme de deux séries positives divergentes, sauf si $b = c = 0$.

• Si $a = 0$ et $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$, la série $\sum Q\big(\dfrac{1}{i^\alpha}\big)$ diverge sauf si $b = 0$, auquel cas elle converge pour tout c.

• Si $a = 0$ et $\alpha \geqslant 1$, la série $\sum Q\big(\dfrac{1}{i^\alpha}\big)$ converge quels que soient b et c.

En résumé :

• Si $\alpha \leqslant 1/2$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = b = c = 0) = \frac{1}{(n+1)^3}$$

• Si $\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = b = 0) = \frac{1}{(n+1)^2}$$

• Si $\alpha \geqslant 1$,

$$P\big(\sum_i Q(\frac{1}{i^\alpha}) \text{ converge}\big) = P(a = 0) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3.22.

Un jeu télévisé se déroule de la manière suivante. On dispose d'une roulette comportant n cases numérotées de 1 à n, n étant un entier naturel non nul, multiple de 8. On demande au candidat de donner deux entiers α, β tels que : $1 \leqslant \alpha < \beta < n$. Puis on actionne trois fois de suite la roulette, et on note X_1, X_2, X_3 les résultats successifs obtenus.

Le gain $Z_{\alpha,\beta}$ du candidat est alors donné par :

$$Z_{\alpha,\beta} = \begin{cases} X_3 & \text{si } X_3 > \beta \\ X_2 & \text{si } X_3 \leqslant \beta \text{ et } X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si } X_3 \leqslant \beta \text{ et } X_2 \leqslant \alpha \end{cases}$$

1. On introduit la variable aléatoire Y_α définie par :

$$Y_\alpha = \begin{cases} X_2 & \text{si } X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si } X_2 \leqslant \alpha \end{cases}$$

a) Déterminer la loi de Y_α et calculer son espérance.

b) Pour quelle valeur de $\alpha \in [\![1, n-2]\!]$, l'espérance de Y_α est-elle maximale ? Préciser la valeur de ce maximum.

2. a) Montrer que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$P(Z_{\alpha,\beta} = k | X_3 \leqslant \beta) = P_{X_3 \leqslant \beta}(Z_{\alpha,\beta} = k) = P(Y_\alpha = k)$$

b) En déduire l'expression de l'espérance de $Z_{\alpha,\beta}$ en fonction de β, n et de l'espérance de Y_α.

c) Quelles valeurs de α, β doit choisir le candidat pour maximiser son gain en moyenne ?

Solution :

1. a) On remarque que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent la même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$:

$P(Y_\alpha = k) = P(Y_\alpha = k / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P(Y_\alpha = k / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha)$

Soit :

$P(Y_\alpha = k) = P(X_2 = k / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P(X_1 = k / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha)$

Donc :

$$P(Y_\alpha = k) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{n^2} & \text{si } k \leqslant \alpha \\ \dfrac{\alpha}{n^2} + \dfrac{1}{n} & \text{si } k > \alpha \end{cases}$$

Et

$$E(Y_\alpha) = \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{n} \sum_{k=\alpha+1}^{n} k = \frac{\alpha(n+1)}{2n} + \frac{1}{n}\Big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\Big)$$

b) Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto \dfrac{x(n+1)}{2n} + \dfrac{1}{n}\Big(\dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{x(x+1)}{2}\Big)$.

La fonction φ est dérivable, avec $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{n}$.
La fonction φ est donc maximale pour $x = \dfrac{n}{2}$, et comme n est un entier pair, $E(Y_\alpha)$ est maximale pour $\alpha = \dfrac{n}{2}$ et vaut alors $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5n}{8}$.

2. a) L'application $A \mapsto P(A / X_3 \leqslant \beta)$ est une probabilité et $((X_2 > \alpha), (X_2 \leqslant \alpha))$ est un système complet d'événements. Ainsi :

$$\begin{aligned}
p &= P(Z_{\alpha,\beta} = k / X_3 \leqslant \beta) \\
&= P((Z_{\alpha,\beta} = k) \cap (X_2 > \alpha) / X_3 \leqslant \beta) + P((Z_{\alpha,\beta} = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha) / X_3 \leqslant \beta) \\
&= P((X_2 = k) \cap (X_2 > \alpha) / X_3 \leqslant \beta) + P((X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha) / X_3 \leqslant \beta) \\
&= P((X_2 = k) \cap (X_2 > \alpha)) + P((X_1 = k) \cap (X_2 \leqslant \alpha))
\end{aligned}$$

$p = P((X_2 = k) / X_2 > \alpha) P(X_2 > \alpha) + P((X_1 = k) / X_2 \leqslant \alpha) P(X_2 \leqslant \alpha)$

Donc, par le résultat 1. a) :

$$p = P(Z_{\alpha,\beta} = k / X_3 \leqslant \beta) = P(Y_\alpha)$$

b) Par ailleurs :

$$P(Z_{\alpha,\beta} = k/X_3 > \beta) = P(X_3 = k/X_3 > \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \leqslant \beta \\ \dfrac{1}{n-1} & \text{si } k > \beta \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} E(Z_{\alpha,\beta}) &= \sum_{k=1}^{n} k\big(P(Y_\alpha)P(X_3 \leqslant \beta) + P(X_3 = k/X_3 > \beta)P(X_3 > \beta)\big) \\ &= \frac{\beta}{n}E(Y_\alpha) + \sum_{k=\beta+1}^{n} \frac{k}{n} \\ &= \frac{\beta}{n}E(Y_\alpha) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\big) = g(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

c) D'après la première question, pour tout α, β, on a :

$$g(\alpha,\beta) \leqslant g(\tfrac{n}{2},\beta) = \frac{\beta}{n}\big(\frac{5n}{8} + \frac{1}{2}\big) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2}\big)$$

Comme en 1. b) posons $h(x) = \frac{x}{n}\big(\frac{5n}{8} + \frac{1}{2}\big) + \frac{1}{n}\big(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{x(x+1)}{2}\big)$

On a $h'(x) = \frac{5}{8} - \frac{x}{n}$; ainsi h est maximale au point $\frac{5n}{8}$ qui est entier et :

$$\text{pour tout } \alpha, \beta,\ g(\alpha,\beta) \leqslant h\big(\frac{5n}{8}\big) = g\big(\frac{n}{2}, \frac{5n}{8}\big).$$

En conclusion $E(Z_{\alpha,\beta})$ est maximale pour $(\alpha,\beta) = \big(\frac{n}{2}, \frac{5n}{8}\big)$.

On remarque que $1 \leqslant \frac{n}{2} < \frac{5n}{8} < n$.

Exercice 3.23.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, telle que :

$$\forall\, x \geqslant 0, f(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\, dt$$

1. Montrer que f est ainsi bien définie et calculer $f(0)$.

2. Trouver la plus petite valeur de λ telle que pour tout $x \geqslant 0$:

$$g_\lambda(x) = f(x) - \lambda.\mathrm{e}^{-x^2/2} \leqslant 0.$$

3. Montrer que f est une densité de probabilité et déterminer l'espérance d'une variable aléatoire X admettant f pour densité.

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. On suppose que Z représente la longueur d'une barre d'acier fabriquée. On souhaite que les barres d'acier soient de longueur donnée ℓ_0.
Si la longueur Z est supérieure à ℓ_0, on l'ajuste perdant par conséquent une longueur de barre $Z - \ell_0$.
Si la longueur est strictement inférieure à ℓ_0, on est tenu de mettre la barre au rebut.

On note Y la variable aléatoire donnant la longueur perdue à l'issue de la fabrication d'une barre.

4. Donner l'espérance $E(Y)$ en fonction de ℓ_0, m et f.

5. Justifier que $P(Z < 0)$ est négligeable lorsque $\ell_0 = 2$ mètres et $\sigma = 2$ centimètres.

Solution :

1. On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt$ converge et vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Ceci prouve que $f(x)$ est bien défini pour $x \geqslant 0$, avec $f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (« reste » d'une intégrale convergente).

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x^2/2}$, donc g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$$g'_\lambda(x) = (\lambda x - 1)\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

D'où le tableau de variations :

x	0		$1/\lambda$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$		$-$	0	$+$	
g_λ	$\sqrt{\pi/2}-\lambda$	$\searrow$		$\nearrow$	0

La plus petite valeur de λ pour laquelle g_λ est négative ou nulle sur $\mathbb{R}^+$ est donc $f(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

3. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, positive et, pour $A > 0$:

$$\int_0^A f(x)\,dx = \big[xf(x)\big]_0^A + \int_0^A x.\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \big[xf(x) - \mathrm{e}^{-x^2/2}\big]_0^A$$

Or la question précédente montre que : $\forall\, x \geqslant 0, 0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$, ce qui donne :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\,dx = \mathrm{e}^0 = 1$$

Ce qui montre que f est bien une densité de probabilité.

Toujours par négligeabilité classique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n f(x) = 0$, ce qui montre que X admet des moments de tous ordres. Enfin, en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x.x\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \end{aligned}$$

4. On a : $Y = \begin{cases} X & \text{si } X < \ell_0 \\ X - \ell_0 & \text{si } X \geqslant \ell_0 \end{cases}$.

Y est donc une fonction de X. En appliquant le théorème du transfert, il vient :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\ell_0} xf(x)\,dx + \int_{\ell_0}^{+\infty} (x - \ell_0)f(x)\,dx$$

Soit :

$$E(Y) = E(Z) - \ell_0.P(Z > \ell_0) = m - \frac{\ell_0}{\sqrt{2\pi}} f\Big(\frac{\ell_0 - m}{\sigma}\Big)$$

5. On a :

$$P(Z < 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f\Big(\frac{m}{\sigma}\Big) < \frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\Big)$$

Comme $\dfrac{m}{\sigma} = 100$, $P(Z < 0) < 10^{-2172}$!

Exercice 3.24.

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type `tab`) sont des permutations de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ d'entiers.
On considère la fonction `T` définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a :tab) :integer ;
var i :integer ;
begin
  i :=1 ;
  while(a[i]<>i)and(i<n+1)do
    i :=i+1 ;
  T :=i ;
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire sur l'univers S_n des permutations de $[\![1, n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note E_i l'événement $(a[i] = i)$. Calculer la probabilité $P(E_i)$ de l'événement E_i, puis calculer la probabilité de l'événement $E_i \cap E_j$, avec $i \neq j$.
Plus généralement, pour $i_1, i_2, \dots, i_k$ compris entre 1 et n et deux à deux distincts, calculer la probabilité de l'événement $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \dots \cap E_{i_k}$.

3. a) Montrer que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :
$$P(T \leqslant k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}.$$

b) En déduire la valeur de $P(T = n+1)$ sous forme d'une somme et donner un équivalent de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini.

4. a) Exprimer $E(T)$ en fonction des $P(T \leqslant r)$, $2 \leqslant r \leqslant n$ et de n.

b) Etablir, pour $k \leqslant n$, la relation $\displaystyle\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

c) En déduire : $E(T) = (n+1) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$.

d) Donner un équivalent simple de $E(T)$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction `T` associe à toute permutation son plus petit point fixe s'il en existe un et $n+1$ si elle n'a pas de point fixe.

2. $E_{i_1} \cap \dots \cap E_{i_k}$ est formé des permutations qui fixent au moins les éléments $i_1, \dots, i_k$. Elles sont au nombre de $(n-k)!$, puisqu'elles sont en fait les permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, prolongées par l'identité sur $\{i_1, \dots, i_k\}$.
Ainsi :
$$P(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}, P(E_i \cap E_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

et plus généralement :

$$P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

3. a) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a par la formule du crible :

$$P(T \leqslant k) = P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_j \leqslant k} (-1)^{j-1} P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_j})$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$

b) Ainsi :

$$P(T = n+1) = 1 - P(T \leqslant n) = 1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= 1 - \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$$

Donc : $P(T = n+1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!}$ et $\lim_{n \to +\infty} P(T = n+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

4. a) On a $P(T = 1) = P(T \leqslant 1) = \frac{1}{n}$. Pour $k \geqslant 2$, on peut écrire :

$$P(T = k) = P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1)$$

et :

$$E(T) = \sum_{k=1}^{n+1} kP(T = k)$$
$$= \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} k(P(T \leqslant k) - P(T \leqslant k-1)) + n + 1 - (n+1)P(T \leqslant n)$$
$$= n + 1 + \frac{1}{n} - \sum_{j=2}^{n-1} P(T \leqslant j) - \frac{2}{n} - P(T \leqslant n)$$
$$= n + 1 - \frac{1}{n} - \sum_{j=2}^{n} P(T \leqslant j)$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} P(T \leqslant j)$$

b) Cette relation est très classique et se démontre par récurrence sur n.

c) On a :

$$E(T) = n + 1 - \sum_{k=1}^{n} P(T \leqslant k) = n + 1 - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} \frac{(n-j)!}{n!}$$
$$= n + 1 - \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j-1}(n-j)!}{n!} \Big(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} \Big)$$
$$= n + 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j (n-j)!}{n!} \times \frac{(n+1)!}{(j+1)!(n-j)!}$$
$$= (n+1)\big(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\big) = (n+1) \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!}$$

d) On a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc :

$$E(T) \underset{(n \to +\infty)}{\sim} n\big(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\big)$$

Exercice 3.25.

Soit a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^2 de $]0,a[$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

ii) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

iii) $f''(x) < 0$ pour tout $x \in]0,a[$.

1. Montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $]0,a[$.

2. Montrer que f admet un maximum absolu strict en un point $c \in]0,a[$ (c'est-à-dire tel que $f(c) > f(x)$ pour tout $x \in]0,a[$, avec $x \neq c$).

3. On suppose dans la suite que f vérifie en outre

iv) $f(a-x) = f(x)$ pour tout $x \in]0,a[$. Montrer alors que $c = \dfrac{a}{2}$.

4. Soit $\alpha < a$. Trouver le maximum de la fonction $g : x \to f(x) + f(x+\alpha)$ pour $x \in]0, a-\alpha[$.

5. Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sin x)$ pour $x \in]0,\pi[$ vérifie les conditions i, ii, iii, iv avec $a = \pi$ et donner le maximum de f.

6. Un tireur vise une cible en deux instants successifs t_0 et $t_0 + 1$. Il a une probabilité $p(t) = |\sin t|$ d'atteindre la cible s'il tire à l'instant t. La partie est gagnée s'il atteint la cible à chacun des deux coups. À quel instant t_0 doit-il choisir de tirer (le deuxième coup part alors à l'instant $t_0 + 1$) pour maximiser ses chances de succès ?

Solution :

1. $\star$ La fonction f' est continue sur $]0,a[$; si elle ne s'annulait pas elle garderait un signe fixe et f serait strictement monotone. Ceci est incompatible avec la conjonction des hypothèses i) et ii). Donc f' s'annule au moins une fois.

$\star$ Comme f' est strictement décroissante, la fonction f' ne peut pas s'annuler plus d'une fois, d'où la conclusion.

2. La fonction f est strictement croissante sur $]0,c[$ et strictement décroissante sur $]c,a[$: elle admet un maximum strict en c.

3. On a $f'(a-x) = -f'(x)$. Donc $f'\big(a - \frac{a}{2}\big) = -f'\big(\frac{a}{2}\big)$, soit $f'\big(\frac{a}{2}\big) = 0$.

4. On pose
$$h(x) = g\big(x - \frac{\alpha}{2}\big) = f\big(x + \frac{\alpha}{2}\big) + f\big(x - \frac{\alpha}{2}\big)$$
La fonction h est définie sur $\big]\frac{\alpha}{2}, a - \frac{\alpha}{2}\big[$ et :
$$h''(x) = f''\big(x + \frac{\alpha}{2}\big) + f''\big(x - \frac{\alpha}{2}\big) < 0$$
Par ailleurs $h(a-y) = h(y)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha/2} h(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a-\alpha/2} h(x) = -\infty$; donc h passe par un maximum en un unique point c.

La fonction g est donc maximale en $c - \dfrac{\alpha}{2}$.

5. On a : $f'(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}, f''(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)} < 0$.

Et on a :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Par ailleurs $\sin(\pi - x) = \sin x$. On a ainsi les quatre relations demandées.

6. Par périodicité, on peut se restreindre à $[0, \pi]$. La probabilité d'atteindre la cible les deux fois en tirant à l'instant t est $p(t) = \sin t \times \sin(t + 1)$. Par croissance de la fonction logarithme, il suffit d'étudier $g(t) = \ln p(t)$.

Par ce qui précède, le maximum est atteint en $\dfrac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 3.26.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance $E(X)$. On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $p_n = P(X = n)$.

1. a) Montrer que, pour tout x de $[0, 1]$, la série de terme général $p_n x^n$ converge.

On pose alors, pour $x \in [0, 1], G(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n x^n$.

b) Déterminer $G(0), G(1)$ et montrer que G est croissante sur $[0, 1]$.

c) Soient x et y tels que $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

Montrer que pour $n \geqslant 1$, $0 \leqslant y^n - x^n \leqslant n(y - x)$.
En déduire que $0 \leqslant G(y) - G(x) \leqslant E(X)(y - x)$.

d) Montrer que G est continue sur $[0, 1]$.

2. On suppose que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et on définit la fonction F par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G(x) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On note alors $\widetilde{X}$ une variable admettant F pour fonction de répartition.

b) Montrer que $\widetilde{X}$ admet une espérance et que $E(\widetilde{X}) = 1 - \displaystyle\int_0^1 F(x)\, dx$.

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer G, F et $E(\widetilde{X})$:

a) X suit la loi géométrique de paramètre p, avec $p \in]0, 1[$.

b) X est telle que la variable $X - 1$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Solution :

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant p_n x^n \leqslant p_n$. Comme la série $\sum p_n$ converge, on en déduit que la série $\sum p_n x^n$ converge pour tout $x \in [0, 1]$.

b) Bien évidemment $G(0) = 0, G(1) = 1$.

Soit x et y tels que $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant x^n < y^n \leqslant 1$. Comme $p_n \geqslant 0$, on a $p_n x^n \leqslant p_n y^n$ et par conservation des inégalités par sommation, ceci montre que la fonction G est croissante sur $[0,1]$.

c) L'inégalité des accroissements finis donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant y^n - x^n \leqslant (y-x) \sup_{t\in[x,y]} (nt^{n-1}) \leqslant (y-x) \sup_{t\in[01]} (nt^{n-1}) = n(y-x)$$

D'où $0 \leqslant p_n y^n - p_n x^n \leqslant np_n(y-x)$ et par sommation (par hypothèse la série converge) :

$$0 \leqslant G(y) - G(x) \leqslant (y-x) \sum_{n=1}^{\infty} np_n = E(X)(y-x)$$

ce qui montre que G est lipchitzienne et donc continue sur $[0,1]$.

2. a) La fonction F est continue et croissante sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sauf peut-être en 0 et 1, et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Ceci montre que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire dont une densité f est définie, par dérivation, par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [0,1] \\ G'(x) & \text{si } x \in [0,1] \end{cases}$$

b) La fonction f est continue sur $[0,1]$ et nulle autrement. Donc $E(\widetilde{X})$ existe et :

$$E(\widetilde{X}) = \int_0^1 xG'(x)\,dx = \big[xG(x)\big]_0^1 - \int_0^1 G(x)\,dx = 1 - \int_0^1 F(x)\,dx$$

3. a) Si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}x^n = \frac{px}{1-qx}$$

La fonction G est de classe C^1 sur $[0,1]$ car $0 \leqslant qx \leqslant q < 1$. Par la question précédente :

$$E(\widetilde{X}) = 1 - \int_0^1 \frac{px}{1-qx}\,dx = 1 - \int_0^1 \Big(-\frac{p}{q} + \frac{p}{q}\times\frac{1}{1-qx}\Big)\,dx$$

Soit : $E(\widetilde{X}) = \dfrac{1}{q} + \dfrac{p\ln p}{q^2}$.

b) Si $X-1$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X=n) = P(X-1=n-1) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}$$

et :

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{n-1}}{(n-1)!}x^n = x.\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x}$$

La fonction G est de classe C^1 sur $[0,1]$ et par la question précédente :

$$\begin{aligned} E(\widetilde{X}) &= 1 - \int_0^1 x.\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\,dx = 1 - \Big[\frac{x}{\lambda}\,\mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\Big]_0^1 + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}\,dx \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Exercice 3.27.

Un employé d'une société utilise en partie son téléphone personnel pour passer des communications professionnelles.

Plus précisément, on sait que :

(i) parmi les appels effectués depuis ce téléphone, la proportion d'appels professionnels est égale à p avec $p \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$;

(ii) la durée des appels professionnels (respectivement personnels) passés depuis ce poste suit une loi exponentielle de paramètre α (resp. β) avec $\alpha > \beta$.

Pour dédommager son employé, la société décide de lui rembourser tous les appels de durée inférieure ou égale à T, T étant un certain réel strictement positif.

1. Exprimer, en fonction de α, β, T et p, la probabilité pour qu'un appel de durée supérieure à T soit professionnel.

2. Exprimer de même $P_1(T)$ et $P_2(T)$, où

• $P_1(T)$ est la probabilité pour qu'un appel soit professionnel et non remboursé par la société.

• $P_2(T)$ est la probabilité pour qu'un appel soit personnel et remboursé par la société.

3. Montrer qu'il existe une unique valeur de T pour laquelle la quantité
$$P_1(T) + P_2(T)$$
est minimale, et que, dans le cas particulier où $p = \frac{1}{2}$, cette valeur de T est comprise entre $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$.

Solution :

1. Notons D la variable aléatoire représentant la durée des appels professionnels, et AP l'événement «l'appel est un appel professionnel». On demande de calculer dans cette question $p_0 = P(AP/D > T)$. Par la formule de Bayes :
$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{P(D > T/AP)P(AP)}{P(D > T/AP)P(AP) + P(D > T/\overline{AP})P(\overline{AP})} \\ &= \frac{p.\mathrm{e}^{-\alpha T}}{p.\mathrm{e}^{-\alpha T} + (1-p).\mathrm{e}^{-\beta T}} \end{aligned}$$

2. On a immédiatement :
$$P_1(T) = P\big((D > T) \cap AP\big) = P\big((D > T)/AP\big)P(AP) = p.\mathrm{e}^{-\alpha T}$$
et :
$$P_2(T) = P\big((D \leqslant T) \cap AP\big) = (1-p)(1 - \mathrm{e}^{-\beta T})$$

3. On cherche le minimum de l'application f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$$f : T \longmapsto p.\mathrm{e}^{-\alpha T} + (1-p)(1 - \mathrm{e}^{-\beta T})$$
Pour tout $T > 0$:
$$f'(T) = \mathrm{e}^{-\alpha T}\big(\beta(1-p)\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T} - \alpha p\big)$$
Soit alors $g : T \longmapsto \beta(1-p)\mathrm{e}^{(\alpha-\beta)T} - \alpha p$. La fonction g est évidemment croissante et s'annule en
$$T_0 = \frac{1}{\alpha - \beta} \ln\big(\frac{\alpha p}{\beta(1-p)}\big)$$
Comme $p \geqslant \frac{1}{2}$, on a $\frac{p}{1-p} \geqslant 1$ et on a $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. Donc $T_0 > 0$. On a déterminé ainsi le signe de g, donc aussi celui de f'.

Ceci montre que f est décroissante sur $]0,T_0]$, puis croissante sur $[T_0,+\infty[$. Ainsi f atteint son minimum en T_0.

Lorsque $p=\dfrac{1}{2}$, on a $T_0=\dfrac{\ln\alpha-\ln\beta}{\alpha-\beta}$.

Par la formule des accroissements finis, il existe $\gamma\in]\alpha,\beta[$ tel que :

$$T_0=(\ln)'(\gamma)=\frac{1}{\gamma}$$

Cette valeur est bien comprise entre $\dfrac{1}{\alpha}$ et $\dfrac{1}{\beta}$.

Exercice 3.28.

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}$.

a) Vérifier que l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h:x\longmapsto\begin{cases}0 & \text{si } x\notin[-1,1]\\ \dfrac{2}{\pi(1+x^2)} & \text{sinon}\end{cases}$$

est une densité de probabilité.

b) Soit X une variable aléatoire réelle admettant h pour densité. Calculer son espérance et sa variance si elles existent.

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé Ω que X par

$$Y:\omega\mapsto Y(\omega)=\arctan\big(X(\omega)\big)$$

Déterminer $Y(\Omega)$. Quelle est la loi suivie par Y ? Quelles sont son espérance et sa variance ?

3. Soit Z la variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé Ω que X par : pour tout $\omega\in\Omega$, $Z(\omega)$ est le réel de $[0,\pi]$ tel que $\cos(Z(\omega))=X(\omega)$.

a) Déterminer $Z(\Omega)$. Exprimer la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

b) Calculer une densité de Z.

4. Soit f une application continue sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs réelles.

a) Démontrer la formule $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(a+b-x)\,dx$.

b) Utiliser la formule précédente pour calculer $E(Z)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t^2\sin t\,dt$; en déduire un majorant et un minorant de la variance $V(Z)$.

Solution :

1. On sait que $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\big[\arctan x\big]_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}$.

a) La fonction f est continue sur $[-1,1]$, nulle hors de cet intervalle, positive et par la question précédente $\displaystyle\int_{-1}^{1}h(x)\,dx=1$. C'est donc une densité de probabilité.

b) On a :

$$E(X) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}\,dx = 0$$

$$V(X) = E(X^2) = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \big(1 - \frac{1}{1+x^2}\big)\,dx = \frac{4}{\pi} - 1$$

2. Comme $X(\Omega) = [-1,1]$, on a $Y(\Omega) = \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$.
La fonction tangente étant croissante sur $\big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$, il vient pour tout $y \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$:
$\Phi(y) = P(Y \leqslant y) = P\big(-\frac{\pi}{4} \leqslant Y \leqslant y\big) = P(-1 \leqslant \tan Y \leqslant \tan y) = H(\tan y)$
où H désigne la fonction de répartition de X.
Ainsi :

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in\,]-\infty, -\pi/4[\\ H(\tan y) & \text{si } y \in [-\pi/4, \pi/4] \\ 1 & \text{si } y \in\,]\pi/4, +\infty[\end{cases}$$

Une densité ϕ de Y est donnée alors, par dérivation, par :

$$\varphi(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin [-\pi/4, \pi/4] \\ \big(1+\tan^2 y\big)h(\tan y) = \dfrac{2}{\pi} & \text{si } y \in [-\pi/4, \pi/4] \end{cases}$$

Ainsi Y suit la loi uniforme sur $\big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]$ et $E(Y) = 0$, $V(Y) = \dfrac{\pi^2}{192}$.

3. On a $Z(\Omega) = [0,\pi]$. Pour tout $z \in [0,\pi]$, la fonction cosinus étant décroissante sur cet intervalle :

$$P(Z \leqslant z) = P(\cos Z \geqslant \cos z) = 1 - H(\cos z)$$

Aussi, si F désigne la fonction de répartition de Z :

$$F(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < 0[\\ 1 - H(\cos z) & \text{si } z \in [0,\pi] \\ 1 & \text{si } z > \pi \end{cases}$$

et, par dérivation, une densité d de Z est :

$$d(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [0,\pi] \\ \sin z \times h(\cos z) = \dfrac{2\sin z}{\pi(1+\cos^2 z)} & \text{si } z \in [0,\pi] \end{cases}$$

4. a) Il suffit d'utiliser le changement de variable affine $x = a + b - t$.

b) On a :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{z\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - z)\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}dz - I$$

Ainsi :

$$E(Z) = \frac{2}{\pi}\,I = \int_0^{\pi} \frac{\sin z}{1+\cos^2 z}\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}$$

c) Une double intégration par parties donne :

$$\int_0^{\pi} t^2 \sin t\,dt = \pi^2 - 4$$

On remarque que $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{1+\cos^2 z} \leqslant 1$; d'où :

$$\frac{1}{2}(\pi^2 - 4) \leqslant E(Z^2) \leqslant \pi^2 - 4$$

et

$$\frac{\pi^2}{4} - 2 \leqslant V(Z) \leqslant \frac{3\pi^2}{4} - 4$$

Exercice 3.29.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie par : $f_n(x) = x^n + 16x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet, sur $[0, +\infty[$, une solution unique, que l'on note u_n.

2. a) Montrer qu'il existe des réels k et q tels qu'il existe des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, P(X = n) = qu_n^n \text{ et } P(Y = n) = k\big(\frac{1}{2} - u_n\big)$$

b) X et Y étant de telles variables, montrer que X et Y admettent une espérance et que l'on a :

$$E(X) \leqslant 2q \text{ et } E(Y) \leqslant \frac{k}{4}$$

X et Y admettent-elles une variance ?

Solution :

1. La fonction f_n est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
On a $f_n(0) = -4$ et $f_n\big(\frac{1}{2}\big) = \big(\frac{1}{2}\big)^n > 0$. Il existe donc un unique $u_n \in]0, 1/2[$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
On en déduit que $0 < u_n^n \leqslant \big(\frac{1}{2}\big)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$.
D'autre part, pour tout $x \in]0, 1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. Donc $f_n(u_{n+1}) > 0$ ce qui entraîne que $u_n < u_{n+1}$.
La suite $(u_n)_n$ est décroissante, minorée : elle converge vers une limite $\ell \in]0, 1[$.
Comme $u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, il vient $16\ell^2 = 4$ et comme $\ell > 0$, $\ell = \frac{1}{2}$.

2. a) et b)
$\star$ Comme $0 < u_n^n \leqslant \big(\frac{1}{2}\big)^n$, la série $\sum u_n^n$ est convergente : il existe donc $q > 0$ tel que $q \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n^n = 1$.

De même comme $0 < nu_n^n \leqslant n\big(\frac{1}{2}\big)^n$, l'espérance $E(X)$ existe et :

$$E(X) \leqslant q \sum_{n=0}^{\infty} n\big(\frac{1}{2}\big)^n \leqslant 2q$$

$\star$ On a $u_n^n + 16u_n^2 - 4 = 0$; donc

$$\frac{u_n^n}{16} = \frac{1}{4} - u_n^2 = \big(\frac{1}{2} - u_n\big)\big(\frac{1}{2} + u_n\big)$$

et

$$\frac{1}{2} - u_n = \frac{u_n^n}{16(\frac{1}{2} + u_n)}$$

Comme $0 < u_n < \frac{1}{2}$, il vient :

$$0 < \frac{1}{2} - u_n < \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Il existe donc $k > 0$ tel que $k \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - u_n\right) = 1$.

Comme précédemment $E(Y)$ existe et :

$$E(Y) \leqslant k \sum_{n=0}^{\infty} n\,\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{k}{4}$$

Exercice 3.30.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n cartons numérotés de 1 à n. On extrait les n cartons un à un et sans remise et on note T_k le numéro obtenu au $k^{\text{ème}}$ tirage. Soit Z_n la variable égale au plus petit indice j tel que $T_j > T_{j+1}$ si cet indice existe, sinon on pose $Z_n = n$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $P(Z_n > k)$ et en déduire la loi de probabilité de Z_n.

2. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi vers une variable notée Z.

3. Exprimer $E(Z_n)$ sous la forme d'une somme et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini. Calculer $E(Z)$.

Solution :

1. On a $\Omega = \{\text{permutations de } [\![1,n]\!]\}$, et $Z_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Soit $k \in [\![1,n-1]\!]$. On a $(Z_n > k) = (X_1 < X_2 < \ldots < X_k < X_{k+1})$, donc :

$$P(Z_n > k) = \frac{\binom{n}{k+1}(n-k+1)!}{n!} = \frac{1}{(k+1)!}$$

et, pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$:

$$P(Z_n = k) = P(Z_n > k-1) - P(Z_n > k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

tandis que :

$$P(Z_n = n) = \frac{1}{n!}$$

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $n-1 \geqslant k$. alors :

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

On vérifie que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1$. Donc la suite $(Z_n)_n$ tend en loi vers une variable Z de loi définie par, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Z = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) + n\times\frac{1}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} - \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\right) + \frac{1}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \mathrm{e} - 1$$

Enfin :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k\big(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\big) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$$
$$= \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + (\mathrm{e} - 2) = \mathrm{e} - 1.$$

Exercice 3.31.

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ et qui suivent toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit deux suites de variables (Y_n) et (Z_n) par $Y_1 = Z_1 = X_1$ et :

$$\forall n \geqslant 1, Y_{n+1} = \sup(X_{n+1}, Z_n), Z_{n+1} = \inf(X_{n+1}, Y_n)$$

Enfin on note G_n (resp H_n) la fonction de répartition de Y_n (resp. Z_n).

1. Exprimer G_{n+1} et H_{n+1} en fonction de G_n et H_n. Calculer $G_n(x)$ et $H_n(x)$ quand $x \notin [0, 1]$.

2. Soit $x \in [0, 1]$. On pose $V_n(x) = \begin{pmatrix} G_n(x) \\ H_n(x) \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe $A(x) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $U(x) \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$V_{n+1}(x) = A(x)V_n(x) + U(x)$$

et en déduire que :

$$V_n(x) = A^{n-1}(x)V_1(x) + \big(\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\big)U(x) \text{ pour } n \geqslant 2$$

3. a) Soit $x \in [0, 1]$. Calculer $A^k(x)$ et montrer que pour tout $p \geqslant 1$:

$\displaystyle\sum_{k=0}^{2p-1} A^k(x) = \frac{1 - x^p(1-x)^p}{1 - x + x^2}\big(I + A(x)\big)$, où I est la matrice unité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

b) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$G_{2p+1}(x) = \frac{x^2}{1 - x(1-x)} + (x(1-x))^{p+1}\frac{1-x}{1 - x(1-x)};$$
$$H_{2p+1}(x) = \frac{x}{1 - x(1-x)} - (x(1-x))^{p+1}\frac{x}{1 - x(1-x)}.$$

On montre de même, et on admettra que :

$$G_{2p}(x) = \frac{x^2}{1 - x(1-x)} - (x(1-x))^{p}\frac{x^2}{1 - x(1-x)};$$
$$H_{2p}(x) = \frac{x}{1 - x(1-x)}(x(1-x))^{p}\frac{(1-x)^2}{1 - x(1-x)}$$

4. En déduire que (Y_n) et (Z_n) convergent en loi.

Solution :

1. a) On vérifie par récurrence que, pour tout k, Y_k et Z_k s'expriment en fonction de $(X_1, \dots, X_k)$. Donc Z_n et X_{n+1} sont indépendantes ainsi que Y_n et X_{n+1}.

Soit x réel :

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= P(Y_{n+1} \leqslant x) = P((X_{n+1} \leqslant x) \cap (Z_n \leqslant x)) \\ &= P(X_{n+1} \leqslant x) P(Z_n \leqslant x) \end{aligned}$$

Si l'on note F la fonction de répartition de Y_k, alors $G_{n+1}(x) = F(x)H_n(x)$, puis :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= P(Z_{n+1} \leqslant x) \\ &= 1 - P(Z_{n+1} > x) = 1 - P((X_{n+1} > x) \cap (Y_n > x)) \\ &= 1 - P(X_{n+1} > x) P(Z_n > x) \end{aligned}$$

donc :

$$H_{n+1}(x) = F(x) + (1 - F(x))G_n(x)$$

b) Bien évidemment :
pour $x \leqslant 0, G_n(x) = H_n(x) = 0$ et pour $x > 1, G_n(x) = H_n(x) = 1$, puisque $Z_n(\Omega) = Y_n(\Omega) = [0, 1]$.

2. On peut écrire :

$$V_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1-x & 0 \end{pmatrix} V_n(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = A(x)V_n(x) + U(x)$$

Une récurrence immédiate donne, pour tout $n \geqslant 2$:

$$V_n(x) = A^{n-1}(x)V_1(x) + \big(\sum_{k=0}^{n-2} A^k(x)\big)U(x)$$

avec :

$$V_1(x) = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ H_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

3. a) On a $A^2(x) = x(1-x)I$. Donc, pour tout $k \geqslant 0$:

$$A^{2k}(x) = (x(1-x))^k I, A^{2k+1}(x) = (x(1-x))^k A(x)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2p-1} A^k(x) &= \sum_{j=0}^{p-1} A^{2j}(x) + \sum_{j=0}^{p-1} A^{2j+1}(x) \\ &= \big(\sum_{j=0}^{p-1} (x(1-x))^j\big) I + A(x) \big(\sum_{j=0}^{p-1} (x(1-x))^j\big) A(x) \\ &= \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]} \big(I + A(x)\big) \end{aligned}$$

b) Aussi

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(x) &= [x(1-x)]^p V_1(x) + \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]} \big(I + A(x)\big) U(x) \\ &= [x(1-x)]^p \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} + \frac{1 - [x(1-x)]^p}{1 - [x(1-x)]} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1-x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^{p+1}(1-x)^p + \dfrac{x^2(1 - [x(1-x)]^p}{1 - x + x^2} \\ x^{p+1}(1-x)^p + \dfrac{x(1 - [x(1-x)]^p}{1 - x + x^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où :

$$G_{2p+1}(x) = \frac{x^2}{1 - x + x^2} + [x(1-x)]^{p+1} \frac{1 - x}{1 - x + x^2}$$

$$H_{2p+1}(x) = \frac{x}{1-x+x^2} + [x(1-x)]^{p+1}\frac{x}{1-x+x^2}$$

4. Pour tout $x \in [0,1], |x(1-x)| \leqslant \frac{1}{4}$; donc $\lim\limits_{p\to+\infty}[x(1-x)]^p = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{x^2}{1-x+x^2}, \lim_{n\to+\infty} H_n(x) = \frac{x}{1-x+x^2}$$

Notons :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{1-x+x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}, \qquad H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{1-x+x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On vérifie enfin que ces deux fonctions vérifient les propriétés des fonctions de répartition de variables aléatoires à densité (continuité, de classe C^1 presque partout, croissance et limite en $\pm\infty$).

Exercice 3.32.

Soit $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même fonction de répartition F.

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit une nouvelle suite de variables aléatoires en posant $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f_t \circ X_k$, où $f_t(x) = 0$ si $x > t$ et 1 dans le cas contraire.

Ainsi, pour chaque valeur de t, $F_n(t)$ est la fréquence des variables inférieures ou égales à t parmi $X_1, \ldots, X_n$.

1. Reconnaître la loi de la variable $nF_n(t)$. En déduire l'espérance $E\big(F_n(t)\big)$ et la variance $V\big(F_n(t)\big)$ de la variable $F_n(t)$, puis vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\big(F_n(t) - F(t)\big)^2\big] = 0$$

2. Soient t et t' deux réels distincts. Calculer $V\big(F_n(t) - F_n(t')\big)$.

3. En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} E\big[\big((F_n(t) - F_n(t')) - (F(t) - F(t'))\big)^2\big] = 0$.

4. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $\sqrt{n}\big(F_n(t) - F(t)\big)$.

5. On pose $V_n(0) = 0$ et pour $x \in \,]0,1]$, on pose :

$$V_n(x) = \frac{1}{\sqrt{nF(t)(1-F(t))}}\sum_{i=1}^{\lfloor nx\rfloor}(f_t \circ X_i - F(t)).$$

où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Calculer $\mathrm{Cov}\big(V_n(x_1), V_n(x_2)\big)$ pour $x_1, x_2 \in [0,1]$ ainsi que la limite de cette quantité lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Posons $Y_k = f_t \circ X_k$. La variable aléatoire Y_k suit la loi de Bernoulli de paramètre $F(t)$ et les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes ; par conséquent $nF_n(t)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\big(n, F(t)\big)$. Aussi :

$$E\big(F_n(t)\big) = F(t) \text{ et } V\big(F_n(t)\big) = \frac{F(t)\big(1-F(t)\big)}{n}.$$

On a également :

$$E\big[\big(F_n(t) - F(t)\big)^2\big] = V\big(F_n(t)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

2. Posons $Z_k = f_{t'} \circ X_k$. D'après la question précédente

$$E\big(F_n(t) - F_n(t')\big) = F(t) - F(t').$$

Soit $i \neq j$. Par indépendance de X_i et X_j :

$$\mathrm{Cov}(Y_i, Z_j) = P(X_i \leqslant t)P(X_j \leqslant t') - F(t)F(t') = 0$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(F_n(t), F_n(t')\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}(Y_i, Z_j)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(Y_i, Z_i) = \frac{1}{n}\big(F(\min(t,t')) - F(t)F(t')\big)\end{aligned}$$

et $V(F_n(t) - F_n(t')) = V(F_n(t)) + V(F_n(t')) - 2\,\mathrm{Cov}(F_n(t), F_n(t'))$

Il suffit alors de remplacer.

3. On a aisément : $\lim\limits_{n\to+\infty} V(F_n(t) - F_n(t')) = 0$.

4. Posons $S_n(t) = nF_n(t)$. Comme

$$U_n(t) = \frac{S_n(t) - E(S_n(t))}{\sqrt{V(S_n(t))}} = \sqrt{n}\,\frac{F_n(t) - F(t)}{\sqrt{F(t)(1-F(t))}}$$

converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite, la variable aléatoire proposée converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée de variance $F(t)(1-F(t))$.

5. On calcule : $\mathrm{Cov}(V_n(x_1), V_n(x_2)) = \dfrac{1}{nF(t)(1-F(t))}\displaystyle\sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

Par indépendance des (Y_i), seuls les termes pour $i = j$ ne sont pas nuls.

Par symétrie, on peut supposer $x_1 \leqslant x_2$ et alors :

$$\sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) = \sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j) + \sum_{i=1}^{\lfloor nx_1\rfloor}\sum_{j=\lfloor nx_1\rfloor+1}^{\lfloor nx_2\rfloor}\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

et

$$\mathrm{Cov}(V_n(x_1), V_n(x_2)) = \frac{\lfloor nx_1\rfloor}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_1.$$