2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites complexes indexées par $\mathbb{N}$ et bornées.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites complexes.

2. Pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ élément de $\mathcal{B}$, on note $T(u)$ la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, [T(u)]_n = u_{n+1}.$$

a) Montrer qu'on définit ainsi une application $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, et que cette application est linéaire.

b) Déterminer le noyau de T ; T est-elle injective ?

c) Déterminer l'image de T ; T est-elle surjective ?

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que λ soit une valeur propre de l'endomorphisme T, c'est-à-dire pour qu'il existe une suite u non nulle telle que $T(u) = \lambda u$. Préciser alors les vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

4. Soit $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ une application linéaire telle que $T \circ S = Id_{\mathcal{B}}$.

a) Montrer que $S \circ T$ est un projecteur, vérifiant :

$$\mathrm{Ker}(S \circ T) = \mathrm{Ker}\, T \text{ et } \mathrm{Im}(S \circ T) = \mathrm{Im}\, S.$$

b) Que peut-on dire de l'injectivité et/ou de la surjectivité de l'application S ?

c) Montrer, par un exemple, qu'il existe effectivement une application linéaire $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ telle $T \circ S = Id_{\mathcal{B}}$.

Solution :

1. La suite nulle est bornée et toute combinaison linéaire de suites bornées est bornée, donc

$$\mathcal{B} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

2. a) Si u est bornée, il en est de même de la suite $T(u) = (u_n)_{n\geq 1}$ et la linéarité de T est immédiate :

$$T \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$$

b) $T(u) = 0$ si et seulement si $(u_n)_{n\geq 1}$ est la suite nulle, donc le noyau de T est formé des suites nulles à partir du rang 1. Cet espace est la droite engendrée par la suite δ définie par $\delta_0 = 1$ et $\delta_n = 0$ pour $n \geq 1$. En particulier T n'est pas injective.

c) Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée quelconque.

Considérons alors la suite u définie par : $u_0 = 0$ et $\forall\, n \geq 1, u_n = v_{n-1}$. La suite u est bornée et vérifie $T(u) = v$, ce qui prouve que T est surjective.

3. $T(u) = \lambda.u$ signifie : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \lambda u_n$, ce qui caractérise les suites géométriques de raison λ. On distingue alors deux cas :

$\star$ Si $|\lambda| \leq 1$, toute suite géométrique de raison λ est bornée, donc λ est valeur propre de T et le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\star$ Si $|\lambda| > 1$, la seule suite géométrique de raison λ bornée est la suite nulle et λ n'est pas valeur propre de T.

4. a) $\star$ $(S \circ T) \circ (S \circ T) = S \circ (T \circ S) \circ T = S \circ Id \circ T = S \circ T$ et comme $S \circ T$ est linéaire :

$$S \circ T \text{ est un projecteur de } \mathcal{B}$$

$\star$ $\mathrm{Ker}(T) \subset \mathrm{Ker}(S \circ T)$ et $\mathrm{Im}(S \circ T) \subset \mathrm{Im}\, S$ sont des inclusions universelles banales.

$\star$ On a donc aussi :

$\mathrm{Ker}(S \circ T) \subset \mathrm{Ker}(T \circ (S \circ T)) = \mathrm{Ker}((T \circ S) \circ T) = \mathrm{Ker}(T)$ et

$\mathrm{Im}\, S = \mathrm{Im}(S \circ (T \circ S)) = \mathrm{Im}((S \circ T) \circ S) \subset \mathrm{Im}(S \circ T)$

et finalement, par double inclusion :

$$\mathrm{Ker}(S\circ T)=\mathrm{Ker}(T);\mathrm{Im}(S\circ T)=\mathrm{Im}(S)$$

b) $id=T\circ S$ est injective, donc S est injective.
$\mathrm{Im}(S)=\mathrm{Im}(S\circ T)$ et comme $S\circ T$ est un projecteur, $\mathrm{Im}(S)$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(S\circ T)$ qui contient la suite δ, donc $\mathrm{Ker}(S\circ T)\neq\{0\}$ et $\mathrm{Im}(S)\neq\mathcal{B}$, donc :

$$S \text{ est injective non surjective}$$

c) On vérifie facilement que l'application $S : v\mapsto u$ définie en 2.c) est bien un endomorphisme de $\mathcal{B}$ et convient.

Exercice 2.2.

Soit n un entier naturel non nul. On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'application de φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(P,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}dt$$

1. Montrer que φ est bien définie, puis montrer que c'est un produit scalaire sur E. On pose $\|P\|=\sqrt{\varphi(P,P)}$.

2. Soit T le polynôme défini par $T(X)=1+\dfrac{X^n}{n!}$. Calculer $\|T\|$.

On pose $I=\dfrac{T}{\|T\|}$

3. On définit l'application θ qui à tout polynôme P de E associe $2\varphi(P,I)I-P$.

a) Montrer que θ est un automorphisme de E et déterminer θ^{-1}.

b) Montrer que pour tout P de E : $\|\theta(P)\|=\|P\|$.

c) Quelles sont les valeurs propres possibles de θ ?

d) θ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. $\star$ La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et comme P et Q sont polynomiales, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}t^2.P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}=0$, donc la fonction à intégrer est négligeable devant t^{-2} au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que l'intégrale définissant $\varphi(P,Q)$ est convergente.

$\star$ φ est clairement symétrique, bilinéaire et positive.

$\star$ $\varphi(P,P)=0$ s'écrit $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=0$ et par continuité et positivité de la fonction à intégrer, cela donne également $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt=0$ et donc :

$$\forall\, t\in[0,1], P^2(t)\mathrm{e}^{-t}=0 \ \textit{i.e.}\ \forall\, t\in[0,1], P(t)=0$$

Ainsi, le polynôme P a une infinité de racines et est le polynôme nul.

$$\varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[X]$$

2. $\displaystyle\|T\|^2=\int_0^{+\infty}(1+\frac{t^n}{n!})^2\mathrm{e}^{-t}dt=\int_0^{+\infty}(1+\frac{2t^n}{n!}+\frac{t^{2n}}{(n!)^2})\mathrm{e}^{-t}dt$

On sait que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,dt=k!$, d'où :

$$\|T\|^2=1+\frac{2.n!}{n!}+\frac{(2n)!}{(n!)^2}=3+\binom{2n}{n} \text{ et } \|T\|=\sqrt{3+\binom{2n}{n}}$$

3. a) $\star$ La linéarité de φ par rapport au premier argument et les propriétés des opérations montrent que θ est linéaire et pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on a $\theta(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.

$\star$ Si P est tel que $\theta(P)=0$, on a $P=2\varphi(P,I)I$ de la forme kI.
Or $\theta(kI)=k\theta(I)=k(2\varphi(I,I)I-I)$ et comme $\varphi(I,I)=\|I\|^2=1$, il reste $\theta(kI)=kI$ et $\theta(kI)=0 \implies k=0$.
Donc θ est injectif et comme θ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie $(n+1)$:

$$\theta\in GL(\mathbb{R}_n[X])$$

$\star$ Posons $Q=\theta(P)=2\varphi(P,I)I-P$; on a :

$$\varphi(Q,I)=2\varphi(P,I)\|I\|^2-\varphi(P,I)=\varphi(P,I)$$

et donc : $P=2\varphi(Q,I)-Q=\theta(Q)$, soit : $\theta^{-1}=\theta$.

b) $\|\theta(P)\|^2=\|2\varphi(P,I)I-P\|^2=4\varphi(P,I)^2\|I\|^2+\|P\|^2-4\varphi(P,I)\varphi(I,P)$

Soit :

$$\|\theta(P)\|^2=\|P\|^2, \textit{i.e.}\ \|\theta(P)\|=\|P\|$$

c) On a $\theta^2=Id$, donc θ est une symétrie (d'ailleurs orthogonale) et les valeurs propres possibles de θ sont -1 et 1.

d) $\star$ $\theta(P)=P$ s'écrit $2\varphi(P,I)=2P$ ce qui a lieu si et seulement si P est colinéaire à I :

$$E_{(1)}(\theta)=\mathrm{Vect}(I), \text{ espace de dimension } 1$$

$\star$ $\theta(P)=-P$ s'écrit $\varphi(P,I)=0$, donc $E_{(-1)}(\theta)$ est le supplémentaire orthogonal de $E_{(1)}(\theta)$.

Donc θ est diagonalisable.

Exercice 2.3.

1. Justifier la convergence de l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx$$
pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$.

2. On pose $E = \mathbb{R}[X]$ (on pourra identifier E à l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Pour P et Q éléments de E, on pose :
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx$$
Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E. On notera $\| \,.\, \|$ la norme associée.

3. Pour tout entier naturel n, on considère l'application P_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :
$$P_n(x) = \mathrm{e}^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$
où $\dfrac{d^n}{dx^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$ désigne la dérivée d'ordre n au point x de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

a) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir pour tout x réel la relation :
$$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n, P_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le coefficient du terme de plus haut degré.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir, pour tout réel x, la relation :
$$P'_n(x) = -2nP_{n-1}(x)$$

4. a) Montrer que, pour $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$: $\quad \langle P_p, P_q\rangle = 2q\langle P_{p-1}, P_{q-1}\rangle$.

b) Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

c) Calculer $\lambda_n = \|P_n\|$.

d) En déduire une famille orthonormale de E.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2.P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}=0$, ce qui prouve la convergence de l'intégrale proposée, tant pour la borne $-\infty$ que pour la borne $+\infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}dx \text{ converge}$$

2. $\star$ On a clairement pour tous polynômes et tout scalaire :

$$\langle P,Q\rangle=\langle Q,P\rangle \text{ et } \langle P_1+\lambda P_2,Q\rangle=\langle P_1,Q\rangle+\lambda\langle P_2,Q\rangle$$

$\star$ $\langle P,P\rangle\geq 0$ et $\langle P,P\rangle=0\iff \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=0$, d'où par positivité de la fonction à intégrer $\displaystyle\int_6^8 P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,dx=0$ et par positivité et continuité :

$$\forall\, x\in[6,8], P^2(x)\mathrm{e}^{-x^2}=0,\ i.e.\ P(x)=0$$

et P a une infinité de zéros, donc est le polynôme nul.

$$\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E$$

3. a) Soit $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. On a :

$$\varphi'(x)=-2x.\mathrm{e}^{-x^2},\varphi''(x)=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2},\varphi'''(x)=(-8x^3+12x)\mathrm{e}^{-x^2}$$

d'où :

$$P_0=1,P_1=-2X,P_2=4X^2-2,P_3=-8X^3+12X$$

b) On a $\varphi'(x)=-2x\varphi(x)$, donc en dérivant n fois, et grce à la formule de Leibniz :

$$\varphi^{(n+1)}(x)=-2x\varphi^{(n)}(x)+n(-2)\varphi^{(n-1)}(x)$$

soit, en multipliant par e^{x^2} :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, P_{n+1}(x)=-2xP_n(x)-2nP_{n-1}(x)$$

c) Il est facile de montrer, par récurrence, et grce à la relation précédente que :

$\rightarrow$ Pour tout n, P_n est un polynôme de degré exactement n.
$\rightarrow$ Le coefficient dominant de P_n est $(-2)^n$.
$\rightarrow$ Si n est pair, P_n est un polynôme pair et si n est impair, P_n est un polynôme impair.

d) On a $\varphi^{(n)}(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, donc : $\varphi^{(n+1)}(x)=(P_n'(x)-2xP_n(x))\mathrm{e}^{-x^2}$, soit :

$$P_{n+1}(x)=P_n'(x)-2xP_n(x)$$

et en comparant avec le résultat obtenu en 3.b) :

$$P_n'(x)=-2nP_{n-1}(x)$$

4. a) On a :

$$\langle P_p, P_q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P_p(x)P_q(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P_q(x)\varphi^{(p)}(x)\,dx$$

On intègre par parties, en dérivant P_q en $-2qP_{q-1}$ et en « primitivant » $\varphi^{(p)}$ en $\varphi^{(p-1)}$. On a $P_q(x)\varphi^{(p-1)}(x) = P_q(x)P_{p-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ qui est de limite nulle, tant en $-\infty$ qu'en $+\infty$, ce qui autorise à faire cette intégration par parties directement avec les bornes infinies, ce qui donne :

$$\langle P_p, P_q\rangle = 2q\int_{-\infty}^{+\infty} P_{q-1}(x)P_{p-1}(x)\mathrm{e}^{-x^2}dx = 2q\langle P_{p-1}, P_{q-1}\rangle$$

b) En permutant les rôles de p et q, on a donc aussi : $\langle P_q, P_p\rangle = 2p\langle P_{q-1}, P_{p-1}\rangle$ et pour $p \neq q$ dans $\mathbb{N}^*$, on a donc $\langle P_{q-1}, P_{p-1}\rangle = 0$:

$$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une famille orthogonale}$$

c) On a, par le résultat 4. a) : $\|P_n\|^2 = 2n\|P_{n-1}\|^2$, soit en glissant :

$$\|P_n\|^2 = 2^n n!\|P_0\|^2$$

Or $\|P_0\|^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ (intégrale de référence) et donc :

$$\lambda_n = \|P_n\| = 2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}$$

d) $\left(\dfrac{1}{\lambda_n}P_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de E.

Exercice 2.4.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 3$. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par :

$\varphi(P)(X) = aP(X+2) + bP(X+1) + cP(X)$, a, b et c étant des réels fixés.

1. a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer que φ bijectif $\iff a + b + c \neq 0$.

c) Montrer que :

$$\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = (a+b+c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a2^k + b}{k!}\, P^{(k)}(X)$$

2. On suppose dans cette question $a + b + c = 0$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

b) A quelle condition, portant sur a, b et c, a-t-on $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X]$? Que vaut $\operatorname{Ker}\varphi$ dans ce cas ?

c) Montrer que si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, on a $\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \operatorname{Im}\varphi$ et $\operatorname{Ker}\varphi \subset \mathbb{R}_1[X]$. Quand a-t-on égalité ?

d) Montrer que φ n'a pas d'autre valeur propre que 0. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. On suppose dans cette question $a + b + c \neq 0$.

a) Montrer que : λ valeur propre de $\varphi \implies \lambda = a + b + c$.

b) Montrer que $a+b+c$ est effectivement valeur propre de φ et déterminer le sous-espace propre associé.

c) φ est-il diagonalisable ?

Solution :

1. a) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\varphi(P)$ est combinaison linéaire d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, donc appartient encore à cet espace.
La linéarité de φ résulte des propriétés des opérations, donc :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) Si $P = a_k X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \cdots$, alors des calculs simples donnent :

$$\varphi(P) = (a + b + c)a_k X^k + \cdots$$

$\star$ Si $a+b+c \neq 0$, φ conserve le degré et est donc un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\star$ Si $a + b + c = 0$, alors l'image par φ de tout polynôme constant est le polynôme nul et φ n'est pas injectif, donc pas bijectif.

c) La formule de Taylor permet d'écrire :

$$P(X + 2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} P^{(k)}(X),\ P(X + 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(X)$$

donc :

$$\varphi(P)(X) = (a + b + c)P(X) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$$

2. On a donc ici : $\varphi(P)(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$

a) On a déjà vu que le noyau de φ contient les polynômes constants et $\varphi(P)$ est combinaison linéaire des polynômes $P', \ldots, P^{(n)}$, donc est de degré inférieur ou égal à 1 :

$$\mathbb{R}_0[X] \subset \operatorname{Ker}\varphi \text{ et } \operatorname{Im}\varphi \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

b) On a $\varphi(P) = (2a + b)P' + \sum_{k=2}^{n} \frac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X)$, ainsi :

$\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = 2a + b, \ldots, \varphi(X^k) = k(2a + b)X^{k-1} + \cdots$.

La matrice M de φ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc strictement trigonale supérieure, la diagonale de M étant bordée de la sur-diagonale :

$$2a + b, 2(2a + b), \ldots, n(2a + b)$$

$\star$ Si $2a+b \neq 0$, la première colonne de M est nulle et les autres colonnes sont non nulles et forment une famille échelonnée de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc une base de cet espace et :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-1}[X], \operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X]$$

$\star$ Si $2a + b = 0$, alors la vue des colonnes de M montre que l'image de φ est contenue dans $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

c) $\star$ Si $2a + b \neq 0$, on sait que :

$$\mathbb{R}_{n-2}[X] \subset \mathbb{R}_{n-1}[X] = \operatorname{Im}\varphi \text{ et } \operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_0[X] \subset \mathbb{R}_1[X]$$

$\star$ Si $2a+b = 0$, alors $\varphi(P)(X) = \dfrac{4a+b}{2}P''(X) + \cdots$ et on a $4a+b \neq 0$ (sinon on aurait $a = b = 0$, ce qui est exclu dans cette question).

La matrice M de φ est alors trigonale supérieure, de diagonale nulle, bordée d'une sur-diagonale nulle elle-même bordée d'une sur-diagonale de terme générique $\dfrac{4a+b}{2}\,k(k-1)$ non nul.

La vision des colonnes de M montre alors que $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbb{R}_1[X]$.

d) M est trigonale supérieure, donc ses valeurs propres se lisent dans sa diagonale : seul 0 est valeur propre et φ est diagonalisable si et seulement si $M = 0$, ce qui impose $a = b = c = 0$.

3. a) et b) Maintenant la matrice M de φ est trigonale supérieure de termes diagonaux tous égaux à $a + b + c$, donc :

$$\operatorname{Spec}(\varphi) = \{a + b + c\}$$

et $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a.2^k + b}{k!} P^{(k)}(X) = 0$. Soit en raisonnant comme dans la question précédente :

$\star$ Si $2a + b \neq 0$, $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff P \in \mathbb{R}_0[X]$;

$\star$ Si $2a + b = 0$ et $4a + b \neq 0$, $\varphi(P) = (a + b + c)P \iff P \in \mathbb{R}_1[X]$;

$\star$ Si $a = b = 0$, alors $\varphi = c.id$ et tout polynôme non nul est propre.

c) φ n'admet qu'une valeur propre et est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie,donc si et seulement si $a = b = 0$.

Exercice 2.5.

Dans cet exercice, $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

• Une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $m_{i,j} \geq 0$ et si pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, $m_{i,1} + m_{i,2} + m_{i,3} = 1$.

• Une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est dite *déterministe* si elle est stochastique et si pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $m_{i,j} \in \{0,1\}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n(A) = \dfrac{1}{n+1}\Big(\sum\limits_{k=0}^{n} A^k\Big)$. En discutant suivant le reste de la division euclidienne de n par 3, exprimer $C_n(A)$ en fonction de I_3, A, A^2 et n.

3. On note $C_n(A) = (c_{i,j}(n))_{1\leq i,j\leq 3}$. Pour $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, déterminer la limite $c_{i,j}$ de $c_{i,j}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pose $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq 3}$.

4. Les matrices A et C sont-elles stochastiques ? déterministes ?

5. Soit a (resp. c) l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A (resp. C) dans la base canonique. Montrer que c est le projecteur sur $\mathrm{Ker}(a - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(a - Id)$.

Solution :

1. Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$, A traduit dans cette base l'application linéaire telle que $e_1 \mapsto e_2 \mapsto e_3 \mapsto e_1$.
Donc A^2 traduit l'application linéaire telle que $e_1 \mapsto e_3 \mapsto e_2 \mapsto e_1$, A^3 traduit l'identité, et donc :

$$A^{3k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ A^{3k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;\ A^{3k+2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Comme $A^{3k} + A^{3k+1} + A^{3k+2}$ vaut $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient pour tout q de $\mathbb{N}$:

$\star\ C_{3q+2} = \dfrac{1}{3q+3}(\underbrace{J + J + \cdots + J}_{q+1 \text{ fois}}) = \dfrac{1}{3}J$

$\star\ C_{3q+1} = \dfrac{q}{3q+2}J + \dfrac{1}{3q+2}(I + A)$

$\star\ C_{3q} = \dfrac{q}{3q+1}J + \dfrac{1}{3q+1}I$

3. La convergence s'entendant terme à terme, les suites (C_{3q}), (C_{3q+1}) et (C_{3q+2}) sont convergentes de même limite $C = \dfrac{1}{3}J$.
Par exhaustion, on en déduit que la suite (C_n) converge vers C.

4. A est stochastique et déterministe, tandis que C est simplement stochastique.

5. On a $C^2 = \dfrac{1}{9}J^2 = \dfrac{1}{9}\times 3J = C$, donc c est bien un projecteur.

L'image de c est la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$, tandis que le noyau de c est le plan d'équation $x + y + z = 0$, donc le plan de base $((1, -1, 0), (1, 0, -1))$.

Or $A - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et des calculs simples montrent que le noyau de $a - id$ est la droite engendrée par $(1, 1, 1)$ et que son image est engendrée par exemple par les premier et troisième vecteurs colonnes, donc est le plan d'équation $x + y + z = 0$.

$$\operatorname{Ker} c = \operatorname{Im}(a - id) \text{ et } \operatorname{Im} c = \operatorname{Ker}(a - id)$$

d'où le résultat.

Exercice 2.6.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E. On note r le rang de p.

Pour tout u appartenant à $\mathcal{L}(E)$, espace des endomorphismes de E, on pose :

$$G(u) = \frac{1}{2}(u \circ p + p \circ u)$$

1. Montrer que G est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

2. On pose $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(p) \text{ et } \operatorname{Im}(p) \subset \operatorname{Ker}(u)\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et préciser la restriction de G à $\mathcal{A}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'espace vectoriel des endomorphismes de $\operatorname{Ker}(p)$ et en déduire sa dimension.

3. On définit :

$\mathcal{B} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$

$\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(p) \text{ et } \mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$

$\mathcal{D} = \{u \in \mathcal{L}(E) \ / \ \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(p) \text{ et } \mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(u)\}$.

a) Quel est l'effet de G sur chacun de ces sous-espaces ?

b) Montrer que $\mathcal{B}$ est isomorphe à l'espace des endomorphismes de $\mathrm{Im}(p)$, en déduire sa dimension.

c) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont en somme directe. En déduire que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont en somme directe.

Solution :

1. u et p étant des endomorphismes de E, il en est de même de $G(u)$, donc G est une application de $\mathcal{L}(E)$ dans lui-même.
Soit alors $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} G(u+\lambda v) &= \frac{1}{2}((u+\lambda v) \circ p + p \circ (u+\lambda v)) \\ &= \frac{1}{2}(u \circ p + \lambda v \circ p + p \circ u + \lambda p \circ v) = G(u) + \lambda G(v), \text{ et donc :} \end{aligned}$$

$$G \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$$

2. a) $\star$ $\mathcal{A}$ est non vide, car contient l'endomorphisme nul ;

$\star$ Si $u \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $\mathrm{Im}(\lambda u) = \mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}(\lambda u)$, donc $\lambda u \subset \mathcal{A}$. Le résultat reste valide pour $\lambda = 0$.

$\star$ Si u et v appartiennent à $\mathcal{A}$:
$\to$ On a $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, p$, d'où $\mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, p$. Comme $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$, on a bien $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Ker}\, p$.
$\to$ On a $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, v$, donc $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}(u+v)$.
Bref, $u + v \in \mathcal{A}$ et finalement

$\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Bien entendu, si $u \in \mathcal{A}$, on a $u \circ p = 0$ (car $\mathrm{Im}\, p \subset \mathrm{Ker}\, u$) et $p \circ u = 0$ (car $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$), donc $G(u) = 0$:
La restriction de G à $\mathcal{A}$ est nulle.

b) A $u \in \mathcal{A}$ associons sa restriction à $\mathrm{Ker}\, p$. Comme $\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Ker}\, p$, on a *a fortiori* $\mathrm{Im}(u_{|\,\mathrm{Ker}\, p}) \subset \ker p$ et on peut considérer cette restriction comme étant un endomorphisme de $\mathrm{Ker}\, p$.
On dispose ainsi d'une application $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{L}(\mathrm{Ker}\, p)$.

$\star$ Si $\varphi(u) = 0$, la restriction de u à $\operatorname{Ker} p$ est nulle et comme la restriction de u à $\operatorname{Im} p$ est nulle (car $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$), u est nulle sur deux sous-espaces supplémentaires ($\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires, puisque p est un projecteur) et donc $u = 0$.

φ est injective.

$\star$ Soit v un endomorphisme de $\operatorname{Ker} p$. Soit alors $u \in \mathcal{L}(E)$, dont la restriction à $\operatorname{Ker} p$ est v et dont la restriction à $\operatorname{Im} p$ est l'application nulle.
v est ainsi parfaitement définie (linéaire et restrictions à deux sous-espaces supplémentaires connues), d'image contenue dans $\operatorname{Ker} p$ et de noyau contenant $\operatorname{Im} p$.

φ est surjective

Ainsi φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et si p est de rang r, on a $\dim \operatorname{Ker} p = n - r$, donc :

$$\dim \mathcal{A} = (n-r)^2$$

3. a) $\star$ Soit $u \in \mathcal{B}$.
Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p$, on a pour tout x de E, $p \circ u(x) = p\big(u(x)\big) = u(x)$ et comme $\operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, on a $p(x) = 0 \implies u(x) = 0$. Donc :
Si $x \in \operatorname{Ker} p$, on a :

$$G(u)(x) = \frac{1}{2}\big(u(p(x)) + p(u(x))\big) = \frac{1}{2}\, p(u(x)) = \frac{1}{2}u(x) = 0 = u(x)$$

Si $x \in \operatorname{Im} p$, on a :

$$G(u)(x) = \frac{1}{2}\big(u(p(x)) + p(u(x))\big) = \frac{1}{2}(u(x) + u(x)) = u(x)$$

Ainsi $G(u)$ et u concident sur deux sous-espaces supplémentaires et donc $G(u) = u$.

$$u \in \mathcal{B} \implies G(u) = u$$

$\star$ Soit $u \in \mathcal{C}$. On a $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$, donc $u \circ p = 0$ et comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p$, on a $p \circ u = u$, donc :

$$u \in \mathcal{C} \implies G(u) = \frac{1}{2}\, u$$

$\star$ Soit $u \in \mathcal{D}$. On a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} p$, donc $p \circ u = 0$ et $G(u) = \dfrac{1}{2}\, u \circ p$

Si $x \in \operatorname{Ker} p \subset \operatorname{Ker} u$, on a $G(u)(x) = 0 = u(x) = \dfrac{1}{2}\, u(x)$

Si $x \in \operatorname{Im} p$, on a $p(x) = x$ et $G(u)(x) = \dfrac{1}{2}\, u(x)$

Ainsi $G(u)$ et $\dfrac{1}{2}\, u$ concident sur deux sous-espaces supplémentaires et :

$$u \in \mathcal{D} \implies G(u) = \frac{1}{2}\, u$$

b) $\mathcal{B}$ est à $\mathcal{A}$ ce qu'est $id - p$ à p (car $id - p$ est le projecteur conjugué du projecteur p et l'image de l'un est le noyau de l'autre et réciproquement).

Comme le rang de $id - p$ vaut $n - \mathrm{rg}(p)$, il vient avec les notations de 2. b) :

$$\dim \mathcal{B} = (n - (n - r))^2 = r^2$$

c) $\star$ Si $u \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, $\mathrm{Im}\, u$ est contenue à la fois dans $\mathrm{Ker}\, p$ et dans $\mathrm{Im}\, p$, donc $\mathrm{Im}\, u = \{0\}$ et $u = 0$, ce qui prouve que :

$$\mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont en somme directe}$$

$\star$ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ et $\mathcal{C} \oplus \mathcal{D}$ sont inclus dans les sous-espaces propres de G respectivement associés aux valeurs propres $0, 1, 1/2$. Comme on sait que des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes d'un endomorphisme sont toujours en somme directe, il en est *a fortiori* de même des espaces en question et finalement

$$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \text{ et } \mathcal{D} \text{ sont en somme directe.}$$

Exercice 2.7.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$ existe.

2. Montrer que l'application $x \mapsto \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t} dt$ est une fonction polynomiale de degré n à coefficients réels.

Soit n un entier naturel non nul fixé et soit φ l'application définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(P)(x) = \mathrm{e}^x \int_x^{+\infty} P(t) \mathrm{e}^{-t} dt$$

3. Dans la suite de cet exercice, on confond polynôme et fonction polynôme associée.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer le noyau et l'image de φ.

c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto t^n.\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$, positive au voisinage de $+\infty$ et négligeable au voisinage de $+\infty$ devant $t \mapsto t^{-2}$. La convergence de l'intégrale proposée en résulte.

2. Procédons à une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\, dt$:

$$u(t) = t^{n+1} \implies u'(t) = (n+1)t^n,\ v'(t) = \mathrm{e}^{-t} \Longleftarrow v(t) = -\mathrm{e}^{-t}$$

Comme $\lim\limits_{+\infty} uv = 0$, on peut procéder à cette intégration par parties directement avec la borne infinie et :

$$\int_x^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \big[-t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\big]_x^{\to+\infty} + (n+1)\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

$$\int_x^{+\infty} t^{n+1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} + (n+1)\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

En posant $P_n(x) = \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}\,dt$, on a donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = x^{n+1} + (n+1)P_n(x)$$

Comme $P_0(x) = \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}dt = 1$, une récurrence aisée montre que pour tout n, P_n est une fonction polynomiale à coefficients réels, de degré n et de coefficient dominant valant 1.

3. a) Le calcul fait en 2. peut se faire pour toute puissance et la « linéarité de l'intégration sous réserve de convergence » montre que $\varphi(P)$ appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et que l'application $P \mapsto \varphi(P)$ est linéaire :

$$\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$$

b) $\star$ Si $\varphi(P) = 0$, comme une exponentielle n'est jamais nulle, il reste :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 0$$

En dérivant, il vient : $\forall\, x \in \mathbb{R}, -P(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$ et P est le polynome nul.

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{0\} \text{ et } \varphi \text{ est injective}$$

$\star$ φ étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie $n+1$, son injectivité impose sa bijectivité, et :

$$\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}_n[X]$$

c) Soit P un polynôme propre associé à la valeur propre λ. On a : $\varphi(P) = \lambda P$, soit : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x\displaystyle\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \lambda P(x)$, ou encore :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t}dt = \lambda.\mathrm{e}^{-x}P(x)$$

Par dérivation légitime, on en déduit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, P(x)\mathrm{e}^{-x} = \lambda\mathrm{e}^{-x}(P'(x) - P(x))$$

ou encore :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda P'(x) = (\lambda - 1)P(x)$$

Des raisons de degré montrent que si $\lambda \neq 1$, seul convient le polynôme nul, ce qui a été exclu par hypothèse, donc la seule valeur propre possible est $\lambda = 1$, qui donne $P' = 0$ et P polynôme constant.

Réciproquement, on vérifie que si P est un polynôme constant, on a $\varphi(P) = P$, donc :

$$\text{Spec}(\varphi) = \{1\} \text{ et } E_{(1)}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$$

Exercice 2.8.

Soit N une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et u l'élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé. On note I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $\text{rg}(N) = 1$ et $N^2 = 0$.
Montrer l'existence d'une base (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$a \notin \text{Ker}(u),\ b = u(a),\ c \in \text{Ker}(u)$$

En déduire que N est semblable à la matrice U_1 suivante :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose que $\text{rg}(N) = 2$, que $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$. Montrer l'existence d'une base (a', b', c') de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$a' \notin \text{Ker}(u),\ b' = u(a'),\ c' = u^2(a')$$

En déduire que N est semblable à $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

a) Calculer $N^2,\ N^3$ et en déduire que : $\inf\{k \in \mathbb{N},\ N^k = 0\} = \text{rg}(N) + 1$.

b) On note $M = N^2 - N$ et $A = I_3 + N$.

i) Montrer que A est inversible et que : $A^{-1} = I_3 + M$.

ii) Montrer que les matrices M et N sont semblables (On pourra raisonner en fonction du rang de N.)

iii) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

c) En déduire que si une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

alors elle est aussi semblable à son inverse B^{-1}.
Que pensez-vous de la réciproque ?

Solution :

1. On suppose $\text{rg}(N) = 1$ et $N^2 = 0$: ainsi u n'est pas l'endomorphisme nul et :

$$\exists\, a \in \mathbb{R}^3, a \notin \text{Ker}(u).$$

Soit $b = u(a)$, on a bien $b \in \text{Ker}(u)$, puisque $u^2 = 0$. Par le théorème du rang : $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$, il existe donc $c \in \text{Ker}(u)$ tel que (b, c) forme une famille libre.
Montrons que (a, b, c) est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$:
Soit λ, μ, ν réels tels que $\lambda a + \mu b + \nu c = 0$. En appliquant u, on obtient : $\lambda.u(a) + 0 + 0 = 0$, soit $\lambda = 0$.
Il reste : $\mu b + \nu c = 0$, d'où $\mu = \nu = 0$, car (b, c) est libre.
Ainsi (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que : $a \notin \text{Ker}(u), b = u(a), c \in \text{Ker}(u)$.

La matrice de u dans cette base (a, b, c) est : $U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. On suppose $\text{rg}(N) = 2$, $N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$; donc :

$$\exists\, a' \notin \text{Ker}(u^2). \text{ On pose } b' = u(a'), c' = u^2(a').$$

Montrons que (a', b', c') est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Soit λ, μ, ν réels tels que $\lambda a' + \mu b' + \nu c' = 0$. Alors $\lambda u^2(a') + 0 + 0 = 0$ et donc $\lambda = 0$.
Puis : $\mu b' + \nu c' = 0 \implies \mu u(b') + 0 = 0 \implies \mu = 0$, car $b' \notin \text{Ker}(u)$, et enfin $\nu c' = \nu u^2(a') = 0 \implies \nu = 0$ car $a' \notin \text{Ker}(u^2)$.
Ainsi (a', b', c') est une base de $\mathbb{R}^3$ telle que : $a' \notin \text{Ker}(u), b' = u(a'), c' = u^2(a')$.

La matrice de u dans cette base (a', b', c') est : $U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. a) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

On a : $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où $\text{rg}(N) \leq 2$. Selon le rang de N, on obtient :

- $\text{rg}(N) = 0 \implies \alpha = \beta = \gamma = 0$: on a bien $N^1 = 0$,
- $\text{rg}(N) = 1 \implies (\alpha = 0)$ ou $(\gamma = 0) \implies \alpha\gamma = 0$: on a bien $N \neq 0$ et $N^2 = 0$,
- $\text{rg}(N) = 2 \implies N^2 \neq 0$ et $N^3 = 0$.

Dans tous les cas, on a bien : $\inf\{k \in \mathbb{N} \mid N^k = 0\} = \text{rg}(N) + 1$

b) On note $M = N^2 - N$ et $A = I_3 + N$

i) A est une matrice échelonnée donc inversible.
On a : $A(I_3 + M) = (I_3 + N)(I_3 + N - N^2) = I_3 = (I_3 + M)A$, d'où :

$$A^{-1} = I_3 + M$$

ii) • $\text{rg}(N) = 0 : N = M = 0$,

• $\text{rg}(N) = 1$ entraîne $M = N^2 - N = -N$, donc $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = 1$, et $M^2 = (N^2 - N)^2 = 0$.

On en déduit grâce à la question 1 que M et N sont toutes deux semblables à U_1.

iii) $\text{rg}(N) = 2$ entraîne que la matrice N est semblable à U_2 d'où $M = N^2 - N$ est semblable à $U_2^2 - U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{rg}(M) = 2$.

On en déduit grâce à la question 2 que M et N sont toutes deux semblables à U_2.

Dans tous les cas, les matrices M et N sont donc semblables et il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P^{-1}MP$.

On a $A = I_3 + N = I_3 + P^{-1}MP = P^{-1}(M + I_3)P = P^{-1}A^{-1}P$
Les matrices A et A^{-1} sont donc semblables.

5. On a montré que toute matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à A^{-1}.

La matrice B est semblable à A. Il existe donc Q telle que $B = Q^{-1}AQ$, d'où $A^{-1} = Q^{-1}B^{-1}Q$ et A^{-1} est semblable à B^{-1}, d'où le résultat demandé par transitivité.
Soit $B = -I_3$; on a alors : $B^{-1} = B = -I_3$ et pourtant B n'est pas semblable à une matrice de la forme souhaitée.

Exercice 2.9.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Dans tout l'exercice, on confondra vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée. On considère $E = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne associée.

Soit a, b deux vecteurs de E de norme 1 orthogonaux. On définit un endomorphisme u de E par :

$$\text{pour tout } x \in E, u(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a$$

Soit A la matrice canoniquement associée à u.

1. a) Déterminer $\operatorname{Ker} u$. Déterminer la dimension de $\operatorname{Im} u$ ainsi qu'une base de cet espace.

b) Montrer que $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$ et que les sous-espaces $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

2. Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$

$$\langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

3. Déterminer les valeurs propres (réelles) de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4. Montrer que l'endomorphisme $u \circ u$ est symétrique.
En déduire que si λ est une valeur propre complexe non réelle de la matrice A, alors $\lambda = i\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

Solution :

1. a) On a $x \in \operatorname{Ker}(u)$ si et seulement si $\langle a, x\rangle b = \langle b, x\rangle a$. Or la famille (a, b) est libre ; donc ceci impose $\langle b, x\rangle = \langle a, x\rangle = 0$ et $x \in \operatorname{Vect}(a, b)^{\perp}$.
La réciproque est immédiate.

Ainsi $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}(a, b)^{\perp}$, qui est de dimension 2.

Comme pour tout x, $u(x) = \langle a, x\rangle b - \langle b, x\rangle a$, on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(a, b)$ et comme u est de rang 2, il vient

$$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)^{\perp}.$$

b) Par le cours et la question précédente, on a $\mathrm{Ker}(u) \oplus^{\perp} \mathrm{Im}(u) = E$.

2. Il suffit d'écrire :

$$\begin{cases} \langle u(x), y\rangle = \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle - \langle b, x\rangle\langle a, y\rangle \\ \langle u(y), x\rangle = \langle a, y\rangle\langle b, x\rangle - \langle b, y\rangle\langle a, x\rangle \end{cases}$$

D'où :

$$\forall\, x, y, \langle u(x), y\rangle = -\langle x, u(y)\rangle$$

Matriciellement ceci se traduit par le fait que A est une matrice antisymétrique.

3. Si λ est une valeur propre (nécessairement réelle) de u, il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Ainsi :

$$\lambda||x||^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\lambda||x||^2$$

Donc $\lambda = 0$. Comme le noyau de u est de dimension 2, 0 est effectivement valeur propre de u.

4. On vérifie aisément que u^2 est symétrique, car le carré d'une matrice antisymétrique est symétrique.

Ainsi, si λ est une valeur propre complexe non réelle de A, alors λ^2 est une valeur propre de A^2, donc est un réel.
Plus précisément, λ est un imaginaire pur, car si $\lambda = a + ib, b \neq 0$, alors $\lambda^2 = a^2 - b^2 + 2iab$ et ce nombre n'est réel que si $a = 0$.

Exercice 2.10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère deux projecteurs p et q de E différents de l'identité Id_E et de l'application nulle ; on suppose en outre que p et q commutent et que leur somme f n'est pas égale à l'identité.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur de E et calculer $f^3 - 3f^2 + 2f$. En déduire les valeurs propres possibles de f.

On note $\mathrm{Spec}(f)$ l'ensemble des valeurs propres de f.

2. a) Montrer que $0 \in \mathrm{Spec}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0_E\}$.

b) Montrer que $2 \in \mathrm{Spec}(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q \neq \{0_E\}$.

c) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2Id_E) = E$.

3. En déduire que $[2 \notin \mathrm{Spec}(f)$ ou $0 \notin \mathrm{Spec}(f)]$ entraîne que $1 \in \mathrm{Spec}(f)$ et $\mathrm{Spec}(f) \neq \{1\}$.

Solution :

1. On a par commutativité : $(p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$.

Par la formule du binôme (valide puisque p et q commutent), il vient en notant la composition par simple juxtaposition :

$f^3 = p^3 + 3p^2q + 3qp^2 + q^3 = p + 6pq + q$;

$f^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p + 2pq + q$.

$$f^3 - 3f^2 + 2f = 0$$

Aussi les valeurs propres possibles de f sont parmi les zéros de $X^3 - 3X^2 + 2X$, donc dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.

2. a) On a $0 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = p(x) + q(x) = 0$. Comme $f^2(x) = 0$, il vient $p(x) + 2(p \circ q)(x) + q(x) = 0$, donc $(p \circ q)(x) = 0$.

En appliquant p à la relation $p(x) + q(x) = 0$, on obtient $p(x) = 0$ et donc $q(x) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q \neq \{0\}$.

La réciproque est évidente.

b) On a $2 \in \mathrm{Sp}(f)$ si et seulement si il existe $x \neq 0$ tel que

$$f(x) = p(x) + q(x) = 2x.$$

On a alors $f^2(x) = 4x = 2x + 2(p \circ q)(x)$. Donc $(p \circ q)(x) = x$. Donc $x \in \mathrm{Im}\, p$ et comme p et q jouent le même rôle, on a également $x \in \mathrm{Im}\, q$.

Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$, on a $p(x) = q(x) = x$ donc $f(x) = 2x$.

c) On sait déjà que $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f - 2Id)$ sont en somme directe (quitte à ce que certains parmi ces sous-espaces soient réduits à $\{0\}$).

Soit $u \in E$, si on peut écrire $u = x + y + z$, avec $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $y \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2Id)$, alors :

$$\begin{cases} u = x + y + z \\ f(u) = y + 2z \\ f^2(u) = y + 4z \end{cases}$$

et donc :

$$\begin{cases} x = u - \dfrac{3}{2} f(u) + \dfrac{1}{2} f^2(u) \\ y = 2f(u) - f^2(u) \\ z = -\dfrac{1}{2} f(u) + \dfrac{1}{2} f^2(u) \end{cases}$$

On vérifie alors que ces vecteurs sont bien tels que : $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $y \in \mathrm{Ker}(f - Id)$, et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2Id)$, ce qui prouve que la somme des trois noyaux précédents est E.

3. Supposons que $2 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

• Si $1 \notin \mathrm{Sp}(f)$, alors $E = \mathrm{Ker}\, f$ et $f = 0$. Donc $p = -q$ ce qui entraîne que $p^2 = p = -pq = -qp = q^2 = q$; donc $p = q$ et $0 = p + q = 2p$ d'où $p = 0$.
Finalement si $2 \notin \mathrm{Sp}(f)$ alors $1 \in \mathrm{Sp}(f)$. La démonstration est identique si l'on suppose que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$.

Pour terminer, si $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, comme f est diagonalisable, il vient $f = Id$, ce qui contredit l'hypothèse $f \neq Id$.

Finalement $\mathrm{Sp}(f) \neq \{1\}$.

Exercice 2.11.

Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues telles que $[f(N)]^2$ admet une espérance.

1. Montrer que, pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, la variable $f(N)g(N)$ admet une espérance, que l'on note $\langle f, g\rangle$ dans la suite de l'exercice.

2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[X]$.

3. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

4. Calculer, pour tout entier naturel n, la valeur de l'intégrale

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

(*On pourra séparer les cas n pair et n impair.*)

5. Soit $(P_k)_{0 \le k \le n}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$) obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique.

a) Calculer P_0 et P_1

b) Montrer que pour tout entier k tel que $n \ge k \geqslant 1$, il existe un triplet de réels (a_k, b_k, c_k) tel que

$$X.P_k = a_k P_{k+1} + b_k P_k + c_k P_{k-1}$$

Solution :

1. Pour tout $A > 0, B < 0$ et $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_B^A f(x)g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \int_B^A \big(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\big)\big(g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\big)\, dx$$

$$\leq \sqrt{\int_B^A \left(f(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx \int_B^A \left(g(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}\right)^2 dx}$$
$$\leq \sqrt{\int_B^A f^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \int_B^A g^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx}$$

Quand B tend vers $-\infty$ et A vers $+\infty$, le membre de droite a une limite car $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, donc le membre de gauche aussi et $f(N)g(N)$ a une espérance. D'où le résultat.

2. Le sous-ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble non-vide de $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, on a par linéarité de l'espérance, toutes les convergences étant acquises :

$$E((\lambda f(N) + \mu g(N))^2) = \lambda^2 E(f(N)^2) + 2\lambda\mu\langle f,g\rangle + \mu^2 E(g(N)^2)$$

Enfin, les fonctions polynomiales sont dans $\mathcal{E}$ car le produit d'une fonction polynomiale P par $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$.
En effet, au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$:

$$P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = o(x^{-2}), \text{ car } \lim_{x\to\pm\infty} x^2P(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

3. ⋆ $\langle\ ,\ \rangle$ est clairement symétrique.

⋆ $\langle\ ,\ \rangle$ est bilinéaire en vertu de la linéarité de l'espérance.

⋆ $\forall\, f \in \mathcal{E}, \langle f,f\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

Donc $\langle f,f\rangle$ est positive comme intégrale d'une fonction positive et $\langle f,f\rangle = 0$ si, et seulement si $f = 0$ (en utilisant la continuité de l'intégrant).

4. Par intégration par parties, on trouve, pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n = \left[-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{\to-\infty}^{\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty}(n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = (n-1)I_{n-2}$$

Or $I_0 = 1$ et $I_1 = 0$. D'où, pour tout entier naturel n,

$$I_{2n+1} = 0, I_{2n} = (2n-1)(2n-3)\ldots 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

5. a) P_0 est la normalisation du polynôme constant 1. D'où :

$$P_0 = \frac{1}{I_0} = 1$$

D'après le procédé de Schmidt, on a :

$$P_1 = \frac{X - \langle X,P_0\rangle P_0}{\langle X - \langle X,P_0\rangle P_0, X - \langle X,P_0\rangle P_0\rangle} = \frac{X}{I_2 - 2I_1^2 + I_1I_0} = X$$

b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, le polynôme $XP_k(X)$ appartient à $\mathbb{R}_{k+1}[X] = \text{Vect}(P_i,\ i \leq k+1)$.
On a donc :

$$XP_k(X) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i P_i(X)$$

avec $\alpha_i = \langle X.P_k, P_i \rangle$.
On remarque alors que $\langle X.P_k, P_i \rangle = \langle P_k, X.P_i \rangle$.
Cette dernière expression montre que $\alpha_i = 0$ si $i \leq k-2$ car $P_k \in \big(\mathbb{R}_{k-1}[X]\big)^{\perp}$.
D'où le résultat final.

Exercice 2.12.

Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit une application Φ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\text{pour tout } P \text{ de } \mathbb{R}_n[X],\ \Phi(P) = P'' - 2XP'$$

où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer les valeurs propres de Φ. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

3. a) Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi(H_p) = -2pH_p$.

b) Déterminer le degré de H_p ainsi que les coefficients des termes de degré $p-1$ et $p-2$ de H_p.

4. Soit $p \neq q$ deux entiers de $[\![0, n]\!]$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_p(t) H_q(t) \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

est convergente et calculer sa valeur.

Solution :

1. La dérivation étant linéaire, l'application Φ est linéaire. De plus, pour tout $k \geq 2$, $\Phi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} - 2kX^k$, et $\Phi(1) = 0, \Phi(X) = -2X$ entraînent que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. La matrice associée à Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & -4 & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & n(n-1) \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -2n \end{pmatrix}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure.

Ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale et $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -2, -4, \dots, -2n\}$.
La matrice A admet $(n+1)$ valeurs propres, et $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$.
L'endomorphisme Φ est donc diagonalisable.

3. a) L' endomorphisme Φ admet $-2p$ comme valeur propre et le sous-espace propre associé est de dimension 1. Il existe donc un unique polynôme (unitaire après normalisation) H_p tel que $\Phi(H_p) = -2pH_p$.

b) La considération du terme de plus haut degré montre que si $\Phi(H_p) = -2pH_p$, alors P est de degré exactement p.

On écrit alors $H_p(X) = X^p + \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k X^k$, puis $\Phi(H_p) = -2pH_p$ donne, en égalant les coefficients des deux membres de cette égalité :

$$\begin{cases} -2(p-1)a_{p-1} = -2pa_{p-1} \\ -2(p-2)a_{p-2} + p(p-1) = -2pa_{p-2} \end{cases}$$

Donc $a_{p-1} = s0, a_{p-2} = -\dfrac{p(p-1)}{4}$.

4. On sait (ou on vérifie aisément) que $(P, Q) \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

On a : $\langle \Phi(P), Q \rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (P''(t) - 2tP'(t))Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$, soit :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q(t)2t\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

En intégrant par parties, directement avec les bornes infinies :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P''(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt = \left[P'(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)(Q'(t) - 2tQ(t))\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

et, en remplaant, on obtient :

$$\langle \Phi(P), Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$$

Sous cette forme la symétrie est claire et $\langle \Phi(P), Q\rangle = \langle \Phi(Q), P\rangle$.

Ainsi, Φ est un endomorphisme symétrique et les sous-espaces propres sont orthogonaux. L'intégrale demandée est donc nulle.

Exercice 2.13.

Soit n un entier naturel non nul et Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$. On définit l'application suivante :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (PQ)^{(n)} \end{cases}$$

où $(PQ)^{(n)}$ indique que l'on prend la dérivée $n^{\text{ème}}$ du produit de P par Q.

1. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure. Que dire de plus dans le cas particulier où $d < n$?

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le polynôme Q pour que φ soit diagonalisable.

Solution :

1. L'application φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$ car pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a : $\deg(PQ) \leq n + d$ et $\deg((PQ)^{(n)}) \leq n + d - n = d \leq n$.

L'application φ est linéaire car la dérivation et l'application $P \mapsto PQ$ sont linéaires.
Donc φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminons le noyau de φ :

$$P \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow (PQ)^{(n)} = 0 \Longleftrightarrow \deg(PQ) < n \Longleftrightarrow \deg(P) < n - d$$

Le noyau de φ est donc réduit au sous-espace nul si, et seulement si, $d = n$.

Par conséquent, l'endomorphisme φ est injectif (et donc bijectif car $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie) si, et seulement si $d = n$.

3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Le polynôme $\varphi(X^k)$ est de degré inférieur à k, et même strictement inférieur à k si $d < n$. Donc la matrice de φ est triangulaire supérieure.

4. Comme la matrice de φ dans la base canonique est triangulaire, on lit ses valeurs propres sur la diagonale.

• Si $d < n$, on a vu à la question précédente que les éléments diagonaux (donc les valeurs propres) de la matrice de φ dans la base canonique sont nuls. L'endomorphisme φ est alors diagonalisable si, et seulement si, c'est l'endomorphisme nul, soit $Q = 0$.

• Si $d = n$, calculons les coefficients diagonaux de la matrice de φ dans la base canonique. Si on note a_n le coefficient du monôme dominant de Q, les coefficients diagonaux sont $a_n \dfrac{(n+k)!}{k!}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$. Comme ces coefficients sont tous différents, la matrice est diagonalisable.

En conclusion, φ est diagonalisable si, et seulement si $Q = 0$ ou $d = n$.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère trois endomorphismes de E, notés f, g et h tels que :

$$\begin{cases} h \circ f - f \circ h &= 2f \\ h \circ g - g \circ h &= -2g \\ f \circ g - g \circ f &= h \end{cases}$$

On suppose de plus que si F est un sous-espace vectoriel de E qui est stable à la fois par f, g et h, alors $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Soit λ une valeur propre de h.

1. Soit x un vecteur propre de h associé à la valeur propre λ. Montrer que :

$$h\big(f(x)\big) = (\lambda + 2) f(x).$$

2. Montrer qu'il existe un vecteur non-nul x_0 et λ_0 un réel tels que

$$\begin{cases} h(x_0) = \lambda_0 x_0 \\ f(x_0) = 0 \end{cases}$$

3. On définit la famille de vecteurs $(x_k)_{k \leq n-1}$ par le vecteur x_0 trouvé à la question précédente et la relation de récurrence :

$$\forall k \in [\![0, n-2]\!], x_{k+1} = g(x_k)$$

Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{cases} h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k \\ g(x_k) = x_{k+1} \\ f(x_k) = k(\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \end{cases}$$

en posant $x_{-1} = 0$.

4. Montrer que la famille $(x_k)_{k\leq n-1}$ est une base de E.

Solution :

1. Comme $h(x) = \lambda x$, la première propriété donne :

$$h(f(x)) = 2f(x) + f(h(x)) = 2f(x) + f(\lambda x) = (2 + \lambda)f(x)$$

D'où le résultat.

2. Soit λ_0 la plus grande valeur propre (qui existe car on a supposé qu'il en existe au moins une) de h et x_0 un vecteur propre associé à cette valeur propre.
Si $f(x_0)$ est non nul, alors, d'après la question précédente, $\lambda_0 + 2$ est une valeur propre de h, ce qui est impossible car on a choisi λ_0 maximale. D'où :

$$f(x_0) = 0.$$

3. Procédons par récurrence. Définissons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la proposition :

$$\mathcal{P}_k : \text{«} \, h(x_k) = (\lambda_0 - 2k)x_k, \ f(x_k) = k(\lambda_0 - k + 1)x_{k-1} \, \text{»}$$

• Les relations sont vérifiées pour $k = 0$, d'après la question précédente. D'où $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Soit $k \in \mathbb{N}$; supposons la propriété $\mathcal{P}_k$ vérifiée. Alors :

$$\begin{aligned} h(x_{k+1}) &= h \circ g(x_k) \\ &= g \circ h(x_k) - 2g(x_k) \text{ (d'après la deuxième relation)} \\ &= (\lambda_0 - 2k)x_{k+1} - 2x_{k+1} \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= (\lambda_0 - 2(k+1))x_{k+1} \\ f(x_{k+1}) &= f \circ g(x_k) \\ &= g \circ f(x_k) + h(x_k) \text{ (d'après la troisième relation)} \\ &= k(\lambda_0 - k + 1)x_k + (\lambda_0 - 2k)x_k \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= (k+1)(\lambda_0 - k)x_k \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
On obtient le résultat demandé par le principe de récurrence.

4. Soit d l'indice du premier terme nul de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Les vecteurs x_k sont donc non-nuls pour $k < d$ et nuls pour $k \geq d$.

• D'après la question précédente et la définition de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est stable à la fois par f, g et h : d'après l'énoncé, il est égal à E (il ne peut être réduit à $\{0\}$ car $x_0 \neq 0$). La famille $(x_k)_{k\leq d-1}$ est génératrice de E, car les termes d'indices plus grand que d sont nuls.

• De plus, la famille de vecteurs non nuls $(x_k)_{k\leq d-1}$ est constituée de vecteurs propres de h associés à des valeurs propres distinctes (d'après la question précédente) : elle est donc libre.

En conclusion, la famille $(x_k)_{k\leq d-1}$ est donc une base de E, et en particulier $d = n$ car la dimension d'un espace vectoriel est égale au cardinal de ses bases.

Exercice 2.15.

Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. On considère les deux parties de E :

$$V = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\} \text{ et } W = \{f \in E, f'' = f\}$$

où f' et f'' désignent les dérivées première et seconde de f.

1. On admet qu'une base de W est donnée par $(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$.
Montrer que V et W sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 \big[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big]dt$$

2. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

3. Montrer que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans E.

4. Soit $U = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 0\}$.

   a) Montrer que U n'est pas réduit à la fonction nulle.

   b) Montrer que si $f \in U$ alors

$$\Big(\int_0^1 f(t)dt\Big)^2 - \int_0^1 f^2(t)dt \leq \int_0^1 f(t)f''(t)dt$$

5. On se place dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}_3[X], \varphi)$ et on note $\|.\|$ la norme associée.

   a) Déterminer une base de $VP = \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(0) = P(1) = 0\}$.

   b) Montrer l'existence du réel $\alpha = \inf\limits_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} \|\mu X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + (\lambda-1)X\|$.

   c) Montrer que $\alpha > 0$.

Solution :

1. • V est un sous-espace vectoriel de E, car non vide (contient $f = 0$) et stable par combinaison linéaire,

• $W = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^x, x \mapsto \mathrm{e}^{-x})$ est également un sous-espace vectoriel de E, puisque ces deux fonctions sont bien de classe $\mathcal{C}^2$.

• $f \in V \cap W \implies \begin{cases} f(x) = \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x} \\ f(0) = f(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\mathrm{e} + \beta/\mathrm{e} = 0 \end{cases}$

$\implies \alpha = \beta = 0 \implies f = 0.$

• Soit $f \in E$. On cherche deux fonctions $v \in V$ et $w : x \mapsto \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x} \in W$ telles que : $\forall x \in [0,1], f(x) = v(x) + w(x)$. On a alors :

$$\begin{cases} f(x) = v(x) + \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x} \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = \lambda + \mu \\ f(1) = \lambda\mathrm{e} + \mu/\mathrm{e} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda = \dfrac{\mathrm{e}f(1) - f(0)}{\mathrm{e}^2 - 1} \\ \mu = \dfrac{\mathrm{e}f(1) - \mathrm{e}^2 f(0)}{\mathrm{e}^2 - 1} \end{cases}$$

Ainsi $w(x) = \lambda\mathrm{e}^x + \mu\mathrm{e}^{-x}$ est bien déterminée, on pose alors : $v(x) = f(x) - w(x)$ qui, par construction est bien dans V.

2. Soit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,dt$

φ est un produit scalaire sur E, car c'est clairement une forme symétrique, bilinéaire (linéarité des opérations de dérivation et d'intégration), positive (positivité de l'intégrale) et définie (l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle si et seulement si cette fonction est nulle).

3. On sait déjà que V et W sont supplémentaires dans E.
Soit alors $f \in V$ et $g \in W$,

$$\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt = [f(t)g'(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)dt = 0 - \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

car $f(0) = f(1) = 0$ et $g = g''$. D'où :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt = 0 \text{ et } V \text{ et } W \text{ sont orthogonaux.}$$

4. a) U n'est pas réduit à la fonction nulle car il contient par exemple la fonction $x \mapsto \cos(2\pi x) - 1$.

b) Soit $f \in U$. On a :

$$\int_0^1 f'^2(t)\,dt = \big[f(t)f'(t)\big]_0^1 - \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt = -\int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

d'où :

$$\varphi(f,f) = \int_0^1 f^2(t)\,dt - \int_0^1 f'^2(t)\,dt = \int_0^1 f^2(t)\,dt + \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

On a $\varphi(f,1) = \displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,dt$ et $\varphi(1,1) = 1$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(\varphi(f,1))^2 \leq \varphi(f,f)\varphi(1,1)$ donne alors :

$$\Big(\int_0^1 f(t)\,dt\Big)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)\,dt + \int_0^1 f(t)f''(t)\,dt$$

5. L'espace $(\mathbb{R}_3[X], \varphi)$ est un espace euclidien de dimension 4.

a) P appartient à VP si et seulement si P est de degré inférieur ou égal à 3, admet 0 et 1 pour racines, donc est de la forme

$$X(1-X)(aX+b)$$

ainsi :

$$VP = \mathrm{Vect}(X(1-X), X^2(1-X))$$

b) La fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (\lambda,\mu) \mapsto ||\mu X^3 - (\lambda+\mu)X^2 + (\lambda-1)X||$ est minorée par 0, donc α existe. De plus c'est la racine carrée d'une fonction polynomiale, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^2$, donc elle atteint sa borne inférieure α et il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha = g(\lambda,\mu)$.

c) On a :

$$\alpha = \inf_{\lambda,\mu\in\mathbb{R}} ||\lambda(X-X^2) + \mu(X^3-X^2) - X|| = \inf_{P\in VP} ||P - x|| = d(x, VP).$$

Le théorème de la projection orthogonale assure que $\alpha = ||p_{VP}(x) - x||$, où $p_{VP}(x)$ est le projeté orthogonal du polynôme X sur le sous-espace vectoriel VP. Comme $x \notin VP, x \neq p_{VP}(x)$, d'où

$$d(x, VP) = \alpha > 0.$$

Exercice 2.16.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et f un endomorphisme de E.

1. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2) = r$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$ et que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

b) Réciproquement, on suppose que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
Montrer que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

2. On suppose dans cette question que $r = 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

3. On suppose désormais que $\mathrm{rg}(f) = r, \mathrm{rg}(f^2) = p$, avec $r \neq p$.

a) Montrer que $p \leq r - 1$.

b) Exprimer $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f)$ en fonction de r et p.

4. a) Montrer qu'il existe un entier k tel que $\mathrm{rg}(f^k) = \mathrm{rg}(f^{k+1})$.

b) Montrer qu'on a alors $E = \mathrm{Ker}(f^k) \oplus \mathrm{Im}(f^k)$.

Solution :

1. a) Comme $\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2$, on a $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim \mathrm{Ker}\, f^2$ et comme on a toujours $\mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2$, il vient immédiatement que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$. Alors $f(x) = 0$ et $x = f(y)$. Donc $f^2(y) = 0$ ce qui entraîne que $f(y) = x = 0$. On termine avec le théorème du rang pour conclure que $E = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.

b) Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\, f^2$. Alors $f^2(x) = f(f(x)) = 0$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0\}$. Donc $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Ainsi $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$ et on conclut par le théorème du rang.

2. Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement il admet une valeur propre non nulle. En effet :
$\mathrm{rg}\, f = 1 \implies 0 \in \mathrm{Sp}(f)$ et $\dim E_0 = (n-1)$. Donc :

• si $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$, alors f non diagonalisable, sauf si f est l'endomorphisme nul, qui n'est pas de rang 1 !.

• Si $\mathrm{Sp}(f) \neq \{0\}$, f admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$ et $\dim E_\lambda = 1$ (puisque $\dim E_0 = (n-1)$). Donc f est diagonalisable.

3. a) Soit $g : \mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, f^2$ définie par, pour tout $x \in \mathrm{Im}\, f, g(x) = f(x)$. L'application g est linéaire de $\mathrm{Im}\, f$ vers $\mathrm{Im}\, f^2$, surjective et le théorème du rang montre que :

$$\mathrm{rg}\, f = \mathrm{rg}\, f^2 + \dim \mathrm{Ker}\, g$$

Or $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{rg}\, f \neq \mathrm{rg}\, f^2$, donne $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f \neq \{0\}$. Donc $p \leq r - 1$.

b) Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = r - p$.

4. Regardons la famille de sous-espaces vectoriels $(\mathrm{Ker}\, f^k)_{k \geq 1}$. C'est une famille croissante pour l'inclusion. La suite des entiers naturels $(\dim \mathrm{Ker}\, f^k)_{k \geq 1}$

est donc croissante, majorée par la dimension de E. Elle est donc stationnaire : il existe k tel que $\dim \operatorname{Ker} f^k = \dim \operatorname{Ker} f^{k+1}$. Comme $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$. On a $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$.

Montrons que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+2}$.
En effet, soit $x \in \operatorname{Ker} f^{k+2}$; alors $f(x) \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$, donc $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1} = \operatorname{Ker} f^k$.

Par une récurrence immédiate, pour tout $p \geq 1$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+p}$. Par le théorème du rang, on obtient également que pour tout $p \geq 1$, $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+p}$, par inclusion évidente et égalité des dimensions.

Montrons que $\operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k = \{0\}$.

En effet, soit $x \in \operatorname{Ker} f^k \cap \operatorname{Im} f^k$; alors $f^k(x) = 0$ et $x = f^k(y)$. Donc $f^{2k}(y) = 0$ et $\operatorname{Ker} f^{2k} = \operatorname{Ker} f^k$ entraîne $x = f^k(y) = 0$.
$\operatorname{Ker} f^k$ et $\operatorname{Im} f^k$ sont donc en somme directe et comme les dimensions sont *ad hoc* ces deux sous-espaces de E sont supplémentaires.

Exercice 2.17.

Soit $\big(E, \langle\ ,\ \rangle\big)$ un espace euclidien.

1. a) Soit v un vecteur non nul de E. Montrer que l'application $\psi_v : x \mapsto \langle v, x\rangle$ est une application linéaire de E vers $\mathbb{R}$; préciser son noyau.

b) Réciproquement, montrer que, pour toute application linéaire φ non identiquement nulle de E vers $\mathbb{R}$, il existe un unique vecteur non nul $v \in E$ tel que $\varphi = \psi_v$.

2. Soit φ une application linéaire non nulle de E vers $\mathbb{R}$, u un vecteur non nul de $H = \operatorname{Ker} \varphi$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$f(x) = x + \varphi(x)\, u \qquad (*)$$

a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f, et étudier si f est diagonalisable.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut-on choisir une telle base orthonormée ?

c) Justifier que f est inversible et déterminer son inverse. Montrer que f^{-1} peut être définie par une formule analogue à $(*)$.

Solution :

1. a) Par la bilinéarité du produit sacalaire, l'application ψ_v est clairement linéaire. De plus son noyau est l'hyperplan $H = v^\perp = [\mathrm{Vect}(v)]^\perp$.

b) Soit $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de E.

$\star$ Pour $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ quelconque et $\varphi \in \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$, on a $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\varphi(e_i)$ et donc si on pose $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(e_i).e_i$, on a $\varphi(x) = \langle v, x\rangle = \psi_v(x)$, soit $\varphi = \psi_v$.

$\star$ Soit $v_1, v_2 \in E$, si $\psi_{v_1} = \psi_{v_2}$, on a pour tout vecteur x de E, $\langle v_1, x\rangle = \langle v_2, x\rangle$, donc $\langle v_1 - v_2, x\rangle = 0$ et pour $x = v_1 - v_2$ il reste $\|v_1 - v_2\|^2 = 0$ et $v_1 = v_2$.

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité.

2. a) On a $f(x) = \lambda\, x$ si et seulement si $\varphi(x)\, u = (\lambda - 1)\, x$, d'où :

- $\lambda = 1$ entraîne que $\varphi(x) = 0$, soit $x \in H = \mathrm{Ker}\,\varphi$;
- $\lambda \neq 1$ entraîne que $x \in \mathrm{Vect}(u) \subseteq H$ ce qui est exclu. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1\}$, et $\mathrm{Ker}(f - Id) = H$, donc f n'est pas diagonalisable.

b) Il existe v tel que $\varphi = \psi_v$, et $v \perp u$; soit (u_i) une base de E telle que $u_1 = v$, $u_2 = u$ et $(u_2, \dots, u_n)$ base de H. On a :

$$M_{(u_i)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ||v||^2 & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

en prenant $e_1 = v/||v||$, $e_2 = u/||u||$ complété en $(e_3, \dots, e_n)$ base orthonormée de H (*i.e.* (e_i) base orthonormée adaptée à $E = H^\perp \oplus H$), on a donc :

$$M_{(e_i)}(f) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ ||v||\,||u|| & & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

qui est de la forme voulue.

c) La matrice A est inversible car triangulaire avec des 1 sur sa diagonale. Pour déterminer son inverse, comme $\langle v, u\rangle = 0$, on a :

$[y = x + \langle v, x\rangle\, u \Rightarrow \langle v, y\rangle = \langle v, x\rangle] \Rightarrow \big[y = x + \langle v, x\rangle\, u \Leftrightarrow x = y - \langle v, y\rangle\, u\big]$

soit :

$$f^{-1}(y) = y - \langle v, y\rangle\, u = y + \psi_{-v}(y)\, u$$