1

ANALYSE

Exercice 1.1.

1. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

a) Déterminer le signe de $g(x)$, selon les valeurs de x.

b) Étudier les variations de la fonction f.

c) Déterminer les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient la relation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) + \varphi(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et la relation : } \forall\, n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$, et vérifier que α appartient à l'intervalle $]0,1[$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $-\ln 2 \leq f'(x) \leq 0$.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

3. Soit X une variable aléatoire à densité, dont une densité h est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, h(x) = \lambda.\mathrm{e}^{-|x|}\ln(1+\mathrm{e}^{|x|})$$

a) Quelle est la valeur du réel λ ?

b) Montrer que X admet des moments de tous ordres et donner la valeur de son espérance.

Solution :

1. a) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = -\frac{x}{(1+x)^2} < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et comme $g(0) = 0$:

$$\forall\, x > 0, g(x) < 0$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^{-x}\times\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{-x}\times g(\mathrm{e}^x) < 0$$

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, on a $\ln(1+\mathrm{e}^x) \sim \mathrm{e}^x$, donc $f(x) \sim \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^x = 1$.

$\star$ Au voisinage de $+\infty$, on écrit $\ln(1+\mathrm{e}^x) = x + \ln(1+\mathrm{e}^{-x}) \sim x$ et $f(x) \sim x.\mathrm{e}^{-x}$, ce qui donne (limite classique) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

D'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$\ln 2$	$\searrow$	0

c) $\star$ On a $f'(x) + f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, donc f est une solution.

$\star$ Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto K.\mathrm{e}^{-x}$, où K est une constante réelle quelconque, donc les solutions du problème posé sont les fonctions :

$$\varphi : x \mapsto f(x) + K.\mathrm{e}^{-x}, K \in \mathbb{R}$$

2. a) La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ d'image $]0,1[$.
Donc $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et comme $f(0) - 0 = \ln 2 > 0$ et $f(1) - 1 = \mathrm{e}^{-1}\ln(1+\mathrm{e}) - 1 < 0$ (car $\ln(1+\mathrm{e}) < \mathrm{e}$), on en déduit que $f(x) = x$ admet une solution et une seule α telle que $0 < \alpha < 1$.

b) On a $f'(x) < 0$ et comme $f(x) \leq \ln 2$, on a : $f'(x) = -f(x) + \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} \geq -\ln 2$, donc :

$$\forall\, x \geq 0; -\ln 2 \leq f'(x) < 0$$

c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans $]0,1[$ et l'inégalité des accroissements finis donne donc :

$$\forall\, n \geq 1, |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \ln 2|u_n - \alpha|$$

On en déduit que $\forall\, n \geq 1, |u_n - \alpha| \leq (\ln 2)^{n-1}|u_1 - \alpha|$ et comme $0 < \ln 2 < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \alpha$$

3. a) Soit $A > 0$ fixé quelconque. On peut écrire :

$$\int_0^A h(x)\,dx = \lambda\int_0^A f(x)\,dx = \lambda\int_0^A \big[\frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - f'(x)\big]\,dx$$

$$= \lambda\int_0^A \big[\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1} - f'(x)\big]\,dx = \lambda\big[-\ln(1+\mathrm{e}^{-x}) - f(x)\big]_0^A$$

$$= 2\lambda\ln 2 - f(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2\lambda\ln 2$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\,dx$ converge, et par parité l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$ est aussi convergente et vaut $4\lambda\ln 2$. Comme h est continue et positive, on conclut :

$$h \text{ est une densité} \iff \lambda = \frac{1}{4\ln 2}$$

b) On a $x^2.x^k h(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{x^{k+3}\mathrm{e}^{-x}}{4\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x^k h(x)$ est négligeable devant x^{-2} au voisinage de $+\infty$, ce qui assure la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k h(x)\,dx$.

On procède de même sur $\mathbb{R}^-$, ou on utilise la parité de h, et donc :

pour tout k de $\mathbb{N}$, $E(X^k)$ existe (et est nulle pour k impair).

Exercice 1.2.

1. a) Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour $n \geq 1$, on considère la série de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

Montrer que cette série converge pour $x > 0$ (on pourra utiliser les sommes partielles d'indices pairs et celles d'indices impairs)

On pose, pour $x > 1$,

$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x), \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}, s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}, \zeta_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^x}$$

b) Déterminer une relation entre $s_{2n}(x), \zeta_{2n}(x)$ et $\zeta_n(x)$.

c) En déduire que $s(x) = \big(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\big)\zeta(x)$.

2. Soit $(x, x_0) \in]0, +\infty[^2$.

a) Montrer que pour tout $N \geq 1$, $\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-N}}{k^x} \geq 0$, et en déduire que pour tout $n \geq 1, |s(x) - s_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

b) Montrer que : $|s(x) - s(x_0)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} + |s_n(x) - s_n(x_0)| + \frac{1}{(n+1)^{x_0}}$.

c) En déduire que s est continue au point x_0.

d) Déterminer $\lim_{x \to 1^+} \zeta(x)$.

Solution :

1. a) Soit $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$. On a :

$$s_{2n+2}(x) - s_{2n}(x) = u_{2n+1}(x) + u_{2n+2}(x) = \frac{1}{(2n+1)^x} - \frac{1}{(2n+2)^x} > 0$$

$$s_{2n+1}(x) - s_{2n-1}(x) = u_{2n}(x) + u_{2n+1}(x) = -\frac{1}{(2n)^x} + \frac{1}{(2n+1)^x} < 0$$

$$s_{2n+1}(x) - s_{2n}(x) = u_{2n+1}(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci prouve que les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes, donc convergentes de même limite. Par exhaustion on en déduit que la suite (s_n) converge.

b) On écrit :

$$\begin{aligned} s_{2n}(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{(2h+1)^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} \\ &= \sum_{h=1}^{2n} \frac{1}{h^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(2h)^x} \\ &= \zeta_{2n}(x) - \frac{2}{2^x} \zeta_n(x). \end{aligned}$$

c) En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient donc :

$$s(x) = \big(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\big)\zeta(x)$$

2. a) $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{(-1)^{k-N}}{k^x} = \big(\frac{1}{N^x} - \frac{1}{(N+1)^x}\big) + \big(\frac{1}{(N+2)^x} - \frac{1}{(N+3)^x}\big) + \ldots \geq 0$

On écrit alors :

$$s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x}$$

et donc le résultat précédent donne :

$$|s(x)-s_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+1)}}{k^x}$$

ou encore, pour exploiter toujours la positivité précédente :

$$|s(x)-s_n(x)| = \frac{1}{(n+1)^x} - \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-(n+2)}}{k^x} \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

b) Comme $s(x)-s(x_0) = s(x)-s_n(x)+s_n(x)-s_n(x_0)+s_n(x_0)-s(x_0)$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned}|s(x)-s(x_0)| &\leq |s(x)-s_n(x)| + |s_n(x)-s_n(x_0)| + |s_n(x_0)-s(x_0)|\\ &\leq \frac{1}{(n+1)^x} + |s_n(x)-s_n(x_0)| + \frac{1}{(n+1)^{x_0}}\end{aligned}$$

c) Soit $x_0 > 0$ fixé et $x > 0$. Supposons que $x > \frac{1}{2}x_0$, et soit $\varepsilon > 0$ quelconque.
On peut trouver n_0 tel que $\frac{1}{(n_0+1)^{x_0/2}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et on a *a fortiori* $\frac{1}{(n_0+1)^{x_0}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{1}{(n_0+1)^x} \leq \frac{\varepsilon}{3}$, donc :

$$|s(x)-s(x_0)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)|$$

Or la fonction $x \mapsto s_{n_0}(x)$ est continue (somme finie de fonctions continues) et il existe $\alpha > 0$ tel que $|x-x_0| \leq \alpha \implies |s_{n_0}(x)-s_{n_0}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Par conséquent, en oubliant le rôle intermédiaire de n_0 :

$$|x-x_0| \leq \alpha \implies |s(x)-s(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que s est continue au point x_0.

d) On a : $s(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)$ et $\lim_{x\to 1} s(x) = s(1)$ (on peut d'ailleurs démontrer que $s(1) = \ln 2$ mais le résultat 2. a) suffit pour affirmer que $s(1) > 0$).

Comme $\lim_{x\to 1^+} \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right) = 0$ (et $1 - \frac{1}{2^{x-1}} > 0$), il vient :

$$\lim_{x\to 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

Exercice 1.3.

1. Montrer la convergence puis faire le calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2}$.

2. À l'aide du changement de variable $x = \tan t$, $t \in]0, \pi/2[$, dont on justifiera la validité, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

3. Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, une application de classe C^1.
Montrer que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t) dt = 0$$

4. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t} dt$

a) Calculer I_0.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n$.

c) On rappelle que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$

Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1}, I_{n-1} et I_n.

d) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

Solution :

1. La fonction à intégrer est continue sur $\mathbb{R}^+$, majorée par $x \mapsto x^{-2}$, donc la règle de Riemann assure la convergence de l'intégrale.
Le changement de variable $x = \sqrt{2}\, t$ est légitime et donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2}\, dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \big[\operatorname{Arc}\tan t \big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

2. Le changement de variable $t \mapsto x = \tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissant, de $[0, \pi/2[$ sur $[0, +\infty[$, donc légitime et donne :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t} \times \frac{1}{2+\tan^2 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2\cos^2 t + \sin^2 t}$$

soit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

3. Pour $\lambda \neq 0$, on intègre par parties :

$$v'(t) = \cos(\lambda t) \Longleftarrow v(t) = \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t)$$

ce qui donne :

$$\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t)\, dt = \Big[\frac{1}{\lambda}\sin(\lambda t) f(t)\Big]_0^{\pi/2} - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\sin(\lambda t)\, dt$$

$$= \frac{1}{\lambda}\sin(\frac{\lambda\pi}{2})f(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi/2} f'(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

Donc :

$$\left|\int_0^{\pi/2} f(t)\cos(\lambda t)\,dt\right| \leq \frac{1}{\lambda}\Big(|f(\frac{\pi}{2})| + \int_0^{\pi/2} |f'(t)|\,dt\Big) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. a) $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

b) On peut appliquer le résultat de la troisième question, avec $2n$ à la place de λ et :

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

c) La formule rappelée donne :

$$\cos((2n+2)t) + \cos((2n-2)t) = 2\cos(2nt)\cos(2t)$$

soit :

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos(2nt)\cos(2t)}{1+\cos^2 t}\,dt$$

et puisque $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 2\cos^2 t + 2 - 3$:

$$I_{n+1} + I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 4\cos(2nt)\,dt - 6\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t}\,dt$$

$$\forall\, n \geq 1, I_{n+1} + I_{n-1} + 6I_n = 0$$

d) L'équation caractéristique de la relation de récurrence linéaire précédente est $r^2 + 6r + 1 = 0$, de racines $r_1 = 2\sqrt{2} - 3$ et $r_2 = -2\sqrt{2} - 3$.

Ainsi, il existe λ et μ réels tels que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

$\star$ On a $|r_1| < 1$ et $|r_2| > 1$, comme $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$, cela impose $\mu = 0$ et $I_0 = \lambda$, d'où :

$$I_n = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}(2\sqrt{2} - 3)^n$$

Exercice 1.4.

Dans tout l'exercice, a et b sont deux réels tels que $a < b$.
On se donne une fonction f de la variable réelle x, définie sur le segment $K = [a, b]$ à valeurs dans K, qui vérifie :

$$\text{pour tous } x, y \text{ de } K,\ |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|.$$

On définit alors la suite u par :

$$u_0 \in K, \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2}.$$

1. Montrer que f est continue sur K, et que la suite u est bien définie et à valeurs dans K.

2. On pose $g(x) = \dfrac{x + f(x)}{2}$. Montrer que g est continue de K dans K.

3. Montrer que g est croissante.

4. En déduire que u est monotone.

5. Montrer que u converge et que sa limite ℓ est un point fixe de f.

6. **Application numérique** : on prend $f(x) = \exp(-x)$, $K = [0, 1]$ et $u_0 = 1$. Montrer que l'étude précédente s'applique dans ce cas. Préciser le sens de variation de u, ainsi qu'un encadrement de ℓ à l'aide de la suite auxiliaire v définie par : $v_0 = 1$, et la relation de récurrence $v_{n+1} = f(v_n)$.

Solution :

1. Comme $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, la fonction f est 1-lipschitzienne, donc continue sur K.

D'autre part, si u_n appartient à K, il en est de même de $f(u_n)$, et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + f(u_n)}{2}$ est compris entre deux éléments du segment K, donc appartient encore à K. On conclut par le principe de récurrence.

2. On vient de dire que si $x \in K$, alors $\dfrac{x + f(x)}{2} \in K$ et comme f est continue, l'application g est clairement continue.

3. Soit x, y dans K tels que $x < y$. On a :

$$g(y) - g(x) = \frac{y - x}{2} + \frac{f(y) - f(x)}{2}$$

Or, $|f(y) - f(x)| \leq |y - x| = y - x$, donc $f(y) - f(x) \geq x - y$ et $g(y) - g(x) \geq 0$

$$g \text{ est croissante sur } K$$

4. La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$, et comme g est croissante :

$$\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(g(u_n) - g(u_{n-1})) = \operatorname{sgn}(u_n - u_{n-1})$$

D'où par l'argument de récurrence habituel : $\operatorname{sgn}(u_{n+1} - u_n) = \operatorname{sgn}(u_1 - u_0)$, ce qui prouve que ce signe (au sens large) ne dépend pas de n :

$$(u_n) \text{ est monotone}$$

5. (u_n) est monotone et formée de points de K, donc est bornée. Ceci prouve que cette suite converge, et si on note ℓ sa limite, la continuité de f donne, par passage à la limite :

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}, \text{ soit } \ell = f(\ell)$$

6. $\star$ La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $K = [0, 1]$, avec $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} \in [0, 1]$, donc $f(K) \subset K$.

$\star$ f est dérivable, avec $f'(x) = -e^{-x} \in [-1, -e^{-1}]$, donc $|f'(x)| \leq 1$ et l'inégalité des accroissements finis montre que f est bien 1-lipschitzienne.

$\star$ On est donc dans le cadre de cette étude et comme $u_0 = 1$, on a $u_1 \leq u_0$ et la suite (u_n) est décroissante.

$\star$ Il est facile de voir que f admet un seul point fixe (car $x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante telle que $f(0) - 0 \geq 0$ et $f(1) - 1 \leq 0$).
Comme $f \circ f$ est croissante, la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ est telle que les suites extraites (v_{2n}) et (v_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.
On a donc :

$$\forall\, n \geq 1, v_1 \leq v_n \leq v_0$$

Sur le segment $[v_1, v_0] = [e^{-1}, 1]$, la fonction f vérifie $|f'(x)| \leq e^{-e^{-1}} = \alpha < 1$ et donc à partir du rang 2, on a $|v_n - \ell| \leq \alpha |v_{n-1} - \ell|$, d'où :

$$\forall\, n \geq 1, |v_n - \ell| \leq \alpha^n |v_1 - \ell| \text{ et } \lim_{n \to \infty} v_n = \ell$$

Pour tout entier n, on a ainsi $v_{2n+1} \leq \ell \leq v_{2n}$ ce qui donne l'encadrement de ℓ voulu.

Exercice 1.5.

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs.
Pour tout $n \geq 1$, on définit le polynôme P_n par :

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k - a_0$$

1. Montrer que P_n admet une unique racine positive. On note λ_n cette racine.

2. Étudier la monotonie de la suite $(\lambda_n)_{n \geq 1}$. En déduire que cette suite admet une limite λ.

3. Dans cette question, on suppose que pour tout entier $k \geq 0$, on a : $a_k = k + 1$.

   a) Montrer que $0 \leqslant \lambda < 1$.

   b) Montrer la relation suivante :

$$(n+1)\lambda_n^{n+2} - (n+2)\lambda_n^{n+1} + 1 = 2(1 - \lambda_n)^2$$

(on pourra exprimer P_n en fonction de la dérivée de $\sum\limits_{k=0}^{n+1} x^k$.)

c) En déduire la valeur de λ.

Solution :

1. La fonction P_n est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $P_n(0) = -a_0 < 0$ et $\lim\limits_{+\infty} P_n = +\infty$.
Le théorème des valeurs intermédiaires strict montre que P_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}^+$.

2. On a $P_{n+1}(x) = P_n(x) + a_{n+1}x^{n+1}$, donc $P_{n+1}(\lambda_n) = a_{n+1}\lambda_n^{n+1} > 0$.
Comme $P_{n+1}(\lambda_{n+1}) = 0$, la stricte croissance de P_{n+1} sur $\mathbb{R}^+$ donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \lambda_{n+1} < \lambda_n$$

La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive décroissante, donc convergente.

3. a) On est bien dans le cadre de l'étude précédente et ici :

$$\begin{aligned} P_n(1) &= (n+1) + n + \cdots + 2 - 1 = (n+1) + n + \cdots + 1 - 2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 \geq 0 \text{ (dès que } n \geq 1) \end{aligned}$$

donc $0 < \lambda_n \leq 1$ et par stricte décroissance de cette suite :

$$0 \leq \lambda < 1$$

b) On a, pour tout x différent de 1 : $\sum\limits_{k=0}^{n+1} x^k = \dfrac{1 - x^{n+2}}{1-x}$ et par dérivation légitime :

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^{k-1} = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x) + 1 - x^{n+2}}{(1-x)^2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$P_n(x) + 2 = \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$$

et $P_n(\lambda_n) = 0$ s'écrit bien :

$$(n+1)\lambda_n^{n+2} - (n+2)\lambda_n^{n+1} + 1 = 2(1-\lambda_n)^2$$

c) Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda < 1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^n = 0$ et le passage à la limite dans l'expression précédente donne alors $1 = 2(1-\lambda)^2$ et puisque $\lambda < 1$:

$$\lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 1.6.

Dans tout l'exercice, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t+\sin t}\,dt$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que f est paire.

3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer la dérivée de f.

4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

5. Montrer que f admet en zéro la limite $\dfrac{\ln(2)}{2}$.
En déduire que f se prolonge par continuité en zéro. Dans la suite, on continue à noter f ce prolongement.

6. Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en zéro et préciser la valeur de $f'(0)$.

Solution :

1. Soit $\varphi : t \mapsto t + \sin t$.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\varphi'(t) = 1 + \cos t$, ainsi $\varphi'(t) \geq 0$, nulle seulement en des points isolés et φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0) = 0$.
Si $x > 0$, le segment $[x, 2x]$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et si $x < 0$, ce même segment est inclus dans $\mathbb{R}_-^*$, ainsi dans les deux cas la fonction à intégrer est continue sur le segment d'intégration et $f(x)$ est bien défini.
A priori $f(0)$ n'a pas de sens et :

$$f \text{ est définie sur } \mathbb{R}^*$$

2. Le changement de variable $u = -t$ donne pour $x \neq 0$:

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{t+\sin t} = \int_x^{2x} \frac{-du}{-u-\sin u} = \int_x^{2x} \frac{du}{u+\sin u} = f(x)$$

f est paire.

3. Si on note ψ une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t+\sin t}$, on a $f(x) = \psi(2x) - \psi(x)$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$f'(x) = 2\psi'(2x) - \psi'(x) = \frac{2}{2x+\sin(2x)} - \frac{1}{x+\sin x}$$

$$f'(x) = \frac{2\sin x - \sin(2x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin x)} = \frac{2\sin x(1-\cos x)}{(2x+\sin(2x))(x+\sin x)}$$

4. Pour $x > 1$, la fonction à intégrer est strictement positive, majorée par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$, et minorée par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t+1}$, donc :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t+1} \leq f(x) \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t-1}, \text{ soit : } \ln \frac{2x+1}{x+1} \leq f(x) \leq \ln \frac{2x-1}{x-1}$$

et, par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$$

5. Au voisinage de 0, $\sin t \sim t$, ce qui nous conduit à considérer :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln\frac{2x}{x} = \frac{\ln 2}{2}$$

et :

$$f(x) - \frac{\ln 2}{2} = \int_x^{2x} \big(\frac{1}{t+\sin t} - \frac{1}{2t}\big)dt = \int_x^{2x} \frac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)}dt$$

Or : $\dfrac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)} \underset{(0)}{\sim} \dfrac{t^3/6}{2t\times 2t} = \dfrac{t}{24}$

Donc $h : t \mapsto \dfrac{t-\sin t}{2t(t+\sin t)} = \dfrac{t}{24} + o(t)$ est prolongeable par continuité en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (encore notée h), et si on note H la primitive de h nulle en 0, on a $H(t) = \dfrac{t^2}{48} + o(t^2)$ et :

$$f(x) - \frac{\ln 2}{2} = H(2x) - H(x) = \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{48} + o(x^2) = \frac{x^2}{16} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\ln 2}{2}$$

6. Le résultat précédent donne de plus, en posant $f(0) = \dfrac{\ln 2}{2}$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{16} + o(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Donc f est dérivable en 0, avec $f'(0) = 0$.

Exercice 1.7.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx}\,dt$$

et on note $\mathcal{C}_n$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

1. Premières propriétés.

   a) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, f_n(x) > 0$. Calculer $f_n(0)$.

   b) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du.$

2. Variations de f_n.

a) Donner le développement limité d'ordre 1 de $f_n(x)$ au voisinage de 0. En déduire que f_n est continue en 0. Est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que f_n est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Donner une relation entre f_n' et f_{n+1}.

c) En déduire les variations de f_n.

d) Montrer que f_n est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. Étude en $+\infty$.

a) Montrer que : $f_0(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

b) En utilisant la relation établie en 1. b) , montrer que :

$$\forall\, n \geq 0, f_n(x) \underset{(x\to+\infty)}{\sim} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

4. Étude en $-\infty$.

a) Montrer que : $\forall\, n \geq 0, f_n(x) \underset{(x\to-\infty)}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) En déduire la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_n$, x tendant vers $-\infty$.

Solution :

1. a) La fonction à intégrer est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0,1]$, donc $f_n(x) > 0$, et $f_n(0) = \displaystyle\int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$.

b) Pour $x \neq 0$, une intégration par parties élémentaire donne :

$$f_{n+1}(x) = \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{e}^{-tx} dt = \left[-t^{n+1}\,\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x}\int_0^1 t^n \mathrm{e}^{-tx} dt$$

soit :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

c) Pour x non nul, le changement de variable $u = xt$ est légitime et donne :

$$f_n(x) = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^n \mathrm{e}^{-u}\, \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\, du$$

2. a) $\star$ On a : $u^n\mathrm{e}^{-u} = u^n(1 - u + o(u)) = u^n - u^{n+1} + o(u^{n+1})$, donc :

$$\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}\,du = \int_0^x (u^n - u^{n+1} + o(u^{n+1}))du = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} + o(x^{n+2})$$

et :

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{x}{n+2} + o(x)$$

$\star$ Comme $f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$, f_n est continue en 0 et le terme suivant du développement limité montre que f_n est dérivable en 0, avec :

$$f_n'(0) = -\frac{1}{n+2}$$

b) La formule vue en 1. c) montre que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$f_n'(x) = -\frac{n+1}{x^{n+2}}\int_0^x u^n \mathrm{e}^{-u}du + \frac{1}{x^{n+1}}\,x^n\mathrm{e}^{-x} = -\frac{n+1}{x}f_n(x) + \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

Soit :

$$f_n'(x) = -f_{n+1}(x)$$

c) Comme f_{n+1} est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ ...

d) ... et puisque $f_n'' = -f_{n+1}' = f_{n+2}$, la fonction f_n'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et f_n est (strictement) convexe.

3. a) Pour $x \neq 0$, $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_0(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

b) On suppose que pour un certain rang n, on a $f_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{n!}{x^{n+1}}$, alors comme

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x}\,f_n(x) - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

et comme e^{-x} est négligeable devant toute puissance de x, au voisinage de $+\infty$, le deuxième terme est négligeable devant le premier, ce qui donne :

$$f_{n+1}(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{(n+1)n!}{x.x^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$$

La propriété énoncée étant vraie au rang 0 (résultat a)), on conclut par le principe de récurrence.

4. a) $\star$ Clairement $f_0(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

$\star$ On suppose que pour un certain rang n, $f_n(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$, comme $\dfrac{1}{x^2} = o(\dfrac{1}{x})$, la relation $f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x}\,f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ montre alors que $f_{n+1}(x) \underset{(-\infty)}{\sim} -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et on conclut encore par le principe de récurrence.

b) Ainsi $\mathcal{C}_n$ présente, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique de direction Oy.

Exercice 1.8.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0, avec $u_0 > 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \geq 0, u_{n+1} = u_n + u_n^2$$

1. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Pour $n \geq 0$ on pose : $v_n = \dfrac{1}{2^n}\ln(u_n)$.

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'à partir d'un certain rang (que l'on ne cherchera pas à préciser), on a :

$$v_{n+1} \leq v_n + \frac{1}{2^{n+1}}$$

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

On note α la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on ne cherchera pas à calculer α.

3. a) Montrer que pour tout $x > -1$, on a : $\ln(1 + x) \leq x$.

b) En déduire que pour n et p dans $\mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{2^n u_n}$$

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} [2^n\alpha - \ln(u_n)] = 0$, et en déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que la série de terme général $w_n = \dfrac{1}{2^n u_n}$ converge.

Solution :

1. On a $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$, donc la suite (u_n) est croissante. Si elle convergeait, sa limite ℓ vérifierait $\ell = \ell + \ell^2$, soit $\ell = 0$, ce qui n'est pas raisonnable pour une suite croissante de premier terme strictement positif. Donc (u_n) ne converge pas et comme elle croît :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$$

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(u_n(1+u_n)) - \frac{1}{2^n}\ln(u_n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\ln\frac{1+u_n}{u_n} = \frac{1}{2^{n+1}}\ln(1+\frac{1}{u_n}) > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est croissante et comme $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1+\frac{1}{u_n}) = 0 < 1$, à partir d'un certain rang, on a bien :

$$0 \leq v_{n+1} - v_n < \frac{1}{2^{n+1}}$$

b) Ainsi la **série** de terme général positif $v_{n+1} - v_n$ est convergente (règle de majoration), ce qui signifie exactement que la **suite** (v_n) converge.

3. a) Cette inégalité est classique et résulte, par exemple, de la concavité de la fonc-tion ln.

b) On a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2^{n+1}} \ln(1+\frac{1}{u_n}) \leq \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+2} - v_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} \ln(1+\frac{1}{u_{n+1}}) \leq \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+2}} \times \frac{1}{u_n}$$

et, ainsi de suite, jusqu'à :

$$v_{n+p} - v_{n+p-1} = \frac{1}{2^{n+p}} \ln(1+\frac{1}{u_{n+p-1}}) \leq \frac{1}{2^{n+p}} \times \frac{1}{u_{n+p-1}} \leq \frac{1}{2^{n+p}} \times \frac{1}{u_n}$$

íl vient alors, par sommation télescopique :

$$v_{n+p} - v_n \leq \frac{1}{u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n u_n} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^n u_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n u_n}$$

et comme la suite (v_n) est croissante, on a bien $0 \leq v_{n+p} - v_n$.

c) Comme $v_n = \frac{1}{2^n u_n}$, la relation précédente s'écrit aussi, pour n fixé et p quelconque :

$$0 \leq 2^n v_{n+p} - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}$$

et par prolongement des inégalités à la limite, lorsque p tend vers l'infini :

$$2^n\alpha - \ln(u_n) \leq \frac{1}{u_n}$$

et, par encadrement : $\lim\limits_{n\to\infty} \big(2^n\alpha - \ln(u_n)\big) = 0$, *i.e.* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} = 1$, ou encore :

$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} e^{2^n\alpha}$$

4. On a $0 \leq w_n \leq \frac{1}{2^n u_0}$, donc la série de terme général w_n converge.

Exercice 1.9.

Une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes réelles est définie par la donnée de $P_0 : x \mapsto x$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, P_{n+1}(x) = (n+1)\int_0^x P_n(t)dt + x(1-(n+1)\int_0^1 P_n(t)\,dt)$$

1. Déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4.

2. Montrer que, pour tout n, P_n est l'unique fonction polynôme vérifiant les deux conditions :

$$P_n(0) = 0, \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}, P_n(x) - P_n(x-1) = x^n$$

(Pour la suite donnée dans l'énoncé, on calculera $P_{n+1}(0), P_{n+1}(1)$ et on calculera $P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1)$)

On note encore P_n le polynôme associé à la fonction polynôme P_n.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme P_n est divisible par $X(X+1)$. Factoriser les polynômes P_1, P_2 et P_3.

4. Montrer que le polynôme P_n est de degré $n+1$; calculer son coefficient dominant, ainsi que le coefficient du terme en X^n.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $P_n(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} k^n$.

Solution :

1. $\star$ $P_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\,dt + x(1 - \int_0^1 t\,dt) = \frac{x^2}{2} + x(1 - \frac{1}{2}) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$;

$\star$ $P_2(x) = 2\displaystyle\int_0^x (\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2})\,dt + x(1 - 2\int_0^1 (\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2})\,dt) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}$

et des calculs similaires donnent :

$$P_3(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4}\ ;\ P_4(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30}$$

2. $\star$ Supposons qu'il existe deux fonctions polynômes P_n et Q_n telles que :

$$P_n(0) = Q_n(0) \text{ et } \forall\, x, P_n(x) - P_n(x-1) = x^n = Q_n(x) - Q_n(x-1)$$

Alors $P_n(1) = Q_n(1)$, puis $P_n(2) = Q_n(2)$, etc. et le polynôme $P_n - Q_n$ est nul en tout point de $\mathbb{N}$, donc admet une infinité de racines et est le polynôme nul, ce qui prouve que $P_n = Q_n$.

$\star$ La suite de polynômes définie dans la question 1. vérifie :
$\rightarrow$ $P_0(0) = 0$ et pour $n \geq 0, P_{n+1}(0) = 0, P_{n+1}(1) = 1$;
$\rightarrow$ $P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + 1 - (n+1)\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\,dt$, donc :

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1) = (n+1)(P_n(x) - P_n(x-1))$$

Si on suppose que pour un certain rang n, on a $P_n(x) - P_n(x-1) = x^n$, on a donc :

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n+1}(x-1) = (n+1)x^n$$

Ainsi, en « primitivant » : $P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x-1) = x^{n+1} + K$ et la valeur en 1 donne $K = 0$, soit : $P_{n+1}(x) - P_{n+1}(x-1) = x^{n+1}$.
On a donc le résultat voulu au rang $n+1$ et on conclut par le principe de récurrence.

3. Pour $n \geq 1$, on a déjà vu que $P_n(0) = 0$ et comme $P_n(0) - P_n(-1) = 0^n = 0$, on a aussi $P_n(-1) = 0$ et P_n est divisible par X et $X+1$, donc par $X(X+1)$.

On trouve alors facilement :

$$P_1 = \frac{1}{2}X(X+1),\ P_2 = \frac{1}{6}X(X+1)(2X+1),\ P_3 = \frac{1}{4}[X(X+1)]^2$$

4. La considération des premiers termes laisse à penser que P_n est de la forme :

$$P_n = \frac{1}{n+1}\,X^{n+1} + \frac{1}{2}\,X^n + \cdots$$

Cette propriété est vraie au rang 1 et si on suppose qu'elle est vraie à un certain rang $n \geq 1$, alors :

$$P_{n+1}(x) = (n+1)\int_0^x \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} + \frac{t^n}{2} + \cdots\right) dt + \alpha x$$ (la valeur de α est sans importance), soit :

$$P_{n+1}(x) = \frac{x^{n+2}}{n+2} + \frac{x^{n+1}}{2} + \cdots$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n+1$. On conclut par le principe de récurrence.

5. On a $P_n(0) = 0$, $P_n(1) - P_n(0) = 1^n$, $P_n(2) - P_n(1) = 2^n$, et ainsi de suite.

On obtient donc, par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{p} k^n = \sum_{k=1}^{n} [P_n(k) - P_n(k-1)] = P_n(p)$$

Exercice 1.10.

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et périodiques, $T = 1$ étant une période de f.

Soit Θ l'application définie sur E, par :

$$\text{pour tout } f \text{ de } E, \text{ et tout } x \text{ de } \mathbb{R},\ \Theta(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

1. a) Montrer que Θ est une application linéaire.

b) L'application Θ est-elle un endomorphisme de E ? Est-elle surjective ?

2. Montrer que $\operatorname{Ker}\Theta = \left\{f \in E \;/ \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$

3. Calculer pour x réel, $\displaystyle\int_x^{x+1} |\sin(\pi t)|dt$

4. Soit $f \in E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $x \in [n, n+1]$, on pose : $\varphi_n(x) = \displaystyle\int_n^x f(t)dt$,

et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}dt$.

a) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{\varphi_0(1)}{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\,dt$.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge si et seulement si $f \in \operatorname{Ker}\Theta$.

Solution :

1. a) Si f, g sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et λ un scalaire, on a, pour tout x :

$$\begin{aligned}\Theta(f+\lambda g)(x) &= \int_x^{x+1} (f(t)+\lambda g(t))\,dt = \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \lambda \int_x^{x+1} g(t)\,dt \\ &= \Theta(f)(x) + \lambda\Theta(g)(x)\end{aligned}$$

Donc Θ est linéaire.

b) $\star$ Pour $f \in E$, l'application $\Theta(f)$ est clairement continue (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

$\star$ Pour $f \in E$, on a pour tout x, par périodicité de f :

$$[\Theta(f)]'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$$

Donc $\Theta(f)$ est une fonction constante, qui est bien périodique et 1 est une période. Donc Θ est un endomorphisme de E.

$\star$ Θ n'est pas surjective, car il existe des fonctions continues, périodiques, 1 étant période et qui ne sont pas constantes.

2. $\star$ Si $f \in \operatorname{Ker}\Theta$, alors on a $\Theta(f)(0) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

$\star$ Réciproquement, si $\Theta(f)(0) = 0$, alors comme $\Theta(f)$ est constante, $\Theta(f)$ est la fonction nulle.

$$\operatorname{Ker}\Theta = \left\{f \in E \;/ \int_0^1 f(t)\,dt = 0\right\}$$

3. Il suffit de faire le calcul en 0, donc :

$$\int_x^{x+1} |\sin(\pi t)| dt = \int_0^1 |\sin(\pi t)| dt = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi}$$

4. a) φ_n est la primitive de f sur $[n, n+1]$ qui est nulle en n, donc en intégrant par parties :

$$w_n = \Big[\frac{\varphi_n(t)}{t}\Big]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\, dt = \frac{\varphi_n(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\, dt$$

Mais $\Theta(f)$ est constante, donc $\varphi_n(n+1) = \varphi_0(1)$ et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ w_n = \frac{\varphi_0(1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\, dt$$

b) Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$, M est majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, x \in [n, n+1], |\varphi_n(x)| \leq M$ et donc :

$$\Big|\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}\, dt\Big| \leq M \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{M}{n^2}$$

Ainsi la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2}$ est (absolument) convergente et la série de terme général w_n converge si et seulement si la série de terme général $\dfrac{\varphi_0(1)}{n+1}$ converge, ce qui se produit si et seulement si $\varphi_0(1) = 0$, donc si et seulement si $f \in \operatorname{Ker} \Theta$.

Exercice 1.11.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que $\forall\, x \in [a,b], f''(x) > 0$.
On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions affines ℓ sur $[a,b]$ telles que

$$\forall\, x \in [a,b], \ell(x) \leqslant f(x)$$

On cherche $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\, dx$ soit minimal.

1. Montrer que l'ensemble A défini par $A = \Big\{\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\, dx,\ \ell \in \mathcal{L}\Big\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ non vide et minoré.
En déduire l'existence de $\inf(A)$.

2. Soit $\ell \in \mathcal{L}$ telle que $\ell(x) < f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Montrer alors que

$$\int_a^b \big(f(x) - \ell(x)\big)\, dx > \inf(A)$$

3. Montrer que le problème revient à maximiser la fonction g définie sur $[a, b]$ par :

$$g(c) = f'(c)\big(\frac{a+b}{2}\big) + f(c) - cf'(c)$$

où f' désigne la dérivée de f.

4. Conclure.

Solution :

1. A est bien un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ contenant le nombre $\displaystyle\int_a^b (f(x) - m)\, dx$, où m désigne le *minimum* de la fonction f (continue) sur le segment $[a, b]$. De plus, comme pour tout $\ell \in \mathcal{L}$, on a $\ell \leqslant f$, A est minoré par 0 (positivité de l'intégrale). D'où l'existence de $\inf A$.

2. Désignons par α le *minimum* (strictement positif) de la fonction (continue) $f - \ell$ sur le segment $[a, b]$. On pose alors pour tout $x \in [a, b]$, $\widetilde{\ell}(x) = \ell(x) + \alpha$. Ainsi $\widetilde{\ell} \in \mathcal{L}$ et :

$$\int_a^b (f-\ell)(x)\, dx = \int_a^b [(f-\widetilde{\ell})(x) + \alpha(b-a)]\, dx$$

$$\int_a^b (f-\ell)(x)\, dx \geq \inf(A) + \alpha(b-a) > \inf(A)$$

3. Nous pouvons restreindre notre recherche aux fonctions affines $\ell \in \mathcal{L}$ telles qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $\ell(x) = f(x)$: la fonction f étant convexe, le graphe de l sera tangent au graphe de f.
On cherche donc ℓ_c ($c \in [a, b]$) sous la forme $\ell_c(x) = f'(c)(x - c) + f(c)$ tel que $\displaystyle\int_a^b (f - ell_c)(x)\, dx$ soit minimal.
Or

$$\begin{aligned}\int_a^b (f-\ell_c)(x)\, dx &= \int_a^b f(x)\, dx - f'(c)\big(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} - c(b-a)\big) - f(c)(b-a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx - (b-a)\big(f'(c)(\frac{a+b}{2} - c) + f(c)\big)\end{aligned}$$

Minimiser $\displaystyle\int_a^b (f-\ell_c)(x)\, dx$, c'est donc maximiser $f'(c)\big(\frac{a+b}{2} - c\big) + f(c)$.

4. Faisons une étude des variations de g :

$$g'(c) = f''(c)\big(\frac{a+b}{2} - c\big).$$

Donc g admet un *maximum* pour $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Il existe donc une unique fonction ℓ qui répond au problème :

$$\ell(x) = f'\big(\frac{a+b}{2}\big)(x - \frac{a+b}{2}) + f\big(\frac{a+b}{2}\big)$$

Exercice 1.12.

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, on note respectivement φ et Φ, une densité et la fonction de répartition de X.

1. Pour x réel strictement positif, on considère l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$.

a) Vérifier la convergence de l'intégrale précédente.

b) Exprimer, pour x réel strictement positif, $1 - \Phi(x)$ en fonction de $I(x)$ et $\varphi(x)$.

c) Montrer que pour $x > 0$, on a :

$$1 - \frac{1}{x^2} \leq \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leq 1$$

d) En déduire un équivalent simple de $1 - \Phi(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}[1 - \Phi(1 + \sqrt{x})]\,dx$ est convergente et calculer sa valeur en fonction de $\Phi(1)$.

Solution :

1. a) Pour tout $t > 1$, $\big|\dfrac{\varphi(t)}{t^2}\big| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, ce qui entraîne l'existence de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

b) Une intégration par parties donne pour $A > 0$:

$$\int_x^A \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt = \Big[\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A + \int_x^A \frac{\varphi'(t)}{t}\,dt = \Big[\frac{\varphi(t)}{t}\Big]_x^A + \Phi(x) - \Phi(A)$$

Donc, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$, pour $x > 0$:

$$1 - \Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt$$

c) Par positivité de la fonction $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{x^2}$, on a $1 - \Phi(x) \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{x}$, donc

$$\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \leqslant 1$$

D'autre part $\dfrac{\varphi(t)}{t^2} = \dfrac{t\varphi(t)}{t^3}$ entraîne que :

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt \leqslant \frac{1}{x^3}\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\, dt$$

Par suite $1-\Phi(x) \geq \dfrac{\varphi(x)}{x} - \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\, dt$, et :

$$\frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} \geq 1 - \frac{1}{x^2}\times\frac{1}{\varphi(x)}\times\int_x^{+\infty} t\varphi(t)\, dt = 1 - \frac{1}{x^2}$$

(en effet $\displaystyle\int_x^{+\infty} t\,\varphi(t)\, dt = \big[-\varphi(t)\big]_x^{\to+\infty} = \varphi(x)$)

d) Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-\Phi(x))}{\varphi(x)} = 1$, il vient, au voisinage de $+\infty$:

$$1-\Phi(x) \sim \frac{\varphi(x)}{x}$$

2. La fonction considérée est continue sur tout segment $[0, A]$. Lorsque x tend vers $+\infty$, on a :

$$1-\Phi(\sqrt{x}+1) \sim \frac{\varphi(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\times\mathrm{e}^{-x/2}\times\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

D'où :

$$\mathrm{e}^{x/2}\big[1-\Phi(\sqrt{x}+1)\big] \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathrm{e}}}\times\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = o(x^{-2})$$

Le calcul de l'intégrale se fait à l'aide d'une intégration par parties sur $[0, A]$, en posant $u(x) = 1-\Phi(\sqrt{x}+1)$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{x/2}$. Ce qui donne, en prenant la limite lorsque A tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{x/2}[1-\Phi(\sqrt{x}+1)]\, dx = 2(\Phi(1)-1) + \sqrt{\frac{2}{\pi\mathrm{e}}}$$

Exercice 1.13.

On cherche à calculer $\mu = \displaystyle\min_{(x,y)\in[-1,1]^2} \varphi(x,y)$, où :

$$\forall (x,y)\in[-1,1]^2, \varphi(x,y) = \int_{-1}^{1} |t-x|.|t-y|\, dt$$

1. a) Montrer que φ est une fonction continue sur $C = [-1,1]^2$.

(On ne cherchera pas à calculer $\varphi(x,y)$, mais on majorera $|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|$, pour (x,y) et (x_0,y_0) dans C.)

b) En déduire l'existence de μ.

2. Soit $T=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/-1\leq x\leq y\leq 1\}$. Montrer que :

$$\forall (x,y)\in T, \varphi(x,y)=-\frac{1}{3}(x-y)^3+\frac{2}{3}+2xy$$

3. Montrer que la fonction φ admet un *minimum* sur T et que celui-ci est atteint à l'intérieur de T.

4. Déterminer μ, ainsi que l'ensemble des points où μ est atteint.

Solution :

1. a) Soit $(x_0,y_0)\in[-1,1]^2$. On majore :

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)| &= \Big|\int_{-1}^{1}(|t-x||t-y|-|t-x_0||t-y_0|)dt\Big|\\ &\leqslant \int_{-1}^{1}\big||t-x||t-y|-|t-x_0||t-y_0|\big|\,dt\\ &\leqslant \int_{-1}^{1}|(t-x)(t-y)-(t-x_0)(t-y_0)|\,dt\\ &\leqslant \int_{-1}^{1}|t(x_0+y_0-x-y)+xy-x_0y_0|\,dt\end{aligned}$$

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|\leqslant 2|(x_0+y_0-x-y)|+2|xy-x_0y_0|$$

Le majorant étant clairement de limite nulle lorsque (x,y) tend vers (x_0,y_0), on en déduit la continuité de φ au point (x_0,y_0).

b) Toute fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes : ceci justifie l'existence de μ.

2. En gérant le signe, on écrit

$$\varphi(x,y)=\int_{-1}^{x}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt-\int_{x}^{y}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt + \int_{y}^{1}(t^2-(x+y)t+xy)\,dt$$

En notant $f(t)=\dfrac{t^3}{3}-(x+y)\dfrac{t^2}{2}+xyt$, il vient :
$\varphi(x,y)=2f(x)-2f(y)+f(1)-f(-1)$, soit :

$$\varphi(x,y) = -\frac{1}{3}(x-y)^3 + 2xy + \frac{2}{3}$$

3. La fonction φ est continue sur T qui est fermé, borné. Elle atteint son *minimum* sur T. Ce *minimum* est atteint à l'intérieur de T, puisque :

$\rightarrow \forall\, x \in [-1,1], \varphi(x,x) \geq \frac{2}{3}$,

$\rightarrow \varphi(-1,x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 + \frac{2}{3} - 2x$, et une étude rapide de cette fonction montre que : pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(-1,x) \geq \frac{8-4\sqrt{2}}{3} > \frac{1}{2}$.

$\rightarrow$ De même, pour tout $x \in [-1,1]$, $\varphi(1,x) \geq \frac{8-4\sqrt{2}}{3}$.

$\rightarrow$ Or $\varphi(-1/2, 1/2) = 1/2$; donc le *minimum* de φ est atteint à l'intérieur de T, donc en un point critique puisque la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Déterminons les points critiques de φ. Ils sont solutions du système :

$$\begin{cases} -(x-y)^2 + 2y = 0 \\ (x-y)^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $x_0 = -y_0 = -\frac{1}{2}$, et $\varphi(x_0,y_0) = \varphi(y_0,x_0) = \frac{1}{2}$.

Ainsi l'unique point critique est le point où f atteint son *minimum*.

Exercice 1.14.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction F_a de la variable réelle x définie par :

$$F_a(x) = \int_a^x e^{t^2}\,dt$$

Étudier la fonction F_a et montrer qu'elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction f sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = 1$$

3. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et montrer que $\forall\, x \geq 0$, on a $0 < f'(x) < 1$, où f' désigne la dérivée de f..

5. Montrer que le graphe de f, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, est symétrique par rapport à la deuxième bissectrice (*i.e.* par rapport à la droite d'équation $y = -x$).

6. Montrer l'existence d'un point d'inflexion d'abscisse positive sur le graphe de f.

Solution :

1. La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathbb{R}$, $F_a(x) = \displaystyle\int_a^x e^{t^2}\,dt$ est sa primitive qui s'annule en a.

La fonction F_a est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ($F_a^{'}(x) = e^{x^2} > 0$). Clairement :

$$F_a(a) = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} F_a(x) = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} F_a(x) = +\infty.$$

F_a est donc une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit a réel quelconque. On a montré que F_a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, il existe donc un seul réel b tel que $\displaystyle\int_a^b e^{t^2}\,dt = 1$. On définit ainsi le réel $f(a)$.

3. On a, par la relation de Chasles :

$$\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = \int_x^y e^{t^2}\,dt + \int_y^{f(y)} e^{t^2}\,dt + \int_{f(y)}^{f(x)} e^{t^2}\,dt$$

Or : $\displaystyle\int_x^{f(x)} e^{t^2}\,dt = \int_y^{f(y)} e^{t^2}\,dt = 1$. D'où :

$$\int_{f(x)}^{f(y)} e^{t^2}\,dt = \int_x^y e^{t^2}\,dt$$

L'inégalité $x < y$ entraîne que $\displaystyle\int_x^y e^{t^2}\,dt > 0$, d'où $\displaystyle\int_{f(x)}^{f(y)} e^{t^2}\,dt > 0$ et $f(x) < f(y)$ (car $t \mapsto e^{t^2} > 0$), d'où la croissance stricte de f sur $\mathbb{R}$.

4. Soit a un réel, $\forall x \in \mathbb{R}, F_a(f(x)) - F_a(x) = 1$ donne $f(x) = F_a^{-1}(1 + F_a(x))$. F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même de la bijection réciproque F_a^{-1} (car F'_a ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$) et on a : $(F_a^{-1})'(y) = \dfrac{1}{F'_a[F_a^{-1}(y)]}$, d'où :

$$f'(x) = \frac{1}{F'_a[F_a^{-1}(1 + F_a(x))]} F'_a(x) = \frac{F'_a(x)}{F'_a(f(x))} = e^{x^2 - f^2(x)} > 0$$

et $\forall x, x < f(x) \Rightarrow \forall x \geq 0,\ x^2 - f^2(x) < 0$, ce qui entraîne que :

$$\forall x \geq 0,\ 0 < f'(x) < 1.$$

5. Si $M(x, y)$ est un point du graphe, alors la symétrie par rapport à la deuxième bissectrice se traduit par le fait que le point $M'(-y, -x)$ est aussi un point du graphe.
Il faut donc vérifier : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-f(x)) = -x$.
Or
$$\int_{-f(x)}^{-x} e^{t^2} dt = \int_{f(x)}^{x} e^{u^2}(-du) = \int_{x}^{f(x)} e^{u^2} du = 1 \implies f(f(-x)) = -x$$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{x^2 - f^2(x)}$, donc f est de classe C^2 et
$$f''(x) = 2[x - f(x)f'(x)]f'(x).$$

- $f(0) > 0,\ f'(0) > 0 \Rightarrow f^{''}(0) < 0,$
- Si f'' reste négative sur $\mathbb{R}^+$, f est alors concave et il en est de même de $g(x) = f(x) - x$. Donc $\forall x > 0; 0 < f'(x) < 1 \Rightarrow \forall x > 0, g'(x) < 0$, ce qui entraîne que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ ce qui est absurde car $g > 0$. Donc
$$\exists x > 0, f''(x) > 0.$$
- f'' étant continue sur $\mathbb{R}^+$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel positif tel que : $f''(x) = 0$, c'est-à-dire d'un point d'inflexion.

Exercice 1.15.

Sous réserve d'existence, on pose :
$$f(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x + \cos t}\, dt \quad ; \quad g(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

1. Etude de g :

a) Quel est le domaine de définition de g ? Calculer sa dérivée et donner son tableau des variations.

b) Esquisser le graphe de g.

2. Etude de f :

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Quel est son sens de variation ?

c) On rappelle que $1 + \cos t = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Calculer $f(1)$.

d) Etudier le comportement de f quand x tend vers $+\infty$.

3. Etude de f au voisinage de $x = 1$

a) Soit h un réel strictement positif.

Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ pour exprimer l'intégrale :

$$I(h) = \int_0^\pi \frac{\sin(\frac{t}{2})}{\sqrt{h + 2\cos^2(\frac{t}{2})}}\,dt$$

à l'aide des fonctions usuelles.

b) Justifier les inégalités :

$$\forall x > 1, \frac{1}{2\sqrt{x+\cos t}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t}}{x-1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+\cos t}}$$

c) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$.

Solution :

1\. a) Pour tout x, on constate que $\sqrt{1+x^2} > |x|$, donc $x + \sqrt{1+x^2} > x + |x|$ et $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, d'où : $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

Puis :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La dérivée g' est paire et $g(0) = 0$, on en déduit que g est impaire, ce qui peut se voir directement en remarquant que $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = \sqrt{1+x^2} + x$.

On a $x + \sqrt{1+x^2} \underset{(+\infty)}{\sim} 2x$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +0$

b) La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. La représentation graphique se fait sans peine...

2\. a) Quand t décrit $[0,\pi]$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$ et $x + \cos t$ reste toujours positif si et seulement si $x \geq 1$.
Donc, $\forall x \in [1,+\infty[\,,\ t \mapsto \sqrt{x+\cos t}$ est définie mais aussi continue sur $[0,\pi]$.
Son intégrale existe donc. et $\mathcal{D}_f = [1,+\infty[$.

b) Soient x et y tels que $1 \leqslant x \leqslant y$. La fonction racine étant croissante on a $\forall t \in [0,\pi]\,,\ \sqrt{x+\cos t} \leqslant \sqrt{y+\cos t}$. L'intégration sur $[0,\pi]$ conserve aussi l'inégalité et $f(x) \leqslant f(y)$.

$$f \text{ est croissante sur } [1,+\infty[$$

c) Il vient $f(1) = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+\cos t}\,dt = \int_0^\pi \sqrt{2\cos^2(t/2)}\,dt = \sqrt{2}\int_0^\pi \cos(t/2)dt$,
parce que $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \implies \cos\frac{t}{2} \geq 0$.

Donc :

$$f(1) = \sqrt{2}\big[2\sin(t/2)\big]_0^{\pi} = 2\sqrt{2}$$

d) $\forall\, x \in [1, +\infty[, \forall\, t \in [0, \pi]$, $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{x + \cos t} \leqslant \sqrt{x+1}$.

On en déduit par intégration sur $[0, \pi]$ que $\pi\sqrt{x-1} \leqslant f(x) \leqslant \pi\sqrt{x+1}$.

En particulier :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

3. a) Le changement de variable $u = \sqrt{2}\cos(t/2)$ donne $du = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t/2)$, et :

$$I(h) = \int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{h + 2\cos^2\frac{t}{2}}}\, dt = -\frac{2}{\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{0} \frac{du}{\sqrt{h+u^2}} = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{h}\sqrt{1 + (\frac{u}{\sqrt{h}})^2}}.$$

Posons $X = \frac{u}{\sqrt{h}}$. Alors :

$$I(h) = \sqrt{2}\int_0^{\sqrt{\frac{2}{h}}} \frac{dX}{\sqrt{1+X^2}} = \sqrt{2}\Big[\ln(X + \sqrt{1+X^2})\Big]_0^{\sqrt{\frac{2}{h}}}$$

$$I(h) = \sqrt{2}\big(\ln(\sqrt{\frac{2}{h}} + \sqrt{1 + \frac{2}{h}})\big)$$

b) En multipliant par la quantité conjuguée $\sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t}$, on obtient :

$$\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t} = \frac{x-1}{\sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t}}.$$

On a $x > 1$; donc $x + \cos t > 1 + \cos t$ et par croissance de la fonction racine : $\sqrt{x+\cos t} > \sqrt{1+\cos t}$, puis

$$2\sqrt{x+\cos t} > \sqrt{x+\cos t} + \sqrt{1+\cos t} > 2\sqrt{1+\cos t}.$$

Il nous reste à passer à l'inverse et à diviser par $x - 1 > 0$:

$$\forall\, x > 1, \frac{1}{2\sqrt{x+\cos t}} \leqslant \frac{\sqrt{x+\cos t} - \sqrt{1+\cos t}}{x-1} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1+\cos t}}.$$

c) Pour x voisin de 1, posons $x = 1 + h$, où $h \to 0$.

Il vient $x + \cos t = h + 2\cos^2\frac{t}{2}$. En intégrant les deux membres de la première des deux inégalités précédentes il vient :

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{2\sqrt{h + 2\cos^2(t/2)}} \leqslant \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$$

Remarquons que $\forall\, t \in [0, \pi]$, $\sin\frac{t}{2} \leqslant 1$. On a donc :

$$\frac{1}{2}I(h) \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dt}{2\sqrt{h+2\cos^2(t/2)}} \leqslant \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

D'après l'expression trouvée en 3. a), on a : $\lim\limits_{h\to 0} I(h) = +\infty$, d'où :

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$$

Ce qui veut dire que f n'est pas dérivable en 1, la représentation graphique admettant au point $(1, 2\sqrt{2})$ une demi-tangente verticale.

Exercice 1.16.

On note E l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $[0,1]$ telles que l'on ait de plus $f(0) = f(1) = 0$.

Soit f un élément de E.

1. Montrer que $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{\sin(\pi x)}$ est prolongeable par continuité en 0 et en 1.

2. Montrer que l'intégrale $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x)f'(x)\,dx$ est convergente.

3. Montrer que $I(f) = \dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sin^2 \pi x}\,dx$.

4. En déduire que

$$\int_0^1 f'^2(x)\,dx \geq \pi^2 \int_0^1 f^2(x)\,dx$$

5. Déterminer les fonctions f de E pour lesquelles l'inégalité précédente est une égalité.

Solution :

1. Au voisinage de 0, $g(x) \sim \dfrac{f(x)}{\pi x}$. Or $f(0) = 0$ et f dérivable entraînent que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\pi x} = \frac{1}{\pi} \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f'(0)}{\pi}.$$

De même $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = -\dfrac{f'(1)}{\pi}$.

2. Posons $h(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} f(x)f'(x)$, on a $h(x) = g(x)\cos(\pi x)f'(x)$, qui est le produit de trois fonctions continues sur $]0,1[$ et est prolongeable par continuité en 0 et en 1. L'intégrale proposée existe donc.

3. Soit $0 < \varepsilon < a < 1$. Effectuons une intégration par parties, il vient :

$$\int_\varepsilon^a \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \times f(x)f'(x)\,dx = \left[\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \times \frac{f^2(x)}{2}\right]_\varepsilon^a + \frac{\pi}{2}\int_\varepsilon^a \frac{1}{\sin^2(\pi x)}\,f^2(x)\,dx$$

et, par passage à la limite :

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{f^2(x)}{\sin^2(\pi x)}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^1 g^2(x)\,dx$$

4. On sait, par positivité de l'intégrale que $\displaystyle\int_0^1 \big(\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}f(x) - f'(x)\big)^2 dx \geq 0$.

En développant cette dernière expression, il vient

$$\int_0^1 \big(\frac{\pi^2\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}f^2(x) - 2\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}f(x)f'(x) + f'^2(x)\big)\,dx \geq 0$$

et, en utilisant la question précédente :

$$\int_0^1 f'^2(x)\,dx \geq \int_0^1 \big(-\frac{\pi^2\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}f^2(x) + \pi^2\frac{f^2(x)}{\sin^2(\pi x)}\big)dx$$

Donc :

$$\int_0^1 f'^2(x)dx \geq \int_0^1 \pi^2 f^2(x)\frac{1-\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}\,dx = \pi^2\int_0^1 f^2(x)\,dx$$

5. Par continuité de la fonction considérée, cette inégalité est une égalité si et seulement si $\big(\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}f(x) - f'(x)\big)^2$ est la fonction nulle, soit :

$$f'(x) = f(x)\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} \text{ ou encore } \frac{d}{dx}\big(\frac{f(x)}{\sin(\pi x)}\big) = 0$$

Soit :

$$f(x) = \lambda\sin(\pi x), \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 1.17.

Soit α un réel tel que $\alpha > 1$. On pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}dx$$

1. Vérifier l'existence de $\Gamma(\alpha)$.

2. On pose $S(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha}$

Montrer que : $\Gamma(\alpha)S(\alpha) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\,t^{\alpha-1}dt.$

3. Pour k entier naturel, on pose, sous réserve de convergence :

$$I(k) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)t}\,\frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt$$

a) Montrer que l'intégrale $I(k)$ est bien convergente.

b) En partageant l'intervalle d'intégration en deux, à l'aide de la borne intermédiaire $\dfrac{1}{\sqrt{k}}$, montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} I(k) = 0$.

4. Pour $k \geq 1$, montrer que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt = \sum_{n=0}^{k-1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\,t^{\alpha-1}dt + I(k)$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$ et $S(\alpha)$.

Solution :

1. Comme $\alpha > 1$, la fonction $h : t \to x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Au voisinage de $+\infty$, on sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2h(t) = 0$, ce qui assure l'existence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)\,dt$ donc aussi de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt$.

2. La série définissant $S(\alpha)$ est convergente puisque $\alpha > 1$. On a :

$$\Gamma(\alpha)\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^\alpha} = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)^\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}dt = \sum_{n=0}^{N} I_n$$

avec, par le changement de variable $t = (n+1)u$:

$$I_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+1)u}\,du$$

Donc, en faisant tendre N vers l'infini :

$$\Gamma(\alpha)S(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+1)u}\,du$$

3. a) La fonction $f_k : t \mapsto \mathrm{e}^{-(k+1)t}\dfrac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\star$ Au voisinage de 0, on a $1-\mathrm{e}^{-t} \sim t$, donc $f_k(t)$ est équivalent à $t^{\alpha-2}$ et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-2}\,dt$ converge puisque $\alpha > 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,dt$ converge.

$\star$ On a : $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f_k(t) = 0$, ce qui assure l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_k(t)\,dt$.

l'intégrale définissant $I(k)$ est bien convergente

b) Posons $I_k = L_k + J_k$, avec :

$$L_k = \int_0^{1/\sqrt{k}} f_k(t)\,dt, \text{ et } J_k = \int_{1/\sqrt{k}}^{+\infty} f_k(t)\,dt$$

• Pour $t \geq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, on a $\mathrm{e}^{-kt} \leq \mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$, et :

$$0 \leqslant J_k \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \int_{1/\sqrt{k}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt \leqslant \mathrm{e}^{-\sqrt{k}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt = C.\mathrm{e}^{-\sqrt{k}}$$

Donc $\lim\limits_{k\to+\infty} J_k = 0$.

• En ce qui concerne L_k, on sait que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leqslant f_k(t) \leqslant \mathrm{e}^{-t} \dfrac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt$ est convergente, il vient $\lim\limits_{k\to+\infty} L_k = 0$.

$$\lim_{k\to\infty} I(k) = 0$$

4. On sait que, pour $t > 0$:

$$\sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$$

Ceci permet d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{k-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t} t^{\alpha-1} dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k+1)t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}} dt$$

Soit, en faisant tendre k vers l'infini :

$$\Gamma(\alpha) S(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{t^{\alpha-1}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,dt$$

Exercice 1.18.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{1/n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$.

1. On suppose dans cette question que $\lambda < 1$.

Montrer qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leqslant \alpha^n$.

En déduire la nature de la série de terme général u_n.

2. On suppose dans cette question que $\lambda > 1$. Montrer que la série $\sum u_n$ diverge.

3. Peut-on obtenir la nature de la série $\sum u_n$ lorsque $\lambda = 1$?

4. Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\sum\limits_{n\geq 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$

b) $\sum\limits_{n\geq 1}(\ln n)^{1-n^2}$

5. Soit (v_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)^{1/n} = \lambda$.

Si (v_n) est une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)^{1/n} = \lambda \in \mathbb{R}^+$, a-t-on toujours $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \lambda$?

Solution :

1. On suppose que $\lambda < 1$. Soit α tel que $\lambda < \alpha < 1$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = \lambda$, il existe N tel que si $n \geq N$, alors $0 < (u_n)^{1/n} \leqslant \alpha$.
Donc, à partir du rang N, $0 < u_n \leqslant \alpha^n$.

La série $\sum \alpha^n$ est géométrique convergente et la série $\sum u_n$également par le théorème de comparaison.

2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)^{1/n} = \lambda > 1$. Il existe N tel que pour $n \geq N$, on a $(u_n)^{1/n} \geq 1$, donc $u_n \geq 1$.

La série $\sum u_n$ diverge puisque son terme général ne tend pas vers 0.

3. Pour $\lambda = 1$, on ne peut conclure. En effet, soit α réel quelconque et $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$.
Alors $(u_n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}(-\alpha \ln n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = 0$.
Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, il n'y a donc pas de résultat général.

4. a) On a : $(u_n)^{1/n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$.
donc $\sum u_n$ converge.

b) On a :
$(u_n)^{1/n} = (\ln n)^{1/n-n} = e^{(1/n-n)\ln(\ln n)} = e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)}e^{-n\ln(\ln n)} \sim e^{-n\ln(\ln(n))}$
donc $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n)^{1/n} = 0$ et $\sum u_n$ converge.

5. $\star$ Supposons $\lambda > 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln(\lambda) = \mu$.

En revenant à la définition de la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)] = \mu$$

Soit $\frac{1}{n}[\ln(u_n) - \ln(u_0)] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$, ou encore $\frac{1}{n}\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ et donc

$$\lim_{n\to\infty} (u_n)^{1/n} = \mathrm{e}^{\mu} = \lambda$$

$\star$ Le raisonnement est identique dans le cas où $\lambda = 0$.

La réciproque est fausse. Par exemple, définissons (u_n) par

$$\begin{cases} u_{2n} = 2^{\sqrt{n}} \\ u_{2n+1} = 3^{\sqrt{n}} \end{cases}$$

On vérifie aisément que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = 1$, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'existe pas.

Exercice 1.19.

Sous réserve d'existence, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$

1. Montrer que F est ainsi bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$, où F' désigne la dérivée de la fonction F.

3. Déterminer les limites de F en 0 (à droite) et en $+\infty$.

4. Montrer qu'aux voisinages de $+\infty$ et de 0, on a $F(x) = o\big(\frac{1}{x}\big)$.

5. Sans chercher à calculer $F(x)$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$ est bien définie et calculer cette intégrale.

Solution :

1. Soit $x > 0$. $t \to \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$; de plus, au voisinage de $+\infty$, $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} = o(t^{-2})$. L'existence de $F(x)$ résulte alors de la règle de Riemann.

2. Pour tout $x > 0$, on écrit par exemple : $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt - \int_1^{x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt$; ainsi F est de classe C^1 et pour tout $x > 0$:

$$F'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$$

3. $\star$ Soit $x \in]0,1]$, alors :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt \geq \int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\,dt \geq -\mathrm{e}^{-1}\ln x$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

$\star$ Soit $x \geq 1$. Alors :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} F(x) = 0$.

4. $\star$ Pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leqslant xF(x) = \int_x^{+\infty} \frac{x.\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt \leqslant \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \mathrm{e}^{-x}$$

Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} xF(x) = 0$.

$\star$ Pour tout $x \in]0,1]$, on a :

$$0 \leqslant xF(x) \leqslant x\int_x^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,dt + xF(1) \leqslant x\int_x^1 \frac{dt}{t} + xF(1) = xF(1) - x\ln x$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} xF(x) = 0$.

5. Soit $0 < \varepsilon < M$. Alors en effectuant une intégration par parties, on a :

$$\int_\varepsilon^M F(x)\,dx = \Big[xF(x)\Big]_\varepsilon^M + \int_\varepsilon^M \mathrm{e}^{-x}dx$$

D'où :

$$\int_\varepsilon^M F(x)\,dx = M.F(M) - \varepsilon.F(\varepsilon) - \mathrm{e}^{-M} + \mathrm{e}^{-\varepsilon}$$

qui tend vers 1 quand $M \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$. D'où l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\,dx$, avec :

$$\int_0^{+\infty} F(x)\,dx = 1$$