1

ANALYSE

Exercice 1.1.
On admet que la fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} dt$$

Soit Ψ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\Psi(x) = \dfrac{d}{dx}\big(\ln \Gamma(x)\big)$

1. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\Psi(x+1) = \Psi(x) + \dfrac{1}{x}$.

   b) Montrer que la fonction Ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(2x)}$.

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \ln f(x)$, de dérivée F' .

   a) Montrer que les fonctions f, F et F' sont périodiques, de période 1.

   b) Etablir, pour tout réel $x \in]0, 1[$ et pout tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement :
   $F'(n) - 2\big[\Psi(2n+2) - \Psi(2n)\big] \leqslant F'(x) \leqslant F'(n) + 2\big[\Psi(2n+2) - \Psi(2n)\big]$

   c) Montrer que la fonction f est constante. En déduire une relation entre $\Gamma(x), \Gamma(x + \frac{1}{2})$ et $\Gamma(2x)$.

Solution :

1. a) Comme $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt$, une intégration par parties (ou un résultat bien connu) permet d'affirmer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

La fonction Γ étant à valeurs strictement positives, il vient :

$$\ln \Gamma(x+1) = \ln x + \ln \Gamma(x)$$

Il ne reste qu'à dériver cette expression pour obtenir :

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}$$

b) On admet que la fonction Γ est de classe C^∞. Ainsi Ψ est dérivable et comme $\Psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, on a :

$$\Psi'(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'^2(x)}{\Gamma^2(x)}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\Gamma'^2(x) = \left(\int_0^{+\infty} \ln t \ (t^{(x-1)/2})^2 (\mathrm{e}^{-t/2})^2 dt\right)^2$$
$$\leqslant \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} dt \times \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt = \Gamma(x) \times \Gamma''(x)$$

ce qui montre que pour tout $x > 0$, $\Psi'(x) \geqslant 0$.

2. a) Il vient, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{2^{2x+1}\Gamma(x+1)\Gamma(x+\frac{3}{2})}{\Gamma(2x+2)} \\ &= \frac{2^{2x-1}\times 4 \times (x\Gamma(x)) \times ((x+\frac{1}{2})\Gamma(x+\frac{1}{2}))}{(2x+1)(2x)\Gamma(2x)} \\ &= \frac{2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)} = f(x) \end{aligned}$$

Donc $F(x+1) = \ln f(x+1) = \ln f(x) = F(x)$, et enfin, comme F est dérivable, sa dérivée F' est également 1-périodique.

b) Par dérivation et définition de la fonction Ψ, on obtient :

$$F'(x) = 2\ln 2 + \Psi(x) + \Psi(x + \frac{1}{2}) - 2\Psi(2x)$$

La périodicité de F' permet d'écrire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F'(x+n) = F'(x).$$

La croissance de Ψ entraîne que pour tout $x \in \,]0,1]$:

$$\Psi(x+n) \geqslant \Psi(n),\ \Psi(x+n+\frac{1}{2}) \geqslant \Psi(n+\frac{1}{2}),\ \text{et } \Psi(2x+2n) \leqslant \Psi(2n+2).$$

Par suite :

$$F'(x+n) = F'(x) \geqslant 2\ln 2 + \Psi(n) + \Psi(n+\frac{1}{2}) - 2\Psi(2n+2)$$

et :

$$F'(x+n+1) = F'(x) \leqslant 2\ln 2 + \Psi(n+1) + \Psi(n+\frac{3}{2}) - 2\Psi(2n)$$

Donc :

$F'(n) - 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) \leqslant F'(x) \leqslant F'(n+1) + 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n))$

On conclut avec $F'(n) = F'(1)$ que :

$$F'(1) - 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) \leqslant F'(x) \leqslant F'(1) + 2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n))$$

c) On sait, en appliquant deux fois le résultat 1. a) que :

$$2(\Psi(2n+2) - \Psi(2n)) = \frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}.$$

Donc, pour $x \in]0,1]$:

$$F'(1) - \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \leqslant F'(x) \leqslant F'(1) + \frac{1}{n} + \frac{2}{2n+1}$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient, pour $x \in]0,1]$: $F'(x) = F'(1)$. Ainsi F' est constante sur $]0,1]$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car continue et de période 1.

Aussi $F(x)$ est-elle affine, mais également périodique de période 1, donc constante.

Comme $f(x) = \exp(F(x))$, f est également constante, égale à $f(1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or la connaissance de l'intégrale de Gauss et le changement de variable $t = u^2$ donnent :

$$f(1) = 2\Gamma\big(\frac{3}{2}\big) = \Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{-1/2}\,dt = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

D'où, pour tout $x > 0$:

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

Exercice 1.2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 2$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \geqslant 1 : u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-(\frac{u_n}{2^n})^2}}}$$

1. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n \sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$.

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|\pi - u_n| \leqslant \dfrac{\pi^3}{6\times 4^n}$.

4.Soit $p \in \mathbb{N}$ *fixé*. Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, u_n admet le développement suivant :

$$u_n=\pi-\frac{\pi^3}{6{\times}4^n}+\cdots+(-1)^p\frac{\pi^{2p+1}}{(2p+1)!{\times}4^{pn}}+o\big(\frac{1}{4^{pn}}\big)$$

5. On définit une nouvelle suite (v_n) par :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ v_n=\frac{1}{3}(-u_n+4u_{n+1}).$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers π et qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $(v_n-\pi)=o(u_n-\pi)$.

6. Donner un équivalent de $(v_n-\pi)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$ la propriété : $\mathcal{P}_n$: $u_n=2^n\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$.

• $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1=2=2\sin\frac{\pi}{2}$.

• Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est encore vraie. Par hypothèse de récurrence, $\dfrac{u_n}{2^n}=\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)$, donc :

$$u_{n+1}=\frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{1-(\sin(\frac{\pi}{2^n}))^2}}}=\frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2^n}))^2}}}=\frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1+\cos(\frac{\pi}{2^n})}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}{\times}2^n\sin(\frac{\pi}{2^n})}{\sqrt{2\cos^2(\frac{\pi}{2^{n+1}})}}=\frac{2^n{\times}2\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})\cos(\dfrac{\pi}{2^{n+1}})}{\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})}=2^{n+1}\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée et on conclut par le principe de récurrence.

2. On a $u_n=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2^n})}{\frac{\pi}{2^n}}\,\pi$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\pi$.

3. Soit $f:x\mapsto\sin x$. On applique à f l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 sur le segment $[0;\frac{\pi}{2}]$. De $|f^{(3)}|\leqslant 1$, on déduit :

$\big|\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)-\frac{\pi}{2^n}\big|\leqslant\dfrac{\pi^3}{6{\times}2^{3n}}$, donc $|\pi-u_n|\leqslant\dfrac{\pi^3}{6{\times}4^n}$.

4. Soit $p\in\mathbb{N}$ fixé. D'après le théorème de Taylor-Young appliqué à f en 0 à l'ordre $2p+1$, on a :

$$\sin x=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2p+1})$$

Sachant que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{2^n}=0$, en substituant $\dfrac{\pi}{2^n}$ à x, on trouve :

$$\sin\big(\frac{\pi}{2^n}\big)=\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}{\times}\frac{\pi^{2k+1}}{2^n2^{2kn}}+o\big(\frac{1}{2^n2^{2pn}}\big)$$

Donc :
$$u_n = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \times \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2kn}} + o\big(\frac{1}{4^{pn}}\big)$$

5. $v_n = \dfrac{1}{3}(-u_n + 4u_{n+1})$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{3}(-\pi + 4\pi) = \pi$. On applique ensuite la formule de la question précédente avec $p = 1$:
$$\begin{cases} u_n = \pi - \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n} + o\big(\dfrac{1}{4^n}\big) \\ u_{n+1} = \pi - \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}} + o\big(\dfrac{1}{4^{n+1}}\big) = \pi - \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}} + o\big(\dfrac{1}{4^n}\big) \end{cases}$$
En effectuant une combinaison linéaire de ces deux égalités, on trouve :
$$v_n - \pi = \frac{-(u_n - \pi) + 4(u_{n+1} - \pi)}{3} = o\big(\frac{1}{4^n}\big)$$
Or $u_n - \pi \sim -\dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$, donc $(v_n - \pi) = o(u_n - \pi)$.

6. Pour obtenir un équivalent de $(v_n - \pi)$, on applique la formule de la question (4) avec $p = 2$:
$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n} + \frac{\pi^5}{5! \times 4^{2n}} + o\big(\frac{1}{4^{2n}}\big)$$
On en déduit par combinaison linéaire :
$$v_n - \pi \ \sim\ -\frac{\pi^5}{5! \times 4^{2n+2}}$$

Exercice 1.3.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :
$$\forall\, u \in [-A, A], 0 \leqslant \mathrm{e}^u - 1 - u \leqslant Mu^2$$

2. Pour x réel, on pose : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt.$

a) Soit x fixé et h non nul ; montrer, à l'aide du résultat de la question 1, que :
$$\lim_{h \to 0} \Big(\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} + \int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\, dt\Big) = 0$$

b) En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\, dt$$

3. a) Calculer $\varphi(0)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \varphi(x^2) + \Big(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt\Big)^2$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout x réel : $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\, du$.

c) En déduire que f' est la fonction nulle, donc que f est constante sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de cette constante

5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

Solution :

1. On écrit une formule de Taylor à l'ordre 2 pour la fonction exponentielle :

$$\mathrm{e}^u = 1 + u + \int_0^u (u-t)\mathrm{e}^t\, dt$$

ce qui donne en majorant e^t par e^A et en faisant attention au signe de u de façon à gérer les problèmes de signes et de position des bornes d'intégration :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^u - 1 - u \leqslant \mathrm{e}^A\,\frac{u^2}{2} = Mu^2$$

2. a) Soit $\Delta(h)$ l'expression entre parenthèses. On a :

$$\Delta(h) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{h(1+t^2)}\big(\mathrm{e}^{-h(1+t^2)} - 1 - h(1+t^2)\big)\, dt$$

et, avec $M = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2|h|}$

$$|\Delta(h)| \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}}{|h|(1+t^2)} Mh^2(1+t^2)^2\, dt \leqslant |h|\mathrm{e}^{2|h|}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x(1+t^2)}(1+t^2)\, dt$$

Cette dernière expression tend vers 0, lorsque h tend vers 0.

b) Il suffit de traduire le résultat précédent.

3. a) On a $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

b) Comme $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

4. a) Comme φ est dérivable, tout comme $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = 2x\varphi'(x^2) + 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = 2\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\, dt - 2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\, dt$$

b) Le changement de variable linéaire $t = xu$ donne, pour $x \neq 0$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,du$$

Ce résultat reste clairement valable pour $x = 0$.

c) Ainsi $f'(x) = 0$ pour tout x réel, et f est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = \frac{\pi}{4}$, on a, pour tout x réel $f(x) = \frac{\pi}{4}$.

5. Comme on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt$ existe, par passage à la limite, il vient :

$$\frac{\pi}{4} = 0 + \left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right)^2$$

puis, par positivité :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Exercice 1.4.

Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur $[-1, 1]$.

1. Soit $u \in \mathbb{R}$; montrer que la fonction h_u définie sur $[-1, 1]$ par :

$$h_u(x) = f(x) + ug(x)$$

est bornée et atteint ses bornes.

Soit M la fonction qui à tout réel u associe le maximum de la fonction h_u sur $[-1, 1]$ et $E(u)$ l'ensemble des éléments de $[-1, 1]$ en lesquels h_u atteint son maximum $M(u)$.

2. Déterminer la fonction M et $E(u)$ lorsque $f : x \mapsto (1-x^2)^{1/2}$ et $g : x \mapsto x$.

On revient au cas général.

3. Soit u et v réels, $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Montrer que l'on a :

$$(v - u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v - u)g(y)$$

4. Montrer que la fonction M est continue sur $\mathbb{R}$.

5. On suppose qu'il existe une fonction r de $\mathbb{R}$ dans $[-1, 1]$ telle que pour tout u de $\mathbb{R}$, $r(u)$ appartient à $E(u)$. On pose alors $\varphi(u) = g(r(u))$.
Montrer que si u, v, w sont tels que $u < v < w$ et si y appartient à $E(v)$, on a :

$$\varphi(u) \leqslant g(y) \leqslant \varphi(w)$$

Que peut-on en déduire ?

Solution :

1. Les fonctions f et g étant continues sur le segment $[-1,1]$, elles y sont bornées et la fonction h_u est bornée sur $[-1,1]$ et atteint ses bornes. Ainsi, $M(u)$ est défini et $E(u)$ n'est pas vide.

2. On a $h'_u(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + u$ qui est nul si et seulement si $u = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
Donc $h'_u(x) = 0$ si et seulement si $x^2(1+u^2) = u^2$, avec u et x de même signe, donc si et seulement si $x = \alpha = \dfrac{u}{\sqrt{1+u^2}} \in\,]-1,1[$.

On a alors le tableau de variations :

x	-1		α		1
$h'_u(x)$		$+$	0	$-$	
h_u	$-u$	$\nearrow$	$\sqrt{1+u^2}$	$\searrow$	u

Donc :
$$E(u) = \{\alpha\} = \left\{\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right\} \text{ et } M(u) = \sqrt{1+u^2}$$

3. Soit $x \in E(u)$ et $y \in E(v)$. Alors :
$$M(u) = f(x) + ug(x) \text{ et } M(v) = f(y) + vg(y).$$
D'autre part,
$$f(y) + ug(y) \leqslant M(u) \text{ et } f(x) + vg(x) \leqslant M(v).$$
Donc en combinant égalités et inégalités :
$$(f(x)+vg(x))-(f(x)+ug(x)) \leqslant M(v)-M(u) \leqslant (f(y)+vg(y))-(f(y)+ug(y))$$
Soit :
$$(v-u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y)$$

4. Supposons $v - u \geqslant 0$. Comme g est continue sur $[-1,1]$, il existe deux constantes, a, A telles que pour tout $x \in [-1,1]$, $a \leqslant g(x) \leqslant A$. Aussi :
$$(v-u)a \leqslant (v-u)g(x) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y) \leqslant (v-u)A$$
En prenant la limite lorsque v tend vers u, ceci qui montre que M est continue à droite en tout point u. On adapte le raisonnement lorsque $v - u \leqslant 0$ et finalement M est continue en tout point u.

5. On applique le résultat de la question 3 à $x = r(u)$. Il vient :
$$(v-u)\varphi(u) \leqslant M(v) - M(u) \leqslant (v-u)g(y)$$
Donc $\varphi(u) \leqslant g(y)$. On l'applique ensuite à y (à la place de x) et $r(w)$ (à la place de y). Il vient, car $w - v > 0$:

$$(w-v)g(y) \leqslant M(w)-M(v) \leqslant (w-v)\varphi(w)$$

Donc $g(y) \leqslant \varphi(w)$.
Finalement $\varphi(u) \leqslant \varphi(w)$, ce qui montre que la fonction φ est croissante.

Exercice 1.5.

Soient deux nombres réels a et b tels que $0 < a < b$. Pour tout nombre réel $x > 0$ on définit :

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t^2}\, dt$$

1. a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $f(x) \geqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

b) Montrer que la fonction f est croissante.

c) Montrer que f admet une limite lorsque x tend vers 0^+ (on ne cherchera pas à calculer cette limite).

2. a) Montrer que, pour tout réel $k > 1$, il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \varepsilon]$, on a :

$$t \leqslant \mathrm{e}^t - 1 \leqslant kt$$

b) En déduire la limite de f en 0^+.

3. a) Montrer que $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$ admet une limite lorsque x tend vers 0^+. Calculer cette limite.

b) Retrouver le résultat de la question 2. b) à l'aide de la question précédente.

Solution :

1. a) La fonction exponentielle est convexe, donc son graphe se situe au-dessus de sa tangente au point $(0, \mathrm{e}^0)$, soit :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^t - 1 \geqslant t$$

Par croissance de l'intégration, comme $ax \leqslant bx$ pour $x > 0$, on en déduit que :

$$f(x) \geqslant \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \big[\ln t\big]_{ax}^{bx} = \ln \frac{b}{a}$$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée :

$$f'(x) = b\frac{\mathrm{e}^{bx}-1}{(bx)^2} - a\frac{\mathrm{e}^{ax}-1}{(ax)^2} = \frac{1}{x^2}(g(b) - g(a))$$

en posant $g(u) = \dfrac{\mathrm{e}^{ux} - 1}{u}$.
On montre alors que g est croissante en la dérivant deux fois (ou bien on reconnaît que g est le taux de variation entre 0 et u de la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{ux}$, qui est convexe, donc g est croissante). Ainsi $f'(x) \geqslant 0$ et f est croissante.

c) La fonction f est croissante et minorée, donc elle a une limite à droite en 0, d'après le théorème de la limite monotone.

2. a) $\star$ La minoration proposée est vraie sur $\mathbb{R}$ (cf. question 1. a)).

$\star$ La majoration (locale) peut se démontrer en étudiant localement la fonction associée, mais résulte du fait que, comme la fonction exponentielle est convexe, son graphe se situe au-dessous de toutes ses cordes, et en particulier de la corde de pente $k > 1$ qui passe par le point $(0, 1)$ et un autre point d'abscisse plus grande.

b) Pour tout x tel que $[ax, bx] \subset [0, \varepsilon]$ (soit pour $x \leqslant \dfrac{b}{\varepsilon}$), par croissance de l'intégration, on a :

$$\ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant k \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = k \ln \frac{b}{a}$$

Comme la limite de f existe (question 1. c), en faisant tendre x vers 0^+, on obtient :

$$\ln \frac{b}{a} \leqslant \lim_{x \to 0^+} f(x) \leqslant k \ln \frac{b}{a}$$

Comme ceci est vrai pour tout $k > 1$, par encadrement :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \ln \frac{b}{a}$$

3. a) Comme $t \mapsto \mathrm{e}^t$ est croissante, pour tout $t \in [ax, bx]$, on a :

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x} \leqslant \frac{\mathrm{e}^t}{t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{bx}}{t}$$

On en déduit que :

$$\ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{bx}}{t}\, dt = \mathrm{e}^{bx} \ln \frac{b}{a}$$

Comme le majorant et le minorant ont la même limite quand x tend vers 0^+, par le théorème d'encadrement, on a :

$$\lim_{x \to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt = \ln \frac{b}{a}$$

b) Par intégration par parties on a :

$$f(x) = \Big[-\frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} \Big]_{ax}^{bx} - \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^t}{t}\, dt$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \ln \dfrac{b}{a}$.

Exercice 1.6.

Si u et v sont deux suites réelles, on appelle *produit de convolution* de u et v la suite $w = u \star v = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

1. Soient a et b des réels fixés. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ et $v_n = \dfrac{b^n}{n!}$. Déterminer le produit de convolution $w = u \star v$ des suites u et v.

2. On suppose que u et v sont deux suites convergentes. Le produit de convolution $u \star v$ est-il nécessairement convergent ?

3. On suppose, pour cette question seulement, que $u = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution.

a) Montrer que, pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < m$, on a : $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$w_{2n} \leqslant v_0 u_{2n} + v_1 u_n + 2v_n$ et $w_{2n+1} \leqslant v_0 u_{2n+1} + v_1 u_n + 2v_{n+1}$

c) En déduire que le produit de convolution w converge, et préciser sa limite.

4. On suppose, pour cette question, que $u = \left((-\frac{1}{2})^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante de limite nulle. Soit w leur produit de convolution. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la suite w converge, et préciser sa limite.

Solution :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{k!} \times \dfrac{b^{n-k}}{(n-k)!} = \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k} = \dfrac{1}{n!}(a+b)^n$, d'après la formule du binôme de Newton.

2. En prenant pour u et v la suite constante égale à 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[u \star v]_n = n + 1$, ce qui prouve que u et v peuvent être convergentes sans que $u \star v$ le soit.

3. a) Pour $n < m$, on a $\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k = \dfrac{\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^{m+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^m} < \dfrac{1}{2^n} = u_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k v_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k v_{2n-k} + u_{2n} v_0$$

Par décroissance de v, on en déduit :

$$w_{2n} \leqslant v_n \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k + u_{2n} v_0$$

D'après la question 2, on obtient enfin :

$$w_{2n} \leqslant 2v_n + v_1 u_n + v_0 u_{2n}$$

De même :

$$w_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k v_{2n+1-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{2n+1-k} + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k v_{2n-k} + u_{2n+1} v_0$$

$$w_{2n} \leqslant v_{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k + v_1 \sum_{k=n+1}^{2n} u_k + u_{2n+1} v_0$$

$$w_{2n+1} \leqslant 2v_{n+1} + v_1 u_n + v_0 u_{2n+1}$$

c) On constate que (w_{2n}) et (w_{2n+1}) sont des suites positives majorées par des suites de limite nulle. D'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_{2n+1} = 0$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

4. En notant $u' = \left((\frac{1}{2})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, et $w' = u' \star v$, on a immédiatement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|w_n| \leqslant w'_n$.

Or, d'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} w'_n = 0$, donc par le théorème d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

Exercice 1.7.

1. Déterminer le domaine de définition D de l'application g telle que :

$$g : x \longmapsto \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x\sin(t)} dt$$

2. Montrer que g est de classe C^1 sur D et que pour tout x de D, on a :

$$g'(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)} dt$$

3. Montrer que pour tout t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin(t) \leqslant t$$

En déduire une fonction minorant g sur $\mathbb{R}^+$ et une fonction majorant g sur $\mathbb{R}^-$.

4. Déterminer les limites de g aux bornes du domaine D.

5. Étudier les variations de g et tracer l'allure de sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

Solution :

1. Pour tout x réel, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{x \sin t}$ est continue sur $[0, \pi/2]$. Donc g est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Au vu de l'énoncé, il faut étudier la limite de

$$g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)}\, dt$$

lorsque h tend vers 0. Or :

$$g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)} dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{x\sin t}(\mathrm{e}^{h\sin t} - 1 - h\sin t)dt$$

Par l'inégalité de Taylor, avec $|h| \leqslant 1$, on a :

$$\left|\mathrm{e}^{h\sin t} - 1 - h\sin t\right| \leqslant \frac{h^2|\sin t|^2}{2} \sup_{u\in[-1,1]} \mathrm{e}^{|u|} \leqslant Ch^2,\ C \text{ constante}$$

Donc :

$$\left|g(x+h) - g(x) - h\int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{e}^{x\sin(t)} dt\right| \leqslant Kh^2,\ K \text{ constante}$$

En divisant cette inégalité par h, on obtient le résultat souhaité.

3. Cet encadrement classique s'obtient, soit par étude des fonctions associées, soit par invocation de la concavité de la restriction de la fonction sin à l'intervalle $[0, \pi/2]$.

$\star$ Ainsi, pour $x \geqslant 0$:

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2xt/\pi} dt \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{xt} dt$$

ou :

$$\frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi} - 1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{x}(\mathrm{e}^{x\pi/2} - 1)$$

ce qui donne en particulier une minoration de g sur $\mathbb{R}^+$.

$\star$ Pour $x \leqslant 0$, comme $\sin t \geqslant 0$ sur $[0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{xt} dt \leqslant g(x) \leqslant \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{2xt/\pi} dt$$

ou :

$$\frac{1}{x}(\mathrm{e}^{x\pi/2}-1) \leqslant g(x) \leqslant \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1)$$

ce qui donne en particulier une majoration de g sur $\mathbb{R}^-$.

4. Il suffit de remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi}{2x}(\mathrm{e}^{x\pi}-1) = 0$.

5. La dérivée g' de g est positive sur $\mathbb{R}$, tout comme g.
La fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

La minoration montre que la branche infinie est « très » parabolique... A vous de faire

---

Exercice 1.8.

Soit (u_n) la suite à termes positifs ou nuls définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1}^2 = u_n^2 + 8n + 5$$

1. Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \cos(\pi u_n)$ et $b_n = \sin(\pi u_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe ε_n tel que $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\varepsilon_n\right)$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) ont la même limite que l'on calculera.

b) Montrer que $\forall\, n \geqslant 1$, on a les inégalités suivantes :

$$0 < b_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a_n < 1$$

3. Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Solution :

1. On a $u_k^2 - u_{k-1}^2 = 8(k-1) + 5$, donc par télescopage :

$$u_n^2 = u_n^2 - u_0^2 = 8\sum_{k=1}^{n}(k-1) + 5n = 4n(n-1) + 5n$$

Soit :

$$u_n = \sqrt{4n^2 + n}$$

2. a) On a : $u_n = 2n\big(1 + \frac{1}{4n}\big)^{1/2} = 2n(1 + \frac{1}{8n} + o(1/n))$, donc

$$\pi u_n = 2n\pi + \frac{\pi}{4} + o(1)$$

Ainsi $a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + o(1))$, ce que l'on peut écrire sous la forme

$$a_n = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n), \text{ avec } \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$$

On a de même $b_n = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) En revenant sur les calculs précédents, on a : $\frac{\pi}{2}\,\varepsilon_n = \pi\big(\sqrt{4n^2+n} - 2n - \frac{1}{4}\big)$, d'où :

$$\varepsilon_n = 4n\Big(\sqrt{1+\frac{1}{4n}} - 1 - \frac{1}{8n}\Big) = 4n \times \frac{1 + \frac{1}{4n} - (1+\frac{8}{n})^2}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}} + (1+\frac{8}{n})}$$

$$= -\frac{1}{16n} \times \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4n}} + (1+\frac{8}{n})}$$

et donc :

$$-\frac{1}{32n} \leqslant \varepsilon_n < 0$$

Cet encadrement est largement suffisant pour affirmer que

$$0 < b_n \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a_n < 1$$

3. On a $\varepsilon_n = 4n\sqrt{1+\dfrac{1}{4n}} - 4n - \dfrac{1}{2} = \varphi(4n)$, avec :

$$\varphi(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{2}$$

On a $\varphi'(x) = \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x}}} - 1 = \dfrac{(1-\sqrt{1+\frac{1}{x}})^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} > 0.$

Par conséquent la fonction φ est croissante et les monotonies des fonctions sin et cos sur le domaine utile montrent que la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) décroissante. Comme ces suites sont convergentes de même limite, on conclut :

$$(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes.}$$

Exercice 1.9.

Dans les questions 1 et 2, a et b sont deux constantes réelles.
Soit y_0 un réel donné. On note (E) le problème différentiel d'inconnue la fonction dérivable y :

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) + b \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Soit A un réel strictement positif et N un entier supérieur ou égal 2. On définit une subdivision $\sigma = (t_0, \dots, t_N)$ de l'intervalle $[0, A]$, par $t_k = \dfrac{kA}{N}$, et on pose pour tout k de $[\![0, N-1]\!]$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{A}{N}(ay_k + b)$$

1. a) Écrire une fonction Pascal d'en-tête «`Euler (a,b,y0,A) : real`» qui rend la valeur de y_N.

b) Préciser en fonction de N le nombre d'opérations effectuées.

2. On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = 0$.

a) Résoudre l'équation (E).

b) Préciser l'expression de y_N en fonction de N. Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} y_N$. Donner un équivalent de $(y_N - \lim\limits_{N \to +\infty} y_N)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que $a = 0$ et que $b = b(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Déterminer $\lim\limits_{N \to +\infty} y_N$.

Solution :

1. a) Une proposition de programme est :

```
Function Euler(a,b,y0,A :real ;N :integer) :real
Var s :real ; k :integer ;
Begin s :=y0 ;
For k :=1 to N do s :=s+A/N*(a*s+b) ;
Euler :=s
End.
```

b) On passe dans la boucle N fois, à chaque passage il y a 1 division, 2 multiplications et 2 additions, donc ...

2. a) L'équation différentielle $y' = ay$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y : x \mapsto C.\mathrm{e}^{ax}$. La condition initiale $y(0) = y_0$ donne donc :

$$y(t) = y_0.\mathrm{e}^{at} \text{ et } y(A) = y_0.\mathrm{e}^{aA}$$

b) On a $y_{k+1} = \left(1 + \frac{aA}{N}\right)y_k$, d'où $y_N = \left(1 + \frac{aA}{N}\right)^N y_0$.

Lorsque N tend vers l'infini, on a :

$$N \ln\left(1 + \frac{aA}{N}\right) \sim N \times \frac{aA}{N} = aA$$

Ainsi $\lim\limits_{N\to\infty} N\ln\big(1+\frac{aA}{N}\big) = aA$ et, par continuité de la fonction exponentielle :

$$\lim_{N\to\infty} y_N = y_0.\mathrm{e}^{aA} = y(A)$$

Pour aller plus loin, on effectue un développement limité :

$$N\ln\big(1+\frac{aA}{N}\big) = aA + \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

D'où :

$$\ln\big(\frac{y_N}{y(A)}\big) = \ln y_N - \ln y(A) = \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

et :

$$\frac{y_N}{y(A)} = \exp\big(\frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)\big) = 1 + \frac{(aA)^2}{2N} + o(1/N)$$

Donc :

$$y_N - y(A) \sim y(A)\times\frac{(aA)^2}{2N}$$

3. L'équation différentielle se réduit à $y'(t) = b(t)$, avec $y(0) = y_0$ et sa solution est donc :

$$y(t) = y_0 + \int_0^t b(u)\,du$$

Dans ce cas on a : $y_{k+1} - y_k = \dfrac{A}{N}b(t_k)$ et par télescopage :

$$y_N - y_0 = \frac{A}{N}\sum_{k=0}^{N} b\big(\frac{kA}{N}\big)$$

dont la limite est $\displaystyle\int_0^A b(u)\,du$ (sommes de Riemann associées à la fonction b sur le segment $[0, A]$).

Exercice 1.10.

Soit f l'application définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, à valeurs réelles, par :

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + \sqrt{y}}{x\sqrt{y}}$$

1. a) Montrer que f est continue et de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

   b) Déterminer les points critiques de f.

   c) Quelle est la nature de ces points critiques ?

   d) La fonction f est-elle majorée sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

2. a) Montrer que pour tout (a,b,c) de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{1/3}$.

b) Montrer que f admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, que l'on calculera.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $e^{2x} + e^y \leqslant e^{x+y}(3 - e^y)$.

Solution :

1. a) f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

b) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{x^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{2y^{3/2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \end{cases}$

Les points critiques sont les solutions du système :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}} - \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ -\dfrac{x}{2y^{3/2}} + \dfrac{1}{2\sqrt{y}} = 0 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} y = x^4 \\ x^3 = 1 \end{cases}.$$

Le seul point critique est donc le point $(1,1)$.

c) Avec les notations de Monge, on trouve au point $(1,1)$:

$$r = 2, s = -\frac{1}{2} \text{ et } t = \frac{1}{2}$$

Ainsi $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, ce qui prouve qu'au point critique, f admet un minimum local.

d) On a, par exemple : $f(x,1) = x + 1 + \dfrac{1}{x}$, donc f est clairement non majorée sur son domaine de définition.

2. a) La fonction ln vérifie : $\forall\, x > 0, \ln''(x) = \dfrac{1}{x^2} < 0$, donc la fonction ln est concave sur son domaine de définition et :

$$\forall\, a,b,c \in \mathbb{R}_+^*, \ln\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geqslant \frac{1}{3}(\ln a + \ln b + \ln c)$$

d'où, par croissance de la fonction exponentielle :

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant (abc)^{1/3}$$

b) Avec $a = \dfrac{x}{\sqrt{y}}$, $b = \sqrt{y}$ et $c = \dfrac{1}{x}$, l'inégalité précédente donne $f(x,y) \geqslant 3$. Comme $f(1,1) = 3$, f atteint bien en ce point son minimum global.

3. On pose $X = e^x$ et $Y = e^{2y}$. L'inéquation devient :

$$X^2 + \sqrt{Y} + XY \leqslant 3X\sqrt{Y}, \text{ soit } f(X,Y) \leqslant 3$$

Résoudre l'inéquation, c'est donc en fait résoudre l'équation associée.

Or il n'y a égalité dans l'inégalité de concavité entre moyenne arithmétiquue et moyenne géométrique de la question 2. a) que si $a = b = c$ (la fonction ln est strictement concave). En reportant dans 2. b), l'égalité ne peut donc se produire que si $X = Y = 1$, soit $x = y = 0$.

Exercice 1.11.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour $n \geqslant 1$ par la relation : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. En utilisant un encadrement de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.

2. En écrivant : $u_n - u_{n-1} = \varphi\big(\frac{1}{n}\big)$ pour une certaine fonction φ, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone. En déduire qu'elle est convergente.

Dans toute la suite de l'exercice, on note γ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le domaine de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad n \leqslant x \leqslant n+1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leqslant y \leqslant \frac{1}{x}\}.$$

a) Représenter graphiquement D_n et montrer que l'aire de D_n est égale à $u_n - u_{n+1}$.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'encadrement :

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\Big) \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)$$

(on pourra utiliser de deux manières différentes la convexité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$).

4. En déduire l'encadrement suivant, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n - \frac{1}{2n} \leqslant \gamma \leqslant u_n - \frac{1}{2(n+1)}$$

Solution :

1.Pour $x \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où en intégrant sur le segment $[k, k+1]$, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

$\to \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k] = \ln(n+1) > \ln n.$

$\to 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} [\ln k - \ln(k-1)] = 1 + \ln n.$

Donc :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

2. On a $u_n - u_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln(n-1) - \ln n = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n}) = \varphi(\dfrac{1}{n})$, avec :

$$\varphi(x) = x + \ln(1-x)$$

La concavité de la fonction ln donne $x \geqslant \ln(1+x)$, soit $\ln(1-x) \leqslant -x$ et $\varphi(x) \leqslant 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante.
Etant décroissante et minorée par 0 elle est convergente de limite universellement notée γ (constante d'Euler).

3. a) Facilement :

$$\mathcal{A}(D_n) = \int_n^{n+1} (\frac{1}{x} - \frac{1}{n+1})dx = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}.$$

b) $\star$ La représentation graphique de la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est située sous sa corde passant par les points de cette courbe d'abscisse n et $n+1$. En clair :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$$

D'où $u_n - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}) - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1})$

$\star$ En revanche la représentation graphique est située au-dessus de sa tangente au point de la courbe d'abscisse $n+1$.
Cette tangente a pour équation $y = -\dfrac{1}{(n+1)^2}(x - (n+1)) + \dfrac{1}{n+1}$, donc

$$u_n - u_{n+1} \geqslant \int_n^{n+1} -\frac{1}{(n+1)^2}(x-(n+1))dx = \frac{1}{2(n+1)^2} \geqslant \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

Soit :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

4.Par sommations et télescopage, il vient alors :

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+2}) \leqslant u_n - u_{N+1} \leqslant \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1})$$

Puis par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini :

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leqslant u_n - \gamma \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$$

Il n'y a plus qu'à tout remettre dans l'ordre.

Exercice 1.12.

Pour tout réel $x > 0$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

1. Justifier l'existence de $S(x)$ pour $x > 0$.

2. Soient a et b deux réels vérifiant : $0 < a < b$. Soit $(x, x_0) \in [a, b]^2$.

   a) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$, indépendant de x et x_0, tel que :
$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant C|x - x_0|.$$

   b) En déduire que S est continue sur $]0, +\infty[$.

3. a) Montrer que pour tout $x > 0$: $S(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{x^2}$.

   b) En déduire un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0.

4. En utilisant une comparaison série-intégrale, trouver un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution :

1. Soit $x > 0$, alors $\dfrac{1}{(n+x)^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et la règle de Riemann pour les séries à termes positifs donne la convergence voulue.

2. a) Par regroupement et réduction au même dénominateur :
$$S(x) - S(x_0) = (x_0 - x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + x + x_0}{(n+x)^2(n+x_0)^2}$$
Puis, par majoration des numérateurs et minoration des dénominateurs (sans perdre la convergence) :
$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |x_0 - x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n + 2b}{(n+a)^4}$$

   b) La fonction S est donc continue sur $[a, b]$ (et même lipschitzienne) et, par globalisation, S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a) Par simple décalage :
$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1+x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2} = S(x) - \frac{1}{x^2}$$

   b) Comme S est continue en 1, on a $\lim\limits_{x \to 0} S(x+1) = S(1)$, qui est un nombre réel donc est négligeable devant $\dfrac{1}{x^2}$. Donc :
$$S(x) = S(x+1) + \frac{1}{x^2} \underset{(0)}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a par décroissance de la fonction à intégrer :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant \frac{1}{(n+x)^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{(t+x)^2}$$

Par sommation et passage à la limite (tout converge), il vient :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} \leqslant S(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2}$$

Soit $\dfrac{1}{x+1} \leqslant S(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$, d'où par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} xS(x) = 1$, *i.e.*

$$S(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{1}{x}$$

Exercice 1.13.

On pose pour tout réel $t > 0$: $g(t) = \frac{1}{t} \times \exp\left(-\frac{1}{t}\right)$.

1. Montrer que g admet une limite lorsque t tend vers 0^+. Montrer que la fonction ainsi prolongée en 0 est dérivable à droite en 0.

2. On pose, pour tout réel $t \geqslant 0$, $h(t) = \displaystyle\int_1^t g(u)\,du$.

Donner un développement limité à l'ordre 3 de h au voisinage de $t = 1$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$.

a) Montrer que pour n assez grand, (E_n) admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$ et une unique solution $y_n \in]1, +\infty[$.

b) Étudier les suites (x_n) et (y_n) ainsi que leurs limites respectives.

Solution :

1. On a $\lim\limits_{u\to-\infty} u.\mathrm{e}^{-u} = \lim\limits_{u\to-\infty} u^2.\mathrm{e}^{-u} = 0$ et comme $\lim\limits_{t\to0^+} -\dfrac{1}{t} = -\infty$, on a :

$$\lim_{t\to0^+} g(t) = 0,\ \lim_{t\to0^+} \frac{g(t)}{t} = 0$$

Ce qui prouve que g est prolongeable par continuité en 0, en posant $g(0) = 0$ et g est alors dérivable (à droite) en 0 avec $g'_d(0) = 0$.

2. h est indéfiniment dérivable au voisinage de 1, de dérivée première g, donc admet un développement limité à tout ordre donné par la formule de Taylor :

$$h(t) = h(1) + \frac{t-1}{1!}h'(1) + \frac{(t-1)^2}{2!}h''(1) + \frac{(t-1)^3}{3!}h'''(1) + o((t-1)^3)$$

$$h'(t) = g(t) = \frac{1}{t}\,\mathrm{e}^{-1/t} \implies h'(1) = \mathrm{e}^{-1}$$

$$h''(t) = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{e}^{-1/t} + \frac{1}{t^3}\,\mathrm{e}^{-1/t} \implies h''(1) = 0$$

$$h'''(t) = \frac{2}{t^3}\,\mathrm{e}^{-1/t} - \frac{1}{t^4}\,\mathrm{e}^{-1/t} - \frac{3}{t^4}\,\mathrm{e}^{-1/t} + \frac{1}{t^5}\,\mathrm{e}^{-1/t} \implies h'''(1) = -\mathrm{e}^{-1}$$

Comme $h(1) = 0$, il reste :

$$h(t) = \mathrm{e}^{-1}\big((t-1) - \frac{(t-1)^3}{6} + o((t-1)^3)\big)$$

3. a) On a vu que $g'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t^3}\,(1-t)$, d'où le tableau de variations :

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

$\star$ La restriction de g à $[0,1]$ réalise une bijection strictement croissante de $[0,1]$ sur $[0,1/\mathrm{e}]$, donc la réciproque γ_1 réalise une bijection strictement croissante de $[0,1/\mathrm{e}]$ sur $[0,1]$.

Ainsi l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet une solution et une seule dans $[0,1]$ pour $n \geqslant 3$, à savoir $x_n = \gamma(\dfrac{1}{n})$. Les variations de γ montrent que la suite (x_n) est décroissante de limite nulle.

On refait le même raisonnement à partir de la restriction de g à $[1,+\infty[$ qui réalise une bijection strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $[1/\mathrm{e},+\infty[$. Ainsi la suite (y_n) est définie à partir du rang 3, croissante de limite $+\infty$.