2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A, B les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer un polynôme annulateur de degré minimal et de coefficient du terme de plus haut degré 1 de la matrice A, respectivement de la matrice B.

2. Justifier que A et B ne sont pas semblables.

3. a) Existe-t-il un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$?

b) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit semblable à B ?

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice M dans la base canonique.

a) Montrer que si M est diagonalisable, alors il existe un réel non nul ℓ tel que M soit semblable à ℓA.

b) On suppose que M n'est pas diagonalisable. Comparer $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$. Montrer que M est semblable à B.

Solution :

1. Il est facile de vérifier que les deux polynômes demandés sont $M_A(X) = X(X-1)$ et $M_B(X) = X^2$.

2. Les deux matrices A et B ne peuvent être semblables puisqu'elles n'ont pas les mêmes valeurs propres. En effet 1 est valeur propre de A (ainsi que 0), mais n'est pas valeur propre de B qui n'a que 0 comme valeur propre.

3. a) La matrice A est diagonale ; pour tout polynôme P, la matrice $P(A)$ est diagonale. Or B n'est pas diagonale, donc $P(A)$ ne sera jamais égal à B.

b) La matrice B n'est pas diagonalisable (son unique valeur propre est 0 ; si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc égale à la matrice nulle). Or pour tout polynôme P, la matrice $P(A)$ est diagonale, donc $P(A)$ et B ne sont pas semblables.

4. a) Si $\mathrm{rg}(f) = 1$, alors $\dim \mathrm{Ker}(f) = n-1$. Ainsi 0 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est de dimension $(n-1)$. Si f est diagonalisable, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, telle que $(e_2, \dots, e_n)$ soit une base de $\mathrm{Ker}\, f$.

On a $f(e_1) = \ell e_1$ et pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $f(e_i) = 0$. Ainsi la matrice M est semblable à ℓA.

b) Si f n'est pas diagonalisable, on a $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. En effet, soit x un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\, f$. Alors $f(x)$ est encore dans $\mathrm{Im}\, f$, donc est colinéaire à x et si on avait $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, x serait propre et f serait diagonalisable. Donc $f(x) = 0$.

Soit alors $e_1 \notin \mathrm{Ker}\, f$. On a $f(e_1) = e_2 \in \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. On complète e_2 en une base $(e_2, \dots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}\, f$.

Il est facile de vérifier que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et que dans cette base, la matrice associée à f est B.

Exercice 2.2.

Soit $(A_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On définit une suite de vecteurs-colonnes $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ par $X_0 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$X_{n+1} = A_n X_n.$$

1. Montrer que l'ensemble S des suites d'éléments de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ ainsi défini est un sous-espace vectoriel de $\big(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})\big)^{\mathbb{N}}$.

2. Soit T l'application définie sur S par, pour tout $(X_n)_{n\geqslant 0} \in S$:

$$T((X_n)_{n\geqslant 0}) = X_0$$

Montrer que T est un isomorphisme de S sur $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.
En déduire la dimension de S, ainsi qu'une base de S.

3. Dans cette question, on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n+2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer X_n en fonction de n et X_0.

b) Une suite d'éléments $(X_n)_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ est dite *convergente* dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, si, en notant $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$, les deux suites complexes $(x_{1,n})_n$ et $(x_{2,n})_n$ convergent dans $\mathbb{C}$
Étudier la convergence de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de X_0.

Solution :

1. On vérifie sans difficultés les propriétés de sous-espace vectoriel.

2. On vérifie aussi facilement que T est linéaire.
Par définition de la suite (X_n), pour tout U de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, il existe un unique $X_0 = U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que la suite définie par $X_0 = U$ et $X_{n+1} = A_n X_n$ vérifie $T((X_n)) = U$ (en clair la suite est bien définie par son premier terme X_0). Ainsi

$$\dim S = 2$$

3. a) On a $X_n = (A_n \times A_{n-1} \times \cdots \times A_0) X_0$. On peut alors :
$\star$ soit penser à diagonaliser A_n. C'est possible (les valeurs propres de A_n sont distinctes), mais les matrices ne commutant pas deux à deux, on ne peut trouver une base commune de diagonalisation, ce qui empêchera de déterminer $\prod A_k$.
$\star$ S'apercevoir après quelques essais, puis montrer par récurrence que :

$$\prod_{k=0}^{n} A_k = P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n+2} & 0 \\ -\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} & 1 \end{pmatrix}$$

b) On pose alors $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$, on sait que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n = +\infty$.

Avec $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $X_n = P_n X_0 = \begin{pmatrix} \frac{x}{n+2} \\ -H_n x + y \end{pmatrix}$.

Ainsi la suite (X_n) converge si et seulement si $x = 0$ et sa limite est alors $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice 2.3.

1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel E. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont des sous-espaces stables par f.

b) Soit k est un réel quelconque ; montrer que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f si et seulement si F est stable par $f - kI$, où I représente l'endomorphisme identité de E.

Dans la suite E désigne un espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E défini dans la base $\mathcal{E}$ par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $g = f - 2I$.

2. a) Calculer g^3.

b) Déterminer $\operatorname{Im}(g), \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g) \cap \operatorname{Ker}(g), \operatorname{Im}(g^2)$ et $\operatorname{Ker}(g^2)$.

3. Déterminer toutes les droites vectorielles stables par f.

4. a) Soit P un plan tel que $\operatorname{Im}(g^2) \subset P \subset \operatorname{Ker}(g^2)$. Montrer que P est stable par g.

b) Soit F un plan stable par g et v l'endomorphisme induit par g sur F.

i) Montrer que $v^2 = 0$.

ii) Si $v = 0$, montrer que $F = \operatorname{Ker} g$.

iii) Si $v \neq 0$ et si x est un vecteur de F tel que $v(x) \neq 0$, montrer que $v(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(v) \cap \operatorname{Ker}(v)$.

c) En déduire une caractérisation des plans vectoriels de E stables par f.

Solution :

1. a) Soit $y \in \operatorname{Im} f$, on a $f(y) \in \operatorname{Im} f$ et si $x \in \operatorname{Ker} f, f(f(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Ainsi :

$$\operatorname{Im} f \text{ et } \operatorname{Ker} f \text{ sont des sous-espaces stables par } f.$$

b) Supposons F stable par f. Soit $x \in F$, alors : $(f-kI)(x) = f(x)-kx \in F$.
Réciproquement, supposons F stable par $f-kI$. Soit $x \in F$. Alors on écrit : $f(x) = (f(x)-kx)+kx \in F$.

$$F \text{ stable par } f \Longleftrightarrow F \text{ stable par } f - kId$$

2. a) Un calcul matriciel sans surprise donne $g^3 = 0$.

b) On obtient :

$\operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(e_1, e_2 - 3e_3 + e_4)$, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$.
$\operatorname{Im} g \cap \operatorname{Ker} g = \operatorname{Vect}(e_1) = \operatorname{Im} g^2$ et $\operatorname{Ker} g^2 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, e_4 - 2e_3)$.

3. D'après la première question, il est équivalent de déterminer les droites stables par g. Or une droite est stable par g si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de g. Ici l'endomorphisme g est nilpotent (sa seule valeur propre est 0). Le sous-espace propre associé est $\operatorname{Ker} g$ qui est de dimension 2. Donc les droites stables par g sont toutes les droites de ce plan.

4. a) Soit $x \in P$, alors $x \in \operatorname{Ker} g^2$ et $g(x) \in \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g$, donc $g(x) \in \operatorname{Im} g^2 \subset P$ et P est stable.

b) $\star$ L'endomorphisme v est nilpotent car g l'est. Or F est de dimension 2. L'indice de nilpotence de v ne peut être supérieur à 2. Donc $v^2 = 0$ et $F \subset \operatorname{Ker} g^2$.

(si $v^k = 0$ et $v^{k-1} \neq 0$, il existe x tel que $v^{k-1}(x) = 0$ et alors la famille $(x, v(x), \dots, v^{k-1}(x))$ est libre.)

$\star$ Si $v = 0$, $F \subset \operatorname{Ker} g$ qui est de dimension 2. Donc $F = \operatorname{Ker} g$.

$\star$ Si $v \neq 0$, il existe $x \in F$ tel que $v(x) \neq 0$. Comme $v^2 = 0$, il vient $v(x) \in \operatorname{Im} v \cap \operatorname{Ker} v \subset \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \operatorname{Im} g^2$ et $\operatorname{Im} g^2 \subset F$.

c) Soit P un plan de E, les questions précédentes donnent :

$$P \text{ est stable} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} g^2 \subset P \subset \operatorname{Ker} g^2.$$

Exercice 2.4.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit L l'application définie sur E par, pour tout x réel : $L(f)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$

1. Montrer que L est un endomorphisme de E. Est-il injectif, surjectif ?

2. Soit $f \in E$, $a \in \mathbb{R}$. On considère l'élément de E défini, pour tout x réel, par : $g(x) = f(a-x)$. Déterminer une relation entre $L(f)$ et $L(g)$. Interpréter géométriquement ce résultat. Dans le cas d'une fonction f paire, en déduire une propriété des graphes représentatifs de f et $L(f)$.

3. Montrer que si $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$, alors on a également : $\lim_{t\to+\infty} L(f)(t) = \ell$. Étudier la réciproque.

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $h_\alpha : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}$, montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de L.

5. On suppose dans cette question seulement que f est une densité de probabilité et que X une variable aléatoire réelle de densité f. On considère une variable aléatoire réelle Y uniforme sur $[-1, 0]$, et on suppose X et Y indépendantes.

Que représente la fonction $L(f)$ pour la variable aléatoire $Z = X + Y$?

6. On suppose f continue, à valeurs positives et telle que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\,dt$$

Solution :

1. $\star$ La linéarité de l'application L résulte de la linéarité de lintégration.

$\star$ Soit F une primitive de f : $L(f)(x) = F(x+1) - F(x)$. Donc $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a fortiori est continue.

$$L \in \mathcal{L}(E)$$

$\star$ Toute application continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en au moins un point (par exemple la fonction $x \mapsto |x|$) n'a donc pas d'antécédent par L et L n'est pas surjective.

$\star$ Soit $f : t \mapsto \sin(2\pi t)$, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$L(f)(x) = \int_x^{x+1} \sin(2\pi t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\big[\cos(2\pi t)\big]_x^{x+1} = 0$$

Donc L n'est pas injective.

2. $\star$ Soit $f \in E, a \in \mathbb{R}$: $L(g)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(a-t)\,dt = \int_{a-x-1}^{a-x} f(u)\,du$, et :

$$L(g)(x) = L(f)(a-x-1).$$

On obtient le graphe de g en prenant successivement le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées, puis le translaté de vecteur $(a-1)\overrightarrow{\imath}$. L'aire algébrique sous la courbe représentative de g sur $[a-x-1, a-x]$ est égale à l'aire algébrique sous la courbe représentative de f sur $[x, x+1]$

$\star$ Dans le cas d'une fonction f paire, les fonctions $g : x \mapsto f(-x)$ et f sont égales, d'où : $L(g) = L(f)$ et donc avec $a = 0$, $\forall x,\ L(f)(-x-1) = L(f)(x)$

La courbe représentative de $L(f)$ présente une symétrie d'axe vertical $x = -1/2$

3. $\star$ On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \mathbb{R}$.
Soit donc $\varepsilon > 0$ et A tel que $t \geqslant A \implies |f(t)-\ell| \leqslant \varepsilon$, alors dès que $x \geqslant A$:

$$|L(f)(x)-\ell| = \left|\int_x^{x+1} [f(t)-\ell]dt\right| \leqslant \int_x^{x+1} |f(t)-\ell|\,dt \leqslant \int_x^{x+1} \varepsilon\,dt = \varepsilon$$

d'où $L(f)$ admet la même limite ℓ.

$\star$ La fonction $g : x \mapsto \sin(2\pi x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$ et $L(g) = 0_E$ est de limite nulle ; la réciproque est donc fausse.

4. On a $L(h_\alpha)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{\alpha t}dt = \frac{1}{\alpha}[\mathrm{e}^\alpha - 1]\mathrm{e}^{\alpha x} = \frac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha} h_\alpha(x)$.

Soit la fonction $\psi : \alpha \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha}$.
C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$ qu'on peut prolonger par continuité en 0 en posant $\psi(0) = 1$. La fonction ψ ainsi prolongée vérifie :
- ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.
- $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} \psi(\alpha) = 0$,
- $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \psi(\alpha) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure : $\psi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$ et tout réel de $\mathbb{R}_+^*$ est donc valeur propre de L (h_α n'est pas la fonction nulle).

5. Soit X de densité f, Y de densité $\mathbf{1}_{[-1,0]}$ et X et Y indépendantes. Ainsi $Z = X + Y$ admet pour densité :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathbf{1}_{[-1,0]}(x-t)\,dt = \int_x^{x+1} f(t)\,dt = L(f)(t)$$

6. On suppose f continue, à valeurs positives et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = C \in \mathbb{R}$

La fonction $f_1 = \frac{1}{C}\times f$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ et la question précédente entraîne que $L\big(\frac{1}{C}\times f\big) = \frac{1}{C}L(f)$ est une densité de probabilité d'où :

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\,dt = 1$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(t)\,dt$$

Exercice 2.5.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. On appelle *carré magique* d'ordre 3, toute matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que les sommes des coefficients de chacune des trois lignes, de chacune des trois colonnes et de chacune des deux diagonales soient égales. Cette somme est notée $s(M)$.

On note $\mathcal{C}$ le sous-ensemble des carrés magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'application s définie sur $\mathcal{C}$, qui à tout M de $\mathcal{C}$ associe le réel $s(M)$, est linéaire et que :

$$\mathcal{C} = \mathrm{Vect}(J) \oplus \mathrm{Ker}\, s$$

2. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$$

b) Déterminer $\mathcal{A} \cap \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s$. En déduire une base de $\mathcal{C}$.

3. Déterminer un vecteur propre commun à tous les carrés magiques. En déduire tous les carrés magiques M pour lesquels M^2 est un carré magique.

Solution :

1. $\star$ Soit φ l'application linéaire $\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^8$ définie par :

$$\varphi\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1,1}+m_{1,2}+m_{1,3} \\ m_{2,1}+m_{2,2}+m_{2,3} \\ m_{3,1}+m_{3,2}+m_{3,3} \\ m_{1,1}+m_{2,1}+m_{3,1} \\ m_{1,2}+m_{2,2}+m_{3,2} \\ m_{1,3}+m_{2,3}+m_{3,3} \\ m_{1,1}+m_{2,2}+m_{3,3} \\ m_{1,3}+m_{2,2}+m_{3,1} \end{pmatrix}$$

Comme $\mathcal{C} = \varphi^{-1}\Big(\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\Big)\Big)$ (les huit sommes sont égales ...), $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$\star$ L'application s est linéaire car c'est, par exemple, la restriction à $\mathcal{C}$ de la forme linéaire suivante :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{pmatrix} \mapsto m_{1,1}+m_{1,2}+m_{1,3}$$

$\star$ Montrons que toute matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit de manière unique :

$$M = \lambda J + N \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } s(N) = 0.$$

$\rightarrow$ Si une matrice $M \in \mathcal{C}$ s'écrit ainsi, on a nécessairement $s(M) = \lambda s(J) = 3\lambda$, donc $\lambda = \dfrac{s(M)}{3}$ et ainsi $N = M - \dfrac{s(M)}{3}J$, donc l'écriture, si elle existe, est unique.

$\rightarrow$ Réciproquement, pour tout $M \in \mathcal{C}$, on a :

$$s\Big(M - \frac{s(M)}{3}J\Big) = s(M) - \frac{s(M)}{3}s(J) = 0$$

Donc :

$$M = \underbrace{M - \frac{s(M)}{3}J}_{\in \mathrm{Ker}(S)} + \frac{s(M)}{3}J,$$

et toute matrice $M \in \mathcal{C}$ possède bien une telle écriture.

2. a) Un fait classique est que : $\mathcal{S} \oplus \mathcal{A} = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec la décomposition :

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in \mathcal{A}}$$

On en déduit immédiatement que :

$$\mathrm{Ker}\, s = (\mathcal{S} \cap \mathrm{Ker}\, s) \oplus (\mathcal{A} \cap \mathrm{Ker}\, s)$$

Comme toute matrice antisymétrique M a une diagonale nulle on a $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$ qui est inclus dans $\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker} s$; comme l'inclusion contraire est évidente on a $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}=\mathcal{A}\cap\operatorname{Ker} s$, d'où le résultat annoncé.

b) $\star$ Les matrices antisymétriques de taille 3 sont de la forme :

$$M=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$$

Pour que M appartienne à $\mathcal{C}$ il faut et il suffit que :

$$a+b=-a+c=-b-c=-a-b=a-c=b+c=0=b-b,$$

soit $a=-b=c$. Donc :

$$\mathcal{A}\cap\mathcal{C}=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

$\star$ De même on obtient :

$$\mathcal{S}\cap\operatorname{Ker} s=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$\star$ En «concaténant» des bases de $\operatorname{Vect}(J)$, $\mathcal{A}\cap\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}\cap\operatorname{Ker} s$, on obtient que :

$$\text{en posant } J_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix},\ J_3=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$(J,J_2,J_3) \text{ est une base de } \mathcal{C}.$$

3. $\star$ Comme la somme des éléments d'une ligne quelconque est constante et vaut $s(M)$, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de toute matrice $M\in\mathcal{C}$ pour la valeur propre $s(M)$.

$\star$ Si M admet $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur propre pour la valeur propre λ, alors M^2 admet ce même vecteur comme vecteur propre pour la valeur propre λ^2. Si M et M^2 appartiennent à $\mathcal{C}$, on en déduit donc que $s(M^2)=s(M)^2$.

$\star$ D'après la question précédente toute matrice $M\in\mathcal{C}$ s'écrit :

$$M=aJ+bJ_2+cJ_3=\begin{pmatrix}a+c & a+b-c & a-b\\ a-b-c & a & a+b+c\\ a+b & a-b+c & a-c\end{pmatrix} \text{ avec } a=\frac{s(M)}{3}$$

Alors, par calcul, le coefficient de la deuxième ligne et de la deuxième colonne de M^2 vaut $3a^2 + 2c^2 - 2b^2$. Donc la condition $s(M^2) = s(M)^2$ s'écrit :

$$3(3a^2 + 2c^2 - 2b^2) = (3a)^2$$

Soit $b^2 = c^2$ et

$$b = \pm c$$

Le calcul donne alors : $(aJ + b(J_2 + J_3))^2 = (aJ + b(J_2 - J_3))^2 = 3a^2 J \in \mathcal{C}$
On a donc :

$$\{M \in \mathcal{C} \mid M^2 \in \mathcal{C}\} = \mathrm{Vect}(J, J_2 + J_3) \cup \mathrm{Vect}(J, J_2 - J_3)$$

Exercice 2.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

1. Justifier que A est diagonalisable.

2. a) Déterminer le rang de A ainsi qu'une base de l'image $\mathrm{Im}\, A$.

b) Déterminer la dimension du noyau de A, ainsi qu'une base de cet espace. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres de A ?

Dans la suite de l'exercice, on étudie trois méthodes indépendantes qui permettent de déterminer tous les éléments propres de A.

3. Soit λ une valeur propre non nulle de A et x un vecteur propre associé. En écrivant le système d'équations correspondant à $Ax = \lambda x$, déterminer les valeurs propres non nulles de A.

4. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

a) Déterminer un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2, stable par f (*i.e.* tel que $f(F) \subseteq F$).

On note g l'endomorphisme de F induit par la restriction de f à F.

b) L'endomorphisme g est-il diagonalisable ? Déterminer ses éléments propres.

c) En déduire les éléments propres de f.

5. a) Calculer A^2.

b) En déduire les valeurs propres de A.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle. Par le cours, elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. a) Les $(n-1)$ premières colonnes de A sont liées et les deux dernières sont libres. La matrice A est de rang 2.

b) Par le théorème du rang, on a : $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A. On a, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f(e_i) = ie_n$. Donc les vecteurs $2e_1 - e_2, 3e_1 - e_3, \ldots, (n-1)e_1 - e_{n-1}$ appartiennent à $\operatorname{Ker} f$. On vérifie qu'ils forment une famille libre ; c'est donc une base de $\operatorname{Ker} A$.
Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $\operatorname{Ker} A$ qui est de dimension $(n-2)$.
Comme A est diagonalisable, il reste à déterminer deux autres vecteurs propres, (associés à 1 ou 2 autres valeurs propres.

3. Soit $\lambda \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$. Il vient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_n & = & \lambda x_1 \\ 2x_n & = & \lambda x_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ (n-1)x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} kx_k & = & \lambda x_n \end{array}\right.$$

On a $x_n \neq 0$, car sinon $X = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, divisons les $(n-1)$ premières équations par λ et reportons dans la dernière équation. On obtient :

$$\Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big)x_n + nx_n = \lambda x_n$$

Ainsi λ est racine de l'équation :

$$\lambda^2 - n\lambda - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 0$$

Cette équation est la condition nécessaire et suffisante pour que λ soit valeur propre de A.

Le discriminant $\Delta = \dfrac{n(4n^2 - 3n + 2)}{3}$ est strictement positif. L'équation admet deux solutions :

$$\lambda = \frac{n+\delta}{2}, \quad \mu = \frac{n-\delta}{2}, \text{ avec } \delta = \sqrt{\Delta}$$

4. a) Si $F = \operatorname{Im} f$, alors $\dim F = 2$ et F est stable par f.

b) L'endomorphisme g reste symétrique réel, car f l'est : il est donc diagonalisable. Étudions la matrice B associée à g dans la base $(u = e_n, v = \sum_{k=1}^{n-1} ke_k)$ de F. Il vient :

$$f(u) = nu + v, f(v) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} u$$

La matrice B est donc égale à :

$$B = \begin{pmatrix} n & \alpha_{n-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha_{n-1} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

La méthode du pivot permet de conclure que les valeurs propres sont solutions de l'équation $(n-\lambda)(-\lambda) - \alpha_{n-1} = \lambda^2 - n\lambda - \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} = 0$, obtenue à la question 3.

On cherche les vecteurs propres de g sous la forme $w = xu + yv$, avec $B(w) = \lambda w$.

Un calcul donne $w = \lambda u + v$ comme premier vecteur propre et $w = \mu u + v$ comme second vecteur propre.

5. a) Le calcul donne $A^2 = nA + \alpha_{n-1} I$.

b) Le polynôme $X^2 - nX - \alpha_{n-1}$ est annulateur de A. Si λ est valeur propre de A, c'est une racine de ce polynôme. On retrouve l'équation de la question 3. Comme A admet effectivement des valeurs propres non nulles, ce sont les racines du polynôme précédent.

Exercice 2.7.

Soit E un espace euclidien et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Un endomorphisme f de E est appelé *contraction* si pour tout x de E, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Donner un exemple de contraction de E.

2. On suppose dans cette question que l'endomorphisme f est symétrique.

a) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de f, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que pour tout x de E :

$$\|P(f)(x)\| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \cdot \|x\|$$

où $\mathrm{Sp}(f)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de f.

3. On suppose désormais que f est un endomorphisme inversible de E, et on note M sa matrice associée dans la base canonique de E.

a) Montrer que ${}^tMM$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^tMM = S^2$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.

c) Montrer qu'il existe un unique couple (O, S), O orthogonale, S symétrique à valeurs propres strictement positives, tel que $M = OS$.

d) Montrer que f est une contraction si et seulement si pour toute valeur propre λ de S, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

Solution :

1. L'application identité est une contraction, l'application nulle aussi.

2. a) L'application f est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Notons $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres associées à ces vecteurs propres (quitte à réordonner la base choisie).

Si $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et :

$$||f(x)||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||\lambda_i|^2 |x_i|^2 \leqslant \max(|\lambda_i|^2)||x||^2 = |\lambda_n|^2 ||x||^2$$

avec égalité pour $x = e_n$.

Ainsi f est une contraction si et seulement si toute valeur propre λ de f vérifie : $|\lambda| \leqslant 1$.

b) Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k$. Alors

$$\begin{aligned}\|P(f)(x)\|^2 &= \|\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x)\|^2 = \|\sum_{k=0}^{p} a_k \big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i e_i\big)\|^2 \\ &= \|\sum_{i=1}^{n} \big(\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_i^k\big) x_i e_i\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i) x_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} P(\lambda_i)^2 x_i^2 \\ &\leqslant \big(\sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)|\big)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2\end{aligned}$$

Donc :

$$||P(f)(x)|| \leqslant \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} |P(\lambda)| \times ||x||$$

3. a) La matrice $A = {}^tMM$ est trivialement symétrique réelle. Pour tout vecteur X, on a : ${}^tX{}^tMMX = ||MX||^2 \geqslant 0$ et est nul si et seulement si $X = 0$, puisque M est inversible.

La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une matrice orthogonale P, une matrice diagonale, à diagonale strictement positive, D, telles que $M = PD^tP$. Soit Δ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D. On a $\Delta^2 = D$ et alors $S = P\Delta^tP$ est symétrique réelle définie positive telle que :

$$^tMM = (P\Delta^tP)(P\Delta^tP) = S^2$$

b) Comme S est inversible, posons $O = MS^{-1}$. Une vérification immédiate donne : $^tOO = I$; donc O est orthogonale.

c) Supposons qu'il existe deux tels couples $(O, S), (O_1, S_1)$. Alors

$$^tMM = S^2 = S_1^2$$

Les matrices symétriques réelles définies positives S et S_1, ont les mêmes valeurs propres (car celles-ci sont positives) et les mêmes vecteurs propres.

En effet si $SX = \lambda X$, $(\lambda > 0)$, alors $S_1^2(X) = S^2(X) = \lambda^2 X$.

Donc $0 = (S_1^2 - \lambda^2 I)X = (S_1 + \lambda I)(S_1 - \lambda I)X$. Or $(S_1 + \lambda I)$ est inversible, puisque $-\lambda$ n'est pas valeur propre de S_1. Donc $(S_1 - \lambda I)X = 0$ et X est vecteur propre de S_1. Les rôles de S et S_1 étant symétriques, on a : $S = S_1$ et $O = O_1$.

d) Comme O est une isométrie, on a $||OX|| = ||X||$ et il vient :

$$\|MX\| = \|O(SX)\| = \|SX\|$$

On termine grâce à la question 2. a).

Exercice 2.8.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficient d'indice (i, j) donné par $a_{i,j} = i + j$ pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique.

On note enfin u et v les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées dans la base canonique sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer l'image de f et le rang de A.

3. Montrer que $A = V^tU + U^tV$, où, pour toute matrice X, ^tX désigne la transposée de X.

4. En déduire le noyau de f.

5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

6. Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $Q(X) = {}^tXAX$. A-t-on pour toute colonne X non nulle ${}^tXAX \geqslant 0$? A-t-on ${}^tXAX \leqslant 0$?

Solution :

1. Par exemple pour $n = 4$, on a : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Pour tout n, la matrice A est clairement symétrique réelle et donc diagonalisable.

2. Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, la colonne C_j de A s'écrit $C_j = V + jU$. Donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(u, v)$ et comme u et v ne sont pas colinéaires :

$$\operatorname{rg}(A) = 2$$

3. On a déjà dit que :

$$A = (C_1, C_2, \ldots, C_n) = (V, V, \ldots, V) + (U, 2U, \ldots, nU) = V^tU + U^tV$$

4. Comme $\operatorname{rg}(A) = 2$, on sait que $\dim \operatorname{Ker} f = n - 2$. Or :

$$\begin{aligned} x \in \big[\operatorname{Vect}(u, v)\big]^{\perp} &\implies \langle u, x\rangle = \langle v, x\rangle = 0 \implies {}^tUX = {}^tVX = 0 \\ &\implies V^tUX + U^tVX = AX = 0 \end{aligned}$$

L'inclusion et l'égalité des dimensions donne la conclusion :

$$\operatorname{Ker} f = \big[\operatorname{Vect}(u, v)\big]^{\perp}$$

5. Si X est un vecteur propre de A associé à une valeur propre non nulle λ, alors $X \in \operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, soit $X = \alpha U + \beta V$. On écrit alors :

$$AX = \lambda X \implies \begin{cases} \alpha({}^tVU - \lambda) & + \quad \beta^tVV & = 0 \\ \quad \alpha^tUU & + \quad \beta({}^tUV - \lambda) & = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution non triviale si et seulement si :

$$\big(\langle u, v\rangle - \lambda\big)^2 - ||u||^2||v||^2 = 0$$

C'est-à-dire pour :

$$\lambda = \langle u, v\rangle \pm ||u||\times||v|| = \frac{n(n+1)}{2} \pm n\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}$$

et alors $\beta = \pm\alpha \dfrac{||u||}{||v||}$ et X est proportionnel à $||v||\, u \pm ||u||\, v$.

6. Comme $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 - n^2\,\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{n^2(1-n^2)}{12} < 0$, l'une des valeurs propres est strictement positive et l'autre strictement négative : la forme quadratique Q n'est ni positive ni négative.

Exercice 2.9.

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'application définie sur E^2 par : $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$, où tr désigne l'application trace ($\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} [A]_{i,i}$ est la somme des éléments diagonaux de A).

0. Montrer que l'application tr est linéaire, telle que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

1. Vérifier que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans la suite, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de ce produit scalaire.

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$T(M) = AM + MA$$

Montrer que T est diagonalisable dans une base orthonormée.

3. Soit D une matrice diagonale semblable à A et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D.

a) En étudiant l'équation $T(M) = \lambda M$, déterminer les valeurs propres de T en fonction des valeurs propres de A, ainsi qu'une base de vecteurs propres de T.

b) On suppose que la matrice A est définie positive, c'est-à-dire que pour toute matrice colonne non nulle X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tXAX > 0$. Que peut-on dire du noyau de T ?

Solution :

0. La linéarité de l'application tr résulte des propriétes des opérations matricielles et :

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}(B)_{k,i}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (B)_{k,i}(A)_{i,k} = \mathrm{tr}(BA)\end{aligned}$$

1. On vérifie facilement que l'application ainsi définie est bilinéaire, symétrique et définie positive, donc définit bien un produit scalaire.

2. Montrons que T est un endomorphisme auto adjoint (symétrique).
Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$:

$$\begin{aligned}\langle T(M), N\rangle &= \mathrm{tr}({}^t(AM + MA)N) = \mathrm{tr}(({}^tMA + A{}^tM)N)\\ &= \mathrm{tr}({}^tMAN + A{}^tMN) = \mathrm{tr}({}^tMAN) + \mathrm{tr}(A{}^tMN)\\ &= \mathrm{tr}({}^tMAN) + \mathrm{tr}({}^tMNA) \quad \text{car } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)\\ &= \mathrm{tr}({}^tM(AN + NA) = \langle M, T(N)\rangle\end{aligned}$$

Ainsi T est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. a) Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$. Ainsi, en posant $N = {}^tPMP$:

$$\begin{aligned}T(M) = AM + MA = \lambda M &\iff D({}^tPMP) + ({}^tPMP)D = \lambda({}^tPMP)\\ &\iff DN + ND = \lambda N\end{aligned}$$

Si $N = (n_{i,j})$, un calcul élémentaire donne $DN + ND = ((\lambda_i + \lambda_j)n_{i,j})_{i,j}$. Ainsi, l'équation précédente est équivalente à :

$$\text{pour tout } (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ (\lambda_i + \lambda_j)n_{i,j} = \lambda n_{i,j}.$$

On s'aperçoit que la base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est orthonormée pour ce produit scalaire), est une base de vecteurs propres de T et que le spectre de T est :

$$\mathrm{Spec}(T) = \{\lambda + \mu \mid (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A)^2\}$$

b) On sait qu'une matrice symétrique réelle est définie positive si et seulement si ses valeurs propres sont strictement positives. Par la question précédente, les valeurs propres de T sont également strictement positives. Ainsi 0 n'est pas valeur propre de T et $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

Exercice 2.10.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et du produit scalaire canonique noté $\langle ., .\rangle$. On désigne par $\|.\|$ la norme associée. On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne canoniquement associée.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\sigma(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A. On dit qu'une matrice symétrique A est positive si $\langle A(x), x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On écrit alors $0 \preceq A$.

1. Montrer qu'une matrice symétrique est positive si et seulement si ses valeurs propres sont positives. En déduire que si A est une matrice positive inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors la matrice A^{-1} est positive.

2. Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que $A \preceq B$ si et seulement si $0 \preceq B - A$. Montrer que $A \preceq B$ implique $({}^tM)\,AM \preceq ({}^tM)\,BM$ pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver également que $0 \preceq A \preceq I$ si et seulement si $\sigma(A) \subseteq [0,1]$ (0 et I désignent respectivement la matrice nulle et la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que AB est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et x un vecteur propre associé à λ. Montrer que Bx est un vecteur propre de BA associé à λ.

c) En déduire que $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

4. Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Justifier le fait que M puisse s'écrire sous la forme $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X_i ({}^tX_i)$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de vecteurs-colonnes orthonormée.

b) Montrer que la matrice $L = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} X_i ({}^tX_i)$ est positive et vérifie l'égalité $L^2 = M$.
Prouver que L commute avec M. On admet que c'est la seule matrice positive dont le carré vaut M et on la note $\sqrt{M}$ ou $M^{\frac{1}{2}}$.
Montrer que si M est de plus inversible, alors on a $\left(\sqrt{M}\right)^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$.

Solution :

1. Soit A une matrice positive et λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$\lambda = \langle Ax, x\rangle \geqslant 0.$$

Réciproquement, si A est symétrique, on sait d'après le cours qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale P telles que $A = ({}^tP)DP$, d'où :

$$\langle Ax, x\rangle = ({}^tx)({}^tP)DPx = ({}^t(Px))DPx = \langle D(Px), Px\rangle \geqslant 0.$$

Or avec $y = Px$ et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on a : $\langle D(Px), Px\rangle = \sum \lambda_i y_i^2$

Comme les éléments diagonaux de D sont les valeurs propres de A et que la matrice P est inversible, on en déduit facilement l'équivalence souhaitée. Si la matrice A est positive et inversible, alors la matrice A^{-1} est aussi symétrique et comme son spectre est constitué des inverses des valeurs propres de A, on voit qu'elle est positive.

2. Soient A et B deux matrices symétriques telles que $A \preceq B$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a donc $\langle (B-A)\,x, x\rangle \geqslant 0$.
Si $y \in \mathbb{R}^n$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $x = My$ et on obtient :

$$0 \leqslant \langle (B-A)My, My\rangle = \langle ({}^tM)(B-A)My, y\rangle$$

D'où l'on déduit immédiatement que $({}^tM)AM \preceq ({}^tM)BM$.
Si A est une matrice symétrique, comme on a $\sigma(I-A) = \{1-\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$, on déduit l'équivalence annoncée de la question 1.

3. Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Si AB est inversible, il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I = ABC = CAB$. On en déduit que A est surjective et B est injective, par suite A et B sont inversibles. La réciproque est immédiate.

b) Soit λ une valeur propre non nulle de AB et x un vecteur propre associé à λ. On a donc $ABx = \lambda x$; comme λ et x sont non nuls, on en déduit que $Bx \neq 0$. Par ailleurs, on observe que $BA(Bx) = B(ABx) = \lambda Bx$. D'où le résultat.

c) On a montré dans la question 3. b) que $\sigma\,(AB)\setminus\{0\} \subseteq \sigma(BA)\setminus\{0\}$. En échangeant les rôles de A et B, on obtient l'autre inclusion et on a finalement $\sigma(AB)\setminus\{0\} = \sigma(BA)\setminus\{0\}$.
Avec la question 3. a) on voit que $0 \in \sigma(AB)$ si et seulement si $0 \in \sigma(AB)$.
En récapitulant, on obtient

$$\sigma(AB) = \sigma(BA)$$

4. a) C'est du cours.

b) On a :

$$\begin{aligned} L^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}X_i[({}^tX_i)X_j]({}^tX_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle X_i, X_j\rangle\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}X_i({}^tX_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i({}^tX_i) = M \end{aligned}$$

L'égalité $(\sqrt{M})^{-1} = \sqrt{M^{-1}}$ est évidente avec la définition et l'unicité de la racine.

Exercice 2.11.

Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$. On considère la matrice J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, i, j, , 1 \leqslant i, j \leqslant n, \alpha = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}\right\}$$

1. Montrer $\mathcal{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que l'application d définie sur $\mathcal{C}$ à valeurs réelles par :

$$d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k}$$

est une application linéaire surjective non injective.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $AJ = JA = \lambda J$.

b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. Montrer que AB appartient à $\mathcal{C}$ et calculer $d(AB)$.

c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$. Montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{C}$ et trouver une relation entre $d(A)$ et $d(A^{-1})$.

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

5. Soit $(r, s) \in [\![2, n]\!]^2$. On note $A_{r,s}$ la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf $a_{1,1} = a_{r,s} = 1$ et $a_{1,s} = a_{r,1} = -1$.
Démontrer que la famille $(A_{r,s})_{(r,s)\in[\![2,n]\!]^2}$ forme une base de $\mathrm{Ker}(d)$ et en déduire la dimension de $\mathcal{C}$.

6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$. Montrer que $B = \dfrac{d(A)}{n} J$ est solution de l'équation : $A^p - B^p = (A - B)^p$.

Solution :

1. On a $I \in \mathcal{C}$ ou $0 \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \neq \emptyset$.
Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors :

$$\begin{cases} \exists\,\alpha,\ \forall\, i,j \text{ tels que } 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ \alpha = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j} \\ \exists\,\beta,\ \forall\, i,j \text{ tels que } 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ \beta = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{i,k} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{k,j} \end{cases}$$

Donc :

$$\forall\, i,j,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{i,k} + \mu.b_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \lambda.a_{k,j} + \mu.b_{k,j} = \lambda\alpha + \mu\beta$$

ce qui implique que $\lambda A + \mu B \in \mathcal{C}$ et donc que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.

2. Le calcul précédent montre exactement :

$$\forall\,\lambda,\mu \in \mathbb{R}, d(\lambda A + \mu B) = \lambda d(A) + \mu d(B)$$

Ainsi d est une forme linéaire sur $\mathcal{C}$.

Or, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $d(\lambda J) = \lambda$, d'où la surjectivité et d est non injective pour des raisons de dimension.

3. a) Soit $A \in \mathcal{M}$. On a : :

$AJ = (c_{i,j})_{i,j} = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\big)_{i,j}$ et $JA = (d_{i,j})_{i,j} = \big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,j}\big)_{i,j}$

Donc :

$$AJ = JA = \lambda J \Longleftrightarrow \forall\, i,j,\ \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = \lambda \Longleftrightarrow A \in \mathcal{C} \text{ et } d(A) = \lambda$$

b) Soit A et B deux matrices de $\mathcal{C}$. On a :

$$B \in \mathcal{C} \implies BJ = JB \implies ABJ = AJB$$

et $A, B \in \mathcal{C} \implies AJ = JA = d(A)J$, d'où

$$ABJ = A(BJ) = AJB = (AJ)B = JAB = d(A)JB = d(A)\times d(B)J$$

ce qui prouve que AB est aussi dans $\mathcal{C}$ et $d(AB) = d(A)\times d(B)$.

c) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}$.

$$AJ = d(A)J \implies J = d(A)A^{-1}J, \text{ et } JA = d(A)J \implies J = d(A)JA^{-1}$$

Nécessairement $d(A) \neq 0$ sinon la matrice J serait la matrice nulle et :

$$A^{-1}J = JA^{-1} = \frac{1}{d(A)}J$$

ce qui prouve que A^{-1} appartient également à $\mathcal{C}$ et $d(A^{-1}) = \dfrac{1}{d(A)}$.

4. Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} d$ est le noyau d'une forme linéaire, c'est un hyperplan de $\mathcal{C}$.

$\operatorname{Vect}(J)$ est une droite vectorielle de $\mathcal{C}$, d'où $\dim(\mathcal{C}) = \dim \operatorname{Ker} d + \dim \operatorname{Vect}(J)$.

Soit $A \in \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Vect}(J)$. Alors :

$$A = \alpha J \implies d(A) = \alpha n = 0 \implies \alpha = 0 \implies A = 0$$

d'où :

$$\mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Vect}(J) = \{0\}$$

Donc $\mathrm{Ker}(d)$ et $\mathrm{Vect}(J)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{C}$.

5. $\star$ Soit $(\lambda_{r,s})$ une famille de réels telle que $\sum\limits_{r,s} \lambda_{r,s} A_{r,s} = 0$.

Soit (i,j) tel que $2 \leqslant i,j \leqslant n$; en égalant les termes génériques des deux matrices on obtient directement : $\lambda_{i,j} = 0$.

$\star$ La famille $(A_{r,s})_{r,s}$ est génératrice. Soit $A = \big(a_{i,j}\big) \in \mathcal{C}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=2}^{n} a_{1,j} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\sum\limits_{j=2}^{n} a_{n,j} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} -a_{1,j} & 0 & \cdots & a_{1,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=2}^{n} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 & -\sum\limits_{i=2}^{n} a_{i,j} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{2,j} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ -a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 & a_{n,j} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{i,j} a_{i,j} A_{i,j}
\end{aligned}$$

Les matrices $A_{r,s},\ 2 \leqslant r,s \leqslant n$ forment donc une base de $\mathrm{Ker}(d)$ et

$$\dim(\mathrm{Ker}\, d) = (n-1)^2.$$

et

$$\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathrm{Ker}\, d) + \dim(\mathrm{Vect}(J)) = (n-1)^2 + 1$$

6. Soit p un entier naturel non nul et A une matrice de $\mathcal{C}$.

Le calcul donne $AB = B^2$, puis, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, $A^i B = B^{i+1}$.

Les matrices A et B commutent ; on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(A-B)^p &= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i} = A^p + \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} A^i (-B)^{p-i} \\
&= A^p + \left[\sum_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i} (-1)^{p-i}\right] B^p
\end{aligned}$$

Or $(1-1)^p = 0 = \sum\limits_{i=0}^{p} \binom{p}{i}(-1)^{p-i} = 1 + \sum\limits_{i=0}^{p-1} \binom{p}{i}(-1)^{p-i}$
d'où :

$$(A-B)^p = A^p - B^p$$

Exercice 2.12.

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, muni du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

1. Déterminer une base orthonormale (S_0, S_1, S_2) de E telle que, pour tout $i \in [\![0,2]\!]$, le polynôme S_i soit de degré i et de coefficient du terme dominant strictement positif.

2. On définit sur $E \times E$ l'application φ suivante :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2}\big(P(0)Q(1) + P(1)Q(0)\big)$$

On note $A = (a_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant 2}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \varphi(S_i, S_j)$

a) L'application φ est-elle un produit scalaire sur $E \times E$?

b) Écrire la matrice A et justifier l'existence d'une matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$^tRAR = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Soit x_1, x_2, x_3 réels et $P = x_0S_0 + x_1S_1 + x_2S_2$.

Montrer que, si l'on pose $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a : $\varphi(P,P) = {}^tXAX$. Calculer $\langle P,P\rangle$ en fonction de $Y = R^{-1}X$.

3. On considère l'application f définie sur $E \setminus \{0\}$ par : $f(P) = \dfrac{P(0)P(1)}{\int_0^1 P^2(t)dt}$.

Montrer que f admet sur $E \setminus \{0\}$ un maximum dont on donnera la valeur.

Solution :

1. On utilise le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Après calculs, on obtient :

$$S_0 = 1, \quad S_1 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}), \quad S_2 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$$

2. a) On vérifie aisément que φ est une forme bilinéaire symétrique. Mais elle n'est pas positive, en effet $\varphi(P, P) = P(0)P(1)$ et il suffit donc de prendre un polynôme P tel que $P(0)P(1) < 0$. Par exemple $P = S_1$.

b) On obtient : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & -3 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Cette matrice est réelle et symétrique : elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

Plutôt que de chercher à calculer ses valeurs propres, on se fonde sur l'énoncé et on montre que ses valeurs propres sont $-3, 0, 6$ en exhibant trois vecteurs propres associés.

Par exemple, un vecteur propre associé à la valeur propre -3 est en évidence : $u_1 = e_2$ et un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $u_2 = \sqrt{5}e_1 - e_3$ et un vecteur propre associé à la valeur propre 6 est dans l'orthogonal du sous-espace engendré par u_1, u_2 ; par exemple $u_3 = e_1 + \sqrt{5}e_3$.

En normant chacun des trois vecteurs u_1, u_2, u_3, on obtient une base orthonormée et une matrice de passage R orthogonale.

c) On pose $P = x_0S_0 + x_1S_1 + x_2S_2$. Après calculs

$$\varphi(P, P) = x_0^2 - 3x_1^2 + 5x_2^2 + 2\sqrt{5}x_0x_2 = {}^tXAX$$

et, comme ${}^tR = R^{-1}$:

$$\varphi(P, P) = {}^tXAX = {}^t(R^{-1}X)A{}^tRX = {}^tYDY$$

D'un autre côté, la famille (S_0, S_1, S_2) formant une base orthonormée de E pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$, il vient : $\langle P, P\rangle = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$.

On remarque que $f(P) = \dfrac{\varphi(P, P)}{||p||^2}$, car $||P||^2 = {}^tXX = {}^tYY$.

En posant $Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pour tout $P \neq 0$:

$$f(P) = \frac{-3y_0^2 + 6y_2^2}{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2}$$

Donc $f(P) \leqslant 6$ et pour $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $f(Q) = 6$.

Ainsi
$$\max_{P\neq 0} f(P) = 6$$

Exercice 2.13.

Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) Montrer que A' n'admet pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2.

b) Déterminer un polynôme annulateur de A'.

c) Justifier que tout polynôme annulateur de A' est aussi annulateur de A.

d) Déterminer un polynôme annulateur de A de degré minimal et de coefficient dominant égal à 1.

Solution :

1. $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$
$$\underset{L_2 \leftarrow L_2-(2-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-3) & * \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{1, 3\}$ et des calculs simples donnent :
$$E_{(1)}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } E_{(3)}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas diagonalisable.

2. Prenons $v_1 = (1, -1, 0)$ et $v_2 = (1, 1, 0)$. On a $f(v_1) = v_1$ et $f(v_2) = 3v_2$.

On cherche alors $v_3 = (x, y, z)$ tel que $f(v_3) = v_2 + 3v_3$, ce qui s'écrit :

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 + 3x \\ x + 2y + z = 1 + 3y \\ \qquad\quad 3z = 0 + 3z \end{cases}$$

et on peut prendre $v_3 = (0, 0, 1)$. On vérifie alors que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre, donc est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$. On a par construction :

$$A' = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. a) 1 et 3 sont racines de tout polynôme annulateur de A' et

$$(A' - I)(A' - 3I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

b) On vérifie alors que $(A' - I)(A' - 3I)(A' - 3I) = 0$ et :

$$Q = (X - 1)(X - 3)^2 \text{ est annulateur de } A'$$

c) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$, on a $A' = P^{-1}AP$ et pour tout polynôme R : $R(A') = P^{-1}R(A)P$, les matrices A et A' ont donc les mêmes polynômes annulateurs.

d) Il n'y a pas de polynôme adéquat de degré inférieur ou égal à 2 et Q convient.

Exercice 2.14.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$. On note alors : $A \geqslant 0$.

De même A est *strictement positive* si, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} > 0$. On note alors : $A > 0$.

Si $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $|B|$ la matrice positive de terme général $(|b_{i,j}|)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Dans cette question, A et B sont deux matrices carrées réelles d'ordre n.

a) On suppose $A \geqslant 0$ et $A \neq 0$. A-t-on $A > 0$?

b) On suppose $A \geqslant 0$ et inversible. A-t-on $A^{-1} \geqslant 0$?

c) On suppose $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$. A-t-on $AB \geqslant 0$?

d) On suppose $A \geqslant 0$ et $B > 0$ telles que $AB = 0$. A-t-on $A = 0$?

2. a) Soit z_1, z_2 deux nombres complexes tels que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Montrer qu'il existe θ réel tel que $z_1 = |z_1|e^{i\theta}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta}$.

b) Soit $(z_1,\dots,z_p)$ p nombres complexes ($p\geqslant 2$) tels que $\big|\sum\limits_{i=1}^{p} z_i\big| = \sum\limits_{i=1}^{p} |z_i|$. Montrer qu'il existe θ réel tel que pour tout $j\in[\![1,p]\!]$, $z_j=|z_j|\mathrm{e}^{i\theta}$.

3. On suppose que $A>0$ et que $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifient $|AB|=|A|{\times}|B|$. Montrer qu'il existe un n-uplet de réels $(\theta_1,\dots\theta_n)$ tel que $B=|B|{\times}D$, où D est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\mathrm{e}^{i\theta_1},\mathrm{e}^{i\theta_2},\dots,\mathrm{e}^{i\theta_n}$.

Solution :

Si $n=1$, le problème est dégénéré, nous supposerons donc à partir de maintenant $n\geqslant 2$.

1. a) I_n est positive, non nulle, mais n'est pas strictement positive.

b) Non plus, proposons : $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ clairement positive et inversible, avec $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ qui n'est pas positive.

c) Oui, car $(AB)_{i,j}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\geqslant 0$.

d) On a donc, pour tous indices i et j : $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}=0$, la stricte positivité des coefficients de B et la positivité de ceux de A montre alors que $A=0$.

2. a) Si $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, alors en élevant au carré :

$$(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|$$

Soit :

$$2\,\mathrm{Ré}(\overline{z_1}z_2)=2|\overline{z_1}z_2|$$

Ce qui signifie que $\overline{z_1}z_2$ est un réel positif ou nul, donc que z_1 et z_2 ont même argument (modulo 2π)

b) On procède par récurrence sur p :

$\to$ Pour $p=2$, c'est le résultat de la question précédente.

$\to$ Supposons la relation vérifiée au rang $p-1$ et posons $u=z_1+\cdots+z_{p-1}$. On a donc :

$$\sum_{k=1}^{p}|z_k|=|u+z_p|\leqslant|u|+|z_p|\leqslant\sum_{k=1}^{p-1}|z_k|+|z_p|=\sum_{k=1}^{p}|z_k|$$

D'où l'égalité centrale et (cas $p=2$) il existe θ tel que $u=|u|\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z_p=|z_p|\mathrm{e}^{i\theta}$.

De plus $|u| = \left|\sum_{k=1}^{p-1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{p-1} |z_k|$. L'hypothèse de récurrence s'applique alors et prouve que tous les nombres ont même argument.

3. L'hypothèse donne, pour tous indices ℓ et j :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\ell,k} b_{k,j}\right| = \sum_{k=1}^{n} |a_{\ell,k} b_{k,j}|$$

Par la question précédente, comme $a_{\ell,k} > 0$, il existe $\theta_j \in \mathbb{R}$ tel que pour tout k, $b_{k,j} = |b_{k,j}| \mathrm{e}^{i\theta_j}$, ce qui donne :

$$B = |B| \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{i\theta_1}, \ldots, \mathrm{e}^{i\theta_n})$$

Exercice 2.15.

Soit p un entier, $p \geqslant 1$ et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.

1. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_p[X]$?

2. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts. On considère les polynômes $L_0, \ldots, L_p$ définis, pour tout k de $[\![0, p]\!]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{0 \leqslant i \leqslant p, i \neq k} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_k - \lambda_i)}$$

a) Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_p)$ constitue une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

b) Soit $m \in [\![0, p]\!]$. Déterminer les coordonnées de X^m dans cette base.

3. Soit n un entier $n \geqslant 2$ et S une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_p\}$ l'ensemble des valeurs propres de S (deux à deux distinctes). On pose, pour $k \in [\![0, p]\!]$, $P_k = L_k(S)$.

a) Montrer que $\operatorname{Im}(P_k) = \operatorname{Ker}(\lambda_k I - S)$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Vérifier que P_k est la matrice d'un projecteur.

c) Prouver que $I = \sum_{k=0}^{p} P_k$ et que $P_k P_\ell = 0$ pour tout $(k, \ell) \in [\![0, p]\!]^2, k \neq \ell$.

4. Soit A une matrice symétrique appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Décrire l'ensemble des valeurs propres de A^5 en fonction de celles de A. Montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A = P(A^5)$.

5. On considère deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^5 = B^5$. Montrer que $A = B$.

6. On considère à nouveau deux matrices symétriques A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^2 = B^2$. Peut-on en déduire que $A = B$?

Solution :

1. $\dim(\mathbb{R}_p[X]) = p + 1$.

2. a) Si $\alpha_0 L_0 + \cdots + \alpha_p L_p = 0$, alors pour tout k de $[\![0, p]\!]$:

$$\alpha_0 L_0(\lambda_k) + \cdots + \alpha_p L_p(\lambda_k) = 0$$

et comme $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker), il reste $\alpha_k = 0$.
La famille proposée est donc libre, de cardinal $p + 1$ et formée de polynômes appartenant tous à $\mathbb{R}_p[X]$, ainsi :

$$(L_0, \dots, L_p) \text{ est une base de } \mathbb{R}_p[X]$$

b) On écrit $X^m = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k L_k(X)$ et en substituant à X la valeur λ_i, il vient $\lambda_i^m = a_i$, soit :

$$X^m = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i^m L_i(X)$$

3. Comme S est symétrique réelle, on sait que $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{i=0}^{p} \mathrm{Ker}(S - \lambda_i I)$ (en identifiant vecteurs et matrices colonnes), et cette somme directe est même formée de sous-espaces deux à deux orthogonaux.

a) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ écrit sous la forme $x = \sum\limits_{i=0}^{p} x_i$, avec $\forall\, i, x_i \in \mathrm{Ker}(S - \lambda_i I)$.
Comme $Sx_i = \lambda_i x_i$, on a $S^2 x_i = SSx_i = \lambda_i S x_i = \lambda_i^2 x_i$, ...et plus généralement :

$$L_k(S)x_i = L_k(\lambda_i)x_i$$

Ainsi :

$$P_k x = L_k(S)x = \sum_{i=0}^{p} L_k(S)x_i = \sum_{i=0}^{p} L_k(\lambda_i)x_i = L_k(\lambda_k)x_k = x_k$$

On voit donc que $\mathrm{Im}\, P_k \subset \mathrm{Ker}(S - \lambda_k I)$ et comme l'inclusion réciproque est évidente on a l'égalité souhaitée.

b) On a $P_k^2 = L_k(S)^2$ et :

$$P_k^2 x = P_k P_k x = P_k x_k = L_k(S)x_k = L_k(\lambda_k)x_k = x_k = P_k x$$

D'où le résultat.

c) On a : $1 = \sum\limits_{k=0}^{p} L_k(X)$, d'où $I = \sum\limits_{k=0}^{p} L_k(S) = \sum\limits_{k=0}^{p} P_k$.

Si $k \neq \ell$, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on a : $P_k P_\ell x = L_k(S)(P_\ell x) = L_k(\lambda_\ell)(P_\ell x) = 0$.

4. Il existe Q orthogonale et D diagonale telles que $A = QD^tQ$, d'où $A^5 = QD^{5t}Q$.

On en déduit que :

$$\sigma(A^5) = \{\lambda_0^5, \dots, \lambda_p^5\}$$

(Comme $t \mapsto t^5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, ces nombres $\nu_i = \lambda_i^5$ sont bien deux à deux distincts)

Soient $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_p$ les polynômes associés à la famille $\nu_0, \dots, \nu_p$ et $P = \sum\limits_{i=0}^{p} \lambda_i \widetilde{L}_i$.

On a $P(\nu_i) = \lambda_i$, d'où $P(D^5) = D$ et ainsi $P(A^5) = A$.

5. Si $A^5 = B^5$, on a $\sigma(A^5) = \sigma(B^5)$ et donc $\sigma(A) = \sigma(B)$ et avec les notations précédentes le même polynôme P sert pour A et pour B :
$P(A^5) = P(B^5)$, soit $A = B$.

6. La réponse est non, puisque l'on peut avoir $B = -A$.

Exercice 2.16.

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme euclidienne associée. Soit u un endomorphisme symétrique de E. On dit que u est positif si $\langle u(x), x \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

1. On considère un endomorphisme symétrique u de E. Montrer que u est positif si et seulement si ses valeurs propres sont positives.

2. On considère une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E. Pour $m \in [\![1, n]\!]$, on définit l'endomorphisme p_m de E en posant pour tout x de E :

$$p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} \langle x, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k$$

a) Montrer que p_m est la projection orthogonale sur le sous-espace F engendré par la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$.

b) Établir l'égalité suivante : $\sum\limits_{\ell=1}^{n} \|p_m(e_\ell)\|^2 = m$, valable pour toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

3. On considère un endomorphisme symétrique positif u sur l'espace E. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u. On note $u(e_i) = \lambda_i e_i$ et on suppose $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. Soit toujours $m \in [\![1, n]\!]$.

a) Montrer que l'on a : $\sum\limits_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \left\| p_m(e_i)\right\|^2$.

b) On suppose dans cette question seulement que $1 \leqslant m < n$. Prouver que :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_{m+1} - \lambda_i)\big(1 - \left\| p_m(e_i)\right\|^2\big)$$

c) Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Déduire de ce qui précède que l'on a toujours :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

d) Prouver que pour toute base orthonormée $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e) Que peut-on en déduire pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ symétrique et à valeurs propres positives ?

Solution :

1. Soit u un endomorphisme positif de E et λ une valeur propre de u. Si x est un vecteur propre associé à λ, on a :

$$\lambda = \langle u(x), x\rangle \geqslant 0$$

Réciproquement, si u est symétrique de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$, u est diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ associée aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes) et pour tout vecteur x :

$$\langle u(x), x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, e_k\rangle^2 \geqslant 0$$

2. a) Il est clair que $p_m(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ si $1 \leqslant i \leqslant m$ et $p_m(x_i) = 0$ si $i > m$. On en déduit immédiatement que p_m est le projecteur orthogonal sur F.

b) On a :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \|p_m(e_\ell)\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \| \sum_{k=1}^{m} \langle e_\ell, \varepsilon_k\rangle \varepsilon_k\|^2 = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \langle e_\ell, \varepsilon_k\rangle^2 = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \langle e_\ell, \varepsilon_k\rangle^2$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \|\varepsilon_k\|^2 = m$$

3. a) $\sum\limits_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} \langle \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varepsilon_k, e_i\rangle e_i, \varepsilon_k\rangle = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \varepsilon_k, e_i\rangle^2$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Big(\sum_{k=1}^{m} \langle \varepsilon_k, e_i \rangle^2 \Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2$$

b) D'après la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{m} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1} \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1} (m - \sum_{i=1}^{m} \|p_m(e_i)\|^2)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \|p_m(e_i)\|^2 + \lambda_{m+1} \sum_{i=1}^{m} (1 - \|p_m(e_i)\|^2)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + \sum_{i=m+1}^{n} (\lambda_{m+1} - \lambda_i)(1 - \|p_m(e_i)\|^2)$$

c) Comme $\lambda_{m+1} - \lambda_i \leqslant 0$ pour $m+1 \leqslant i \leqslant n$, on déduit l'inégalité souhaitée de la question précédente.

d) p_n est l'identité et la question a) donne directement :

$$\sum_{k=1}^{n} \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

e) On a donc pour tout m de $[\![1, n]\!]$:

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

Exercice 2.17.

1. Montrer que la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ admet une application réciroque que l'on note $\operatorname{Arc\,cos}$.

On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout $x \in [-1, 1]$: $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arc\,cos} x)$.

2. a) Calculer $T_0(x), T_1(x)$ et $T_2(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on a :

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme. Déterminer son degré et le coefficient de son terme de plus haut degré.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de T_n. En déduire une expression de T_n en fonction de n.

On note $E = \mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p, où p est un entier naturel fixé quelconque.

4. Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on pose : $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$

a) Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

b) Déterminer une base orthonormale de E muni de ce produit scalaire.

Solution :

1. $\cos' = -\sin$ et la restriction de la fonction sin à $]0,\pi[$ est strictement positive, donc la restriction de la fonction cos à $[0,\pi]$ réalise une bijection strictement décroissante de ce segment sur $[-1,1]$. On note $\operatorname{Arc}\cos$ la bijection réciproque.

2. a) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = \cos(\operatorname{Arc}\cos x) = x$ et

$T_2(x) = \cos(2\operatorname{Arc}\cos x) = 2\cos^2(\operatorname{Arc}\cos x) - 1 = 2x^2 - 1.$

b) On a :

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$$

Soit, avec $\theta = \operatorname{Arc}\cos x$:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x).$$

c) Une récurrence simple montre alors que pour tout n de $\mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} pour $n \geqslant 1$.

3. Posons, pour $x \in [-1,1], \theta = \operatorname{Arc}\cos x$.

Alors : $T_n(x) = 0 \iff \cos(n\operatorname{Arc}\cos x) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Comme on doit avoir $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, on trouve $\theta = \dfrac{2k+1}{2n}\pi$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Ainsi les nombres $\cos\big(\frac{2k+1}{2n}\pi\big)$ sont racines de T_n. Ces nombres étant deux à deux distincts et T_n de degré n, on a fait le plein et il n'y a pas d'autre racines.

On en déduit, pour $n \geqslant 1$:

$$T_n = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\big(X - \cos\big(\frac{2k+1}{2n}\pi\big)\big)$$

4. a) Comme $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-t}\sqrt{1+t}$, deux applications de la règle de Riemann assurent la convergence de l'intégrale écrite. Il est alors clair que $(P,Q) \mapsto \langle P,Q\rangle$ est symétrique, linéaire par rapport au premier argument et $\langle P,P\rangle \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si P^2 est nul en tout point de $]-1,1[$, donc si et seulement si P est le polynôme nul.

$$\langle .,.\rangle \text{ est un produit scalaire}$$

b) Le changement de variable $x = \cos(\theta)$ s'imposant :

$$\langle T_n, T_k\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(k\theta)}{|\sin(\theta)]}(-\sin\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(k\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (\cos(n+k)\theta) + \cos(n-k)\theta))\,d\theta$$

⋆ Si $n \neq k$, $\langle T_n, T_k\rangle = 0$;

⋆ Si $k = n \neq 0$, $\langle T_n, T_n\rangle = \frac{\pi}{2}$;

⋆ Si $k = n = 0$, $\langle T_0, T_0\rangle = \pi$.

Pour trouver une base orthonormale de E (de plus graduée en degrs), il suffit de prendre la famille :

$$(\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_1, \dots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}T_p)$$

Exercice 2.18.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit T sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$\text{pour tout } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) : T(M) = AM$$

1. a) Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que λ est une valeur propre de T en exhibant une matrice propre associée.

3. On suppose dans cette question que A est diagonalisable. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres de A.

a) En considérant les matrice $X_i\,{}^tX_j$, pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, montrer que T est diagonalisable.

b) Déterminer le rang de $X_i\,{}^tX_j$.

On admet que toute matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre.

4. On suppose dans cette question que T est diagonalisable. Soit $(M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une base de vecteurs propres de T.

a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^n$, définie par $\varphi(M) = MX$ est une application linéaire surjective.

b) En considérant la famille $\big(\varphi(M_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que A est diagonalisable.

Solution :

1. a) T est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même et sa linéarité est banale :

$$T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$$

b) $\star$ Si T est un automorphisme, alors T est surjective et il existe M telle que $T(M) = I$, soit $AM = I$ et A est inversible, d'inverse M.

$\star$ Réciproquement, si A est inversible, alors pour toute matrice B, on a :

$$T(A^{-1}B) = AA^{-1}B = B$$

et T est surjective, donc est un automorphisme.

2. On a $AX = \lambda X$, donc en notant $\widetilde{X}$ la matrice carrée d'ordre n dont toutes les colonnes sont égales à la colonne X, on a en calculant «par blocs» :

$$T(\widetilde{X}) = A\widetilde{X} = \lambda\widetilde{X}$$

et λ est bien valeur propre de T, puisque $\widetilde{X}$ n'est pas la matrice nulle.

3. a) $X_i{}^tX_j$ est une matrice carrée d'ordre n différente de la matrice nulle, et :

$$T(X_i{}^tX_j) = AX_i{}^tX_j = (AX_i)^tX_j = \lambda_i X_i{}^tX_j$$

Ainsi $X_i{}^tX_j$ est vecteur propre de T pour la valeur propre λ_i.
Soit alors $(\lambda_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une famille de scalaires telle que $\sum\limits_{i,j} \lambda_{i,j}X_i{}^tX_j = 0$.

On a donc : $\sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{i,j}X_i)^tX_j = 0$

Comme la famille $({}^tX_1,\dots,{}^tX_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$, ceci impose (raisonner terme à terme) pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_{i,j}X_i = 0$, et la famille $(X_1,\dots,X_n)$ étant libre dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, tous les scalaires $\lambda_{i,j}$ sont nuls.
On a ainsi construit une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de T.

b) Ces matrices sont clairement de rang 1 (matrices non nulles dont toutes les colonnes sont proportionnelles à l'une d'elles)

4. a) X est une matrice colonne non nulle, donc il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathbb{C}^n$) dont le premier vecteur est X. Pour $Y\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque, le théorème fondamental de l'algèbre linéaire assure qu'il existe

un endomorphisme M de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = Y$. Ceci prouve que φ est surjective.

b) $(M_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc la famille $(\varphi(M_{i,j}))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est génératrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^n$, on peut en extraire une base de $\mathbb{C}^n$.

Or $T(M_{i,j}) = \lambda_{i,j} M_{i,j}$, donc $A(M_{i,j}X) = \lambda_{i,j}(M_{i,j}X)$, c'est-à-dire :

$$A\varphi(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}\varphi(M_{i,j})$$

Ainsi les matrices $\varphi(M_{i,j})$ choisies sont propres pour A et comme elles forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, A est diagonalisable.