1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit $f : D = (\mathbb{R}_+^*)^3 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y, z) = x\ln(x) + y\ln(y) + z\ln(z)$$

1. La fonction f est-elle minorée, majorée, bornée sur D ?

2. Justifier que la fonction f est de classe C^1 sur D.

Soit a un réel strictement positif. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C}_a = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + y + z = 3a\big\}$$

et on note $g = f|_{\mathcal{C}_a}$ la restriction de f à $\mathcal{C}_a$.

3. Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y, z), alors :

$$1 + \ln(x) = 1 + \ln(y) = 1 + \ln(z)$$

4. Étudier l'existence des extremums locaux de g. Comparer la (les) valeur(s) obtenue(s) à celle(s) trouvée(s) à la première question.

5. Retrouver les extremums de g en se ramenant à l'étude des extremums d'une fonction de deux variables bien choisie.

Solution :

1. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto x\,\ln x$. Alors $\varphi'(x) = 1 + \ln x$ et donc :

x	0		$1/\mathrm{e}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

(on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = 0$)

φ décroît sur $]0, 1/\mathrm{e}]$ de 0 à $-1/\mathrm{e}$, puis croît sur $[1/\mathrm{e}, +\infty[$ de $-1/\mathrm{e}$ à $+\infty$. Ainsi f est non majorée sur D et :

$$\min_D f = -3/\mathrm{e}.$$

2. La fonction f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur D ouvert.

On a par exemple $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 + \ln x$.

3. On cherche ici à déterminer un extremum sous contrainte linéaire. La condition nécessaire d'extremum en M sous contrainte linéaire est :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}_M(f) \in V^\perp$$

où V est l'espace vectoriel associé à $\mathcal{C}_a$. Comme $V^\perp$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, 1)$, cela revient à dire que le gradient a ses trois coordonnées égales, d'où la relation demandée.

4. Le seul point candidat est donc le point (a, a, a). On utilise ensuite un développement limité :

$$\begin{aligned} g(a+u, a+v, a+w) &= (a+u)\left[\ln a + \ln\left(1 + \frac{u}{a}\right)\right] + \cdots \\ &= 3a\ln a + (u+v+w)(1+\ln a) \\ &\qquad + \frac{1}{2a}(u^2+v^2+w^2) + o(u^2+v^2+w^2) \end{aligned}$$

Or $(a+u, a+v, a+w) \in \mathcal{C}_a \implies u+v+w = 0$, d'où

$g(a+u, a+v, a+w) - g(a, a, a) \geqslant 0$ pour (u, v, w) « assez petit ».

g possède un minimum (local) en (a, a, a), valant $3a\ln a$.

On remarque que $\min\limits_{\mathcal{C}_a} g = 3\varphi(a) \geqslant 3\min\varphi = -3/\mathrm{e} = \min\limits_D f$ *ce qui est cohérent.*

5. Avec $z = 3a - x - y$, il vient :

$$g(x, y, z) = h(x, y) = x\ln(x) + y\ln(y) + (3a-x-y)\ln(3a-x-y)$$

et :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \ln x - \ln(3a-x-y) \\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \ln y - \ln(3a-x-y) \end{cases}$$

Les points critiques de h vérifient : $\begin{cases} \ln x - \ln(3a - x - y) = 0 \\ \ln y - \ln(3a - x - y) = 0 \end{cases}$

Soit : $\begin{cases} x = 3a - x - y \\ y = 3a - x - y \end{cases}$ et il n'y a qu'une solution :$x = y = a$.

Puis :

$$r = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3a - x - y} \; ; \; t = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{3a - x - y}$$

$$s = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{1}{3a - x - y}$$

D'où en (a, a) : $rt - s^2 = \frac{2}{a} \times \frac{2}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 > 0$, et, comme $r > 0$, h admet en (a, a) un minimum local.

Exercice 1.2.

1. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1 + x))^n dx$ existe. On la note I_n.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

3. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n + 1)I_n$$

4. a) Soit $\varepsilon \in \,]0, 1[$. Établir la majoration :

$$I_n \leqslant [\ln(2 - \varepsilon)]^n + \varepsilon(\ln 2)^n$$

b) En choisissant judicieusement ε (qui peut dépendre de n), montrer que :

$$I_n = o((\ln 2)^n)$$

5. Déduire des questions précédentes un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6. Montrer que la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

Solution :

1. La fonction $x \mapsto \big(\ln(1 + x)\big)^n$ est continue sur $[0, 1]$; l'intégrale I_n existe donc.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant \ln(1 + x) \leqslant \ln 2 < 1$. La suite $\big((\ln(1 + x))^n\big)_n$ est donc positive, décroissante et par croissance de l'opérateur «intégration

sur $[0,1]$ », la suite $(I_n)_n$ est positive décroissante. Elle converge donc et sa limite est 0 puisque :

$$0 < I_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

3. Une intégration par parties en prenant $x \mapsto x+1$ comme primitive de $x \mapsto 1$ donne :

$$I_{n+1} = \int_0^1 1 \times (\ln(1+x))^{n+1}\,dx$$

$$I_{n+1} = \Big[(x+1)(\ln(1+x))^{n+1}\Big]_0^1 - (n+1)\int_0^1 (\ln(1+x))^n\,dx$$

$$= 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n.$$

4. a) Soit $\varepsilon \in \,]0,1[$. On a :

$$I_n = \int_0^{1-\varepsilon} \big(\ln(1+x)\big)^n dx + \int_{1-\varepsilon}^1 \big(\ln(1+x)\big)^n dx$$

$$\leqslant (\ln(2-\varepsilon))^n(1-\varepsilon) + (\ln 2)^n\varepsilon$$

$$\leqslant [\ln(2-\varepsilon)]^n + \varepsilon(\ln 2)^n.$$

b) Choisissons $\varepsilon_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et posons $a_n = \dfrac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n}$. Il vient :

$$\ln a_n = \ln\Big(\frac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n}\Big) = n\ln\Big(\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{\ln 2}\Big) \underset{(\infty)}{\sim} n\Big[\frac{\ln(2-\varepsilon_n)}{\ln 2} - 1\Big]$$

Soit :

$$\ln(a_n) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{n}{\ln 2}\ln\big(1 - \tfrac{\varepsilon_n}{2}\big) \underset{(\infty)}{\sim} -\frac{n\varepsilon_n}{2\ln 2}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Il existe donc n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $\dfrac{[\ln(2-\varepsilon_n)]^n}{(\ln 2)^n} \leqslant \varepsilon$ et ainsi :

$n \geqslant n_0 \implies \dfrac{I_n}{(\ln 2)^n} \leqslant 2\varepsilon$, d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{(\ln 2)^n} = 0, \text{ soit : } I_n = o((\ln 2)^n)$$

5. La relation de récurrence obtenue à la question 3, donne :

$$I_{n+1} = 2(\ln 2)^{n+1} - (n+1)I_n = o((\ln 2)^{n+1})$$

Donc $(n+1)I_n \sim 2(\ln 2)^{n+1}$, et :

$$I_n \sim \frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$$

6. La série $\sum \frac{I_n}{n!}$ converge car $0 \leqslant \frac{I_n}{n!} \leqslant \frac{(\ln 2)^n}{n!}$. La relation démontrée lors de la question 3 donne, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\frac{I_k}{k!} + \frac{I_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{2(\ln 2)^k}{k!}$$

En sommant ces relations de 1 à n, il vient :

$$\frac{I_n}{n!} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{I_k}{k!} + I_0 = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{I_k}{k!} = \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln 2)^k}{k!} - I_0 = 2(\mathrm{e}^{\ln 2} - 1) + 1$$

Soit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k}{k!} = \frac{3}{2}$$

Exercice 1.3.

Soit f l'application définie par :

$$f : x \mapsto \int_0^1 (1-t^2)^x dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f.

On admet que f est continue sur D.

2. Montrer que f est décroissante sur D.

3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer, pour tout x de D, une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$.

4. a) En déduire un équivalent de $f(x)$, lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

b) Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x+1)$ et $f(x)$ sont équivalents.

5. a) Soit $n = \lfloor x \rfloor$ (partie entière de x). Montrer que lorsque x tend vers $+\infty$, on a $f(x) \sim f(n)$.

b) Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) \sim Cx^{-1/2}$, où C est une constante qu'on ne demande pas de déterminer.

(on pourra étudier la série de terme général $\ln\left(\frac{f(n-1)}{f(n)}\right)$.)

Solution :

1. L'application $t \mapsto \mathrm{e}^{x\ln(1-t^2)}$ est continue sur l'intervalle $[0,1[$.
Au voisinage gauche de 1 (pour t), on a : $(1-t^2)^x = (1+t)^x(1-t)^x \sim \dfrac{2^x}{(1-t)^{-x}}$, et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^{-x}}$ est intégrable sur $[1/2,1]$ si et seulement si $x > -1$ (règle de Riemann). Donc :

$$D =]-1,+\infty[$$

2. Soit x, y tels que $-1 < x < y$. Comme $\ln(1-t^2) < 0$ sur $[0,1[$, par croissance de la fonction exponentielle, il vient $\mathrm{e}^{x\ln(1-t^2)} > \mathrm{e}^{y\ln(1-t^2)}$, et $f(x) > f(y)$. Ainsi f est décroissante sur D.

3. On intègre $t \mapsto 1$ en $u : t \mapsto t$ et on dérive $v : t \mapsto (1-t^2)^x$, les fonctions u et v étant de classe C^1 sur $[0,a]$, avec $a < 1$. Ainsi :

$$f_a(x+1) = \int_0^a (1-t^2)^{x+1}dt = \big[t(1-t^2)^{x+1}\big]_0^a + (x+1)\int_0^a 2t^2(1-t^2)^x\,dt$$

En prenant la limite lorsque a tend vers 1, il vient

$$f(x+1) = 2(x+1)\int_0^1 (t^2-1+1)(1-t^2)^x dt = -2(x+1)(f(x+1)+f(x))$$

et donc :

$$f(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}f(x)$$

4. a) Pour x au voisinage de -1, $x+1$ est au voisinage de 0 et par continuité de f :
$\lim\limits_{x\to-1}(2x+2)f(x) = f(0) = 1$, soit :

$$f(x) \underset{(-1^+)}{\sim} \frac{1}{2(x+1)}$$

b) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+2}{2x+3} = 1$
Soit :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} f(x+1)$$

5. a) On sait que $n \leqslant x < n+1$. Par décroissance $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$, et comme $f(n+1) \sim f(n)$:

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} f(\lfloor x \rfloor)$$

b) On a $\dfrac{f(n-1)}{f(n)} = \dfrac{2n+1}{2n} = 1 + \dfrac{1}{2n}$, d'où :

$$\ln\frac{f(n-1)}{f(n)} = \ln\big(1+\frac{1}{2n}\big) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2n} + w_n$$

où $\sum w_n$ est une série absolument convergente.

On somme ces égalités entre 2 et n. Il vient :

$$\ln f(1) - \ln f(n) = \frac{1}{2} \times \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} w_k$$

Sachant que $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est une suite convergente (vers la constante γ d'Euler), on obtient :

$$n \mapsto \ln f(n) - \frac{1}{2} \ln n \text{ est une suite convergente}$$

Donc :

$$\exists\, C > 0, f(n) \underset{(\infty)}{\sim} \frac{C}{n^{1/2}}$$

et, avec 5. a) :

$$f(x) \underset{(+\infty)}{\sim} Cx^{-1/2}$$

Exercice 1.4.

1. Soit n un entier naturel et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)dt$ est convergente.

On note alors : $I(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P(t)dt$.

b) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k dt$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $a_k(P) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P(t)dt$.

On considère l'application Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$\Phi_n(P) = (a_0(P), a_1(P), \ldots, a_n(P))$$

Montrer que Φ_n est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On note P_m le polynôme de $\mathbb{R}_m[X]$ vérifiant :

$$\Phi_m(P_m) = (1,\ 0, \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^{m+1}$$

a) Calculer P_1 et P_2.

b) Soit P'_m le polynôme dérivé de P_m. Montrer que :

$$\Phi_m(P'_m) = (1 - P_m(0),\ -1,\ 0, \ldots,\ 0).$$

c) On suppose ici que $m \geqslant 2$ et on pose : $H_{m-1} = P'_m - P'_{m-1} + P_{m-1}$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k H_{m-1}(t) dt = 0$$

Qu'obtient-on pour $k = m$?

d) Pour $m \geqslant 2$, calculer H_{m-1}. En déduire que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ P'_m(t) = -\Big[1 + \sum_{k=1}^{m-1} P_k(t)\Big]$$

Solution :

1. a) La convergence connue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t}\, dt$ implique, par croissances comparées la convergence de $I(P)$.

b) On obtient par une récurrence immédiate :

$$I(X^k) = k!$$

2. L'application Φ_n est évidemment linéaire.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $\Phi_n(P) = 0$, on a pour tout k de $[\![0, n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P(t) dt = 0$. Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P^2(t) dt = 0$, or c'est l'intégrale d'une fonction continue et positive, la fonction $e^{-t}P^2(t)$ est donc nulle et par suite P est le polynôme nul. Φ_n est donc injective donc bijective (car les deux espaces vectoriels sont de même dimension finie $m+1$) ; c'est un isomorphisme.

3. a) Les applications Φ_1 et Φ_2 étant des isomorphismes on obtient l'existence et l'unicité de P_1 et P_2. Le calcul donne, $P_1(t) = 2 - t$ et $P_2(t) = 3 - 3t + \dfrac{t^2}{2}$. De la même manière, Φ_m étant un isomorphisme, P_m existe et est unique.

b) On a successivement,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P_m(t)\, dt = \big[P_m(t)(-\mathrm{e}^{-t})\big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt \\ &= P_m(0) + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} P'_m(t)\, dt = 1 - P_m(0)$$

Pour $k \geqslant 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P'_m(t)\, dt = \big[t^k \mathrm{e}^{-t} P_m(t)\big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(kt^{k-1} - t^k) P_m(t)\, dt$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}$$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k P_m(t)\, dt = 0$ lorsque $k \geqslant 1$.

On a donc bien

$$\Phi_m(P'_m) = (1 - P_m(0), -1, 0, \ldots,\ 0)$$

c) On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t H_{m-1}(t)\, dt = -1 + 1 + 0 = 0.$

Pour $2 \leqslant k \leqslant m-1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^k H_{m-1}(t)\, dt = 0 - 0 + 0 = 0.$

D'où le résultat.

On a respectivement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_m(t)\, dt = 0$, et :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P_{m-1}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} m t^{m-1} P_{m-1}(t)\, dt + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_{m-1}(t)\, dt$$
$$= 0 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m P'_{m-1}(t)\, dt$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^m H_{m-1}(t)\, dt = 0.$

d) Il résulte de la question précédente qu'il existe un réel α tel que

$$\Phi_m(H_{m-1}) = (\alpha,\ 0, \ldots, 0) = \alpha \Phi_m(P_m).$$

D'où, puisque Φ_m est un isomorphisme, $H_{m-1} = \alpha P_m$, ce qui n'est possible que si $\alpha = 0$, en comparant les degrés. Donc $H_{m-1} = 0$.

On a donc pour tout $m \geqslant 2$, $P'_m = P'_{m-1} - P_{m-1}$. En tenant compte du fait que $P'_1 = -1$, on en déduit par télescopage que,

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, P'_m(t) = -\big[1 + \sum_{k=1}^{m-1} P_k(t)\big]$$

Exercice 1.5.

1. Exemple introductif.

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier naturel.

b) En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ est absolument convergente.

Soit P un polynôme unitaire de degré 3 à coefficients dans $\mathbb{N}$.

On pose : $P(X) = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$.

On suppose que P possède trois racines x_1, x_2, x_3 telles que $|x_1| > 1, |x_2| < 1$ et $|x_3| < 1$.

On pose : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \sigma_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \sigma_2 \\ x_1x_2x_3 = \sigma_3 \end{cases}$.

On pose enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$.

2. a) Exprimer a_1, a_2, a_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

b) Calculer $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$. En déduire l'expression de S_1, S_2 et S_3 en fonction de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

c) Montrer que pour tout p de $\mathbb{N}^*$: $S_{p+3} - \sigma_1 S_{p+2} + \sigma_2 S_{p+1} - \sigma_3 S_p = 0$.

d) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n est un entier relatif.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\sin(\pi x_1^n)$.

Solution :

1. a) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}[\sqrt{3}^k + (-\sqrt{3})^k] \\ &= 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k} \times 3^k \in 2\mathbb{N}\end{aligned}$$

b) Par la question précédente : $[(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n]\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$ et

$$u_n = \sin[\pi(2+\sqrt{3})^n] = -\sin[\pi(2-\sqrt{3})^n]$$

De plus, on sait que pour tout $x \in [0, \pi]$, $0 \leqslant \sin x \leqslant x$. Donc

$$0 \leqslant -u_n \leqslant v_n = \pi(2-\sqrt{3})^n.$$

La série de terme général v_n converge puisque $0 < (2-\sqrt{3}) < 1$; la série $\sum u_n$ converge donc également (et elle est à termes négatifs).

2. a) On factorise le polynôme P en $P(X) = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, puis, en développant cette expression et par unicité de l'écriture d'un polynôme dans une base, il vient :

$$P(X) = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 \implies \begin{cases} \sigma_1 = -a_1 \\ \sigma_2 = a_2 \\ \sigma_3 = -a_3 \end{cases}$$

b) Le calcul de $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$ donne : $\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3 = \prod\limits_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3} x_i^2 x_j$.

On a : $S_1 = \sigma_1$. En calculant σ_1^2, il vient $S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$, et en calculant σ_1^3, il vient $S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$.

c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,3]\!]$. Alors $x_i^p P(x_i) = 0$, ce qui est équivalent à :

$$x_i^{p+3} - \sigma_1 x_i^{p+2} + \sigma_2 x_i^{p+1} - \sigma_3 x_i^p = 0.$$

En sommant ces égalités, il vient :

$$S_{p+3} - \sigma_1 S_{p+2} + \sigma_2 S_{p+1} - \sigma_3 S_p = 0$$

d) Procédons par récurrence.

• par la question b), S_1, S_2, S_3 sont des entiers relatifs, comme polynômes en $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, qui eux mêmes sont des entiers relatifs comme polynômes à coefficients entiers en les entiers a_1, a_2, a_3.

• On termine par le principe de récurrence, en utilisant la question précédente.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente, $S_n \in \mathbb{Z}$ et $\pi x_1^n = \pi S_n - \pi(x_2^n + x_3^n)$. Donc :

$$\begin{aligned} |\sin(\pi x_1^n)| &= |\sin(\pi S_n - \pi(x_2^n + x_3^n))| = |\sin(\pi(x_2^n + x_3^n))| \\ &\leqslant |\pi(x_2^n + x_3^n)| \leqslant \pi|x_2|^n + \pi|x_3|^n \end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $|x_2| < 1$ et $|x_3| < 1$.

Exercice 1.6.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

1. Justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$;

On pose alors :

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}, G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}, H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$$

2. a) Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, et tout n de $\mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{k\alpha} + R_n(t)$$

où R_n est une fonction à préciser.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de $G(\alpha)$.

3. a) En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer que :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

b) En admettant que $2a\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2-a^2} = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} - \dfrac{1}{a}$ pour $a \in]0,1[$, déterminer la valeur de $F(\alpha)$.

Solution :

1. La fonction $f : t \to \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$. Comme $\alpha > 1$ elle se prolonge par continuité en 0 par $f(0) = 1$ et est équivalente au voisinage de $+\infty$ à $\dfrac{1}{t^\alpha}$.

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente, puisque $\alpha > 1$. Par le théorème sur les fonctions positives équivalentes, $F(\alpha)$ existe pour tout $\alpha > 1$.

2. a) **La** formule géométrique donne $(-t^\alpha \neq 1)$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}$$

b) En intégrant sur $[0,1]$, il vient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1 t^{k\alpha}\,dt + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$$

Donc :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha} + (-1)^{n+1}\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt$$

Or :

$$\Big|\int_0^1\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,dt\Big| \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\,dt = \frac{1}{1+(n+1)\alpha}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ceci termine la question, soit :

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+k\alpha}$$

3. a) Le changement de variable proposé est de classe $\mathcal{C}^1$. En intégrant sur $[1,A]$, il vient :

$$\int_1^A\frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\int_{A^{1-\alpha}}^1\frac{du}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, on obtient :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}G\big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\big)$$

b) Après simplifications, $H(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{1 + k\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \sum_{h=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{h-1}}{h\alpha - 1}$.

Il vient donc :

$$F(\alpha) = G(\alpha) + H(\alpha) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \left(\frac{1}{k\alpha - 1} - \frac{1}{k\alpha + 1} \right)$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2\alpha^2 - 1}$$

Or $\dfrac{1}{\alpha} \in]0, 1[$. Donc :

$$\frac{2}{\alpha} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 - \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} - \alpha \implies 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2\alpha^2 - 1} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)} - 1$$

D'où :

$$F(\alpha) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}$$

Exercice 1.7.

1. Montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel x :

$$(x^2 - 1)P'(x) + xP(x) = x^3 - x$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant la relation suivante : pour tout x élément de I,

$$(E) : (x^2 - 1)\, h'(x) + xh(x) = x^3 - x$$

2. Montrer que $f = h - P$ est solution d'une équation différentielle (D) de la forme :

$$\forall x \in I, f'(x) = f(x)\, g(x)$$

On précisera la fonction g et les intervalles I sur lesquels g est continue.

3. Résoudre l'équation (D) sur chacun de ces intervalles.

4. En déduire les fonctions h vérifiant (E) sur ces intervalles.

5. Existe-t-il des fonctions vérifiant (E) sur $\mathbb{R}$?

6. Soit M_0 un point du plan, de coordonnées (x_0, y_0). Discuter selon les valeurs de x_0 et y_0 le nombre de courbes $\mathcal{C}$ passant par M_0 et d'équation $y = h(x)$, où h est une fonction vérifiant (E).

Solution :

1. En notant k le degré du polynôme P cherché, on a :

$$P(x) = ax^k + \cdots,\ P'(x) = kax^{k-1} + \cdots$$

D'où :

$$(x^2-1)P'(x) + xP(x) = (k+1)ax^{k+1} + \cdots$$

Donc $k = 2$ et on peut écrire $P(x) = ax^2 + bx + c$ et en remplaçant dans l'équation, il vient :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ 2b = 0 \\ c - 2a = -1 \\ -b = 0 \end{cases},\ \text{soit} \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 0 \\ c = -1/3 \end{cases} \quad \text{et :}$$

$$P(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)$$

2. En soustrayant, la fonction f vérifie l'équation :

$$f'(x)(x^2-1) + xf(x) = 0$$

Ainsi $g(x) = \dfrac{-x}{x^2-1}$, sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

3. Sur chacun de ces intervalles, f est de la forme Ke^G, où K est une constante (dépendant de l'intervalle) et G une primitive de g sur cet intervalle ; soit :

$$f(x) = \frac{K}{\sqrt{|x^2-1|}}$$

4. Par les questions précédentes,

$$h_I(x) = \frac{K_I}{\sqrt{|x^2-1|}} + \frac{x^2-1}{3}$$

sur chaque intervalle I.

5. S'il existe une solution φ de (E) définie sur $\mathbb{R}$, sa restriction à chaque intervalle I doit être une fonction h_I trouvée dans la question précédente. De plus, la fonction φ doit être dérivable sur $\mathbb{R}$.

Or les fonctions h_I se raccordent en ± 1 si et seulement si $K_I = 0$, pour chaque intervalle. Ainsi P est la seule solution sur $\mathbb{R}$.

6. $\star$ Si $x_0 \neq \pm 1$, quel que soit y_0, il existe une solution unique donnée par la constante $K = \left(y_0 - \dfrac{x_0^2-1}{3}\right)\sqrt{|x_0^2-1|}$.

$\star$ Si $(x_0, y_0) = (\pm 1, 0)$, alors $K = 0$ donne **la** solution.

$\star$ Si $x_0 = \pm 1$ et $y_0 \neq 0$, il n'existe pas de solution.

Exercice 1.8.

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ non identiquement nulle telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt > 0$.

2. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\, dt$ converge.

On pose alors, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\, dt$.

b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c) Montrer la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

3. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{6}{n^4}$.

b) En déduire le développement limité de I_n à l'ordre 7.

4. Justifier la convergence de la série de terme général I_n et exprimer sa somme $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ sous la forme d'une intégrale.

Solution :

1. C'est une question de cours : comme f est positive, on sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt \geqslant 0$. Supposons cette intégrale nulle. Alors, pour tout $A > 0$:

$$0 \leqslant \int_0^A f(t)\, dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\, dt = 0$$

Donc $\displaystyle\int_0^A f(t)\, dt = 0$. La fonction f est continue sur $[0, A]$ et positive : c'est la fonction nulle sur $[0, A]$. Ceci étant valable pour tout A, f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $h : t \mapsto \dfrac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Au voisinage de $+\infty$, $h(t) = o(\mathrm{e}^{-t/2})$. On conclut par le théorème de comparaison des fonctions positives :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}\, dt \text{ converge}$$

b) De manière évidente :

$$0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \text{ , et } \quad \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{(n+1)^4+t^4}} < \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4+t^4}}$$

Ainsi $0 < I_{n+1} < I_n$. La suite (I_n) est strictement décroissante.

c) Par la question précédente, la suite (I_n) converge puisqu'elle est minorée par 0. En fait, pour $n \geqslant 1$:

$$0 < I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t^4}}\, dt = \frac{C}{n^2}$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. a) On a :

$$0 < I_n \leqslant \frac{1}{n^2}\int_0^{+\infty} \frac{t^3 \mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{n^4}} dt = \frac{\Gamma(4)}{n^4} = \frac{6}{n^4}$$

b) On a :

$$\begin{aligned}\big|I_n - \frac{6}{n^4}\big| &\leqslant \frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\big|\frac{n^2}{\sqrt{n^4+t^4}} - 1\big|\, dt \\ &\leqslant \frac{1}{n^4}\int_0^{+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t}\big|\frac{t^4}{\sqrt{n^4+t^4}(n^2+\sqrt{n^4+t^4})}\big|\, dt \leqslant \frac{\Gamma(8)}{n^8}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\big|I_n - \frac{6}{n^4}\big| = o\big(\frac{1}{n^7}\big)$$

4. La convergence est immédiate au vu de la question 3. a). Pour calculer la somme de la série, on effectue dans I_n le changement de variable linéaire $t = nu$. Il vient, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{N} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\, du - R_N$$

avec

$$R_N = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-(N+1)u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\, du$$

Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}$. La fonction φ est définie et continue sur $]0,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{u\to 0}\varphi(u) = \lim\limits_{u\to+\infty}\varphi(u) = 0$. Ainsi, il existe $M > 0$ tel que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^+} |\varphi(u)| \leqslant M$$

et

$$0 \leqslant R_N \leqslant M\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-Nu} du = \frac{M}{N} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} I_k = \int_0^{+\infty} \frac{u^3\mathrm{e}^{-u}}{(1-\mathrm{e}^{-u})\sqrt{1+u^4}}\, du$$

Exercice 1.9.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ converge.

On pose alors $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

2. a) Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{f_n(x)}{f_2(x)}$ existe (avec $n \geqslant 2$) et donner un majorant de cette quantité.

b) En déduire la nature de la série de terme général I_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Donner un équivalent de H_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)}$. Donner un encadrement de cette quantité en fonction des termes de la suite $(H_k)_{k\geqslant 1}$.

c) En déduire que, lorsque n tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$ est équivalent à $\dfrac{1}{n!\ln n}$.

4. Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, I_{n+1} en fonction de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$. Donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. La fonction f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et $f_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{1}{x^n}$, la règle de Riemann montre alors que I_n existe si et seulement si $n \geqslant 2$.

2. a) Pour $n \geqslant 3$, $0 \leqslant \dfrac{f_n(x)}{f_2(x)} = \dfrac{1}{(x+3)\dots(x+n)} \leqslant \dfrac{2}{n!}$, le résultat restant valable pour $n = 2$:

$$\forall\, n \geqslant 2, \forall\, x \geqslant 0, \frac{f_n(x)}{f_2(x)} \leqslant \frac{2}{n!}$$

b) On a donc, par conservation des inégalités par intégration, lorsque les bornes sont dans l'ordre croissant :

$$\forall\, n \geqslant 2, I_n \leqslant \frac{2I_2}{n!}$$

La série de terme général I_n est donc convergente.

3. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$, d'où par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit :

$$\ln n \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

b) $\forall\, x \in [0,1]$, $\dfrac{f_n'(x)}{f_n(x)} = \big(\ln f_n\big)'(x) = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k}$, et ainsi :

$$H_{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant -\frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

c) On a donc :

$$-\frac{1}{H_n} f_n'(x) \leqslant f_n(x) \leqslant -\frac{1}{H_{n+1}-1} f_n'(x)$$

et, en intégrant sur $[0,1]$:

$$-\frac{1}{H_n}(f_n(1) - f_n(0)) \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant -\frac{1}{H_{n+1}-1}(f_n(1) - f_n(0))$$

Comme $f_n(0) - f_n(1) = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!} = \dfrac{n}{(n+1)!}$:

$$\frac{n}{(n+1)!H_n} \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx \leqslant \frac{n}{(n+1)!(H_{n+1}-1)}$$

Avec $H_n \sim H_{n+1} - 1 \sim \ln n$, il vient donc :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \sim \frac{1}{n! \ln n}$$

4. Pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx - \int_1^{+\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)} - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)\ldots(x+n+1)} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n+1)}\,dx
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = nI_{n+1}$$

et :

$$I_n = \frac{1}{n-1}\int_0^1 f_{n-1}(x)\,dx \sim \frac{1}{n(n-1)!\ln(n-1)} \sim \frac{1}{n!\ln n}$$

Exercice 1.10.

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction convexe et de classe C^2 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Dans cette question, on suppose que $I = \mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on a $f(a) - f(0) \leqslant af'(a)$.

b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$. Montrer que g est croissante.

c) En déduire que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ admet toujours une limite (finie ou égale à $+\infty$) lorsque x tend vers $+\infty$.

d) On suppose dans cette question que f est majorée sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la fonction $x \mapsto f(-x)$ est aussi convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f(0)$ est un maximum global (on pourra appliquer ce qui précède à la fonction f et à la fonction $x \mapsto f(-x)$). Prouver ensuite que c'est aussi un minimum global et en déduire que f est nécessairement constante.

2. Dans cette question on suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que le rapport $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$.

a) Montrer que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = f(x) - \ell x$, est convexe.

b) Soit a un réel positif et h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$ par :

$$h(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Montrer que h est croissante. Quelle est la limite de h en $+\infty$?

c) Montrer que la fonction g est décroissante.

d) En déduire que g admet une limite en $+\infty$ qui peut être finie ou égale à $-\infty$.

e) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = -\ln(1 + x)$. Déterminer, pour cette fonction f, la limite de g en $+\infty$.

3. On suppose que $I = \mathbb{R}$. En utilisant la fonction $x \mapsto f(-x)$, que peut-on déduire de la question précédente ?

4. Soit φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{x} = 0$. Montrer que φ'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. a) Comme f est convexe et dérivable, f' est croissante et :

$$f(a) - f(0) = \int_0^a f'(t)\,dt \leqslant f'(a)\int_0^a dt = af'(a)$$

b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x) + f(0)}{x^2} \geqslant 0$$

La fonction g est bien croissante.

c) La fonction g étant croissante, la seule alternative est :

$$\text{soit } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \text{ soit } \exists\,\ell \in \mathbb{R}, \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$

Dans le premier cas, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et dans le second $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \ell$.

d) Si f est majorée sur $\mathbb{R}$ il en est de même de la fonction $\varphi : x \mapsto f(-x)$ et comme $\varphi''(x) = (-1)^2 f''(-x) \geqslant 0$, φ est également convexe.

La fonction g associée à f est donc croissante et de limite nulle en $+\infty$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, g(x) \leqslant 0$, ainsi f est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0)$, donc admet un maximum global sur $\mathbb{R}^+$ valant $f(0)$ et en particulier $f'_d(0) \leqslant 0$. Le même raisonnement appliqué à la fonction φ prouve que $f(0)$ est un maximum global de f sur $\mathbb{R}^-$ et en particulier $f'_g(0) \geqslant 0$.

Ainsi $f'(0) = 0$ et comme f' est croissante, f' est positive sur $\mathbb{R}^+$, négative sur $\mathbb{R}^-$ et f admet un minimum global en 0. Finalement f est constante sur $\mathbb{R}$.

2. a) Comme $g'' = f''$, la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}^+$.

b) Pour $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{a\}$, on a $h'(x) = \dfrac{(x-a)g'(x) - g(x) + g(a)}{(x-a)^2}$.

Comme g est convexe, on a $g(a) \geqslant g(x) + (a-x)g'(x)$ (la courbe est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x) et $h'(x) \geqslant 0$.

La fonction h est donc croissante sur $[0, a[$ et sur $]a, +\infty[$ et comme elle est prolongeable par continuité en a (la fonction g est dérivable en a), la fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Par ailleurs $h(x) = \dfrac{x}{x-a} \times \dfrac{f(x)}{x} - \ell - \dfrac{f(a)}{x-a}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

c) La fonction h est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$, donc h est négative sur l'intervalle $[a, +\infty[$ pour tout $a \geqslant 0$.
Ainsi $x \geqslant a \implies g(x) \leqslant g(a)$ et l'universalité de cette implication montre que g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

d) La fonction g est décroissante et cette fois l'alternative est : ou bien elle a une limite en $+\infty$ ou bien elle diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

e) On a $f''(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2} > 0$ et f est bien convexe sur $\mathbb{R}^+$. Clairement $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

3. En appliquant ce qui précède à la fonction $x \mapsto f(-x)$, on en déduit que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite finie ou infinie en $-\infty$ et que si la limite est finie valant ℓ, alors $x \mapsto f(x) - \ell x$ a une limite en $-\infty$, finie ou valant $-\infty$.

4. Supposons que φ'' ne s'annule pas, alors quitte à changer φ en $-\varphi$, on peut supposer que φ'' est toujours positive et φ est alors convexe. Ce qui précède montre que φ admet une limite en $-\infty$ et en $+\infty$, ces limites étant finies ou valant $-\infty$. Ainsi φ est majorée sur $\mathbb{R}$ et est donc constante, ce qui est incompatible avec le fait que φ'' ne s'annule jamais !

Exercice 1.11.

Dans tout cet exercice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle décroissante de limite nulle.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $b_n = n(a_{n-1} - a_n)$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\Big) - na_n$.

2. On suppose dans cette question que la série de terme général a_n converge.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

b) En déduire que la série de terme général b_n converge et que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

3. On suppose dans cette question que la série de terme général b_n converge.

a) Montrer que pour tout n et k de $\mathbb{N}^*$, on a : $n(a_n - a_{n+k}) \leqslant \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} b_j$.

b) En déduire que la série de terme général a_n converge et que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Solution :

1. Il suffit de faire le calcul :
$\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \sum\limits_{k=1}^{n}(ka_{k-1} - ka_k) = \sum\limits_{h=0}^{n-1}(h+1)a_h - \sum\limits_{k=0}^{n} ka_k$, et par télescopage partiel :

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k - na_n$$

2. a) $\star$ Par décroissance et positivité de la suite (a_n), on a :

$$0 \leqslant na_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

Avec $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, on a donc : $0 \leqslant na_{2n} \leqslant A_{2n} - A_{n+1}$ et la convergence de la série de terme général a_n étant la convergence de la suite (A_n), en notant L sa limite, on a $\lim\limits_{n\to\infty} A_{2n} - A_{n+1} = L - L = 0$, soit par encadrement :

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0$$

$\star$ Puis, $0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} \leqslant 2na_{2n} + a_{2n}$ donne, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

$$\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1} = 0$$

Donc, par exhaustion :

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$$

b) Le résultat de la question 1. donne alors directement la convergence de la série de terme général b_n, avec :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

3. a) $$\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j = \sum_{j=1}^{n+k} b_j - \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{k=0}^{n+k-1} a_k - (n+k)a_{n+k} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k + na_n$$
$$= \sum_{k=n}^{n+k-1} a_k + na_n - (n+k)a_{n+k}$$

et comme $\sum_{k=n}^{n+k-1} a_k \geqslant k a_{n+k}$, il vient bien :

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} b_j \geqslant n(a_n - a_{n+k})$$

b) On en déduit :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+k} b_j = \sum_{j=1}^{n} b_j + \sum_{j=n+1}^{n+k} b_j &\geqslant \sum_{m=0}^{n-1} a_m - n a_n + n(a_n - a_{n+k})\\ &\geqslant \sum_{m=0}^{n-1} a_m - n a_{n+k}\end{aligned}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \leqslant \sum_{j=1}^{n+k} b_j + n a_{n+k}$$

On fixe k et on fait tendre n vers l'infini, comme $a_{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, il vient par prolongement des inégalités à la limite :

$$\sum_{m=0}^{n-1} a_m \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

Les sommes partielles étant majorées et le terme général positif, on en déduit que la série de terme général u_n est convergente et la question 2. assure alors l'égalité des sommes demandées.

Exercice 1.12.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Étudier, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}dx$.

Pour les valeurs de n pour lesquelles cette intégrale converge, on pose alors :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}dx$$

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on pourra effectuer une intégration par parties).

4. Exprimer $I_0 - I_n$ sous forme d'une somme et en déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{kn+1}$.

5. On considère la procédure Pascal suivante :

```
procedure Oral_escp(N,K : integer)
```

```
Var S : integer ;
Begin
     if (N=0) then writeln('1')
          else begin
             Oral_escp(N-1,K) ;
             if (N MOD 2=0) then S := 1 else S := -1 ;
             writeln(S/(K*N+1))
             end ;
End ;
```

Que produit l'appel suivant : `Oral_escp (3,2) ;` ?

Solution :

1. ⋆ Si $n \geqslant 0$, I_n existe car la fonction à intégrer est continue sur le segment $[0, 1]$.

⋆ Si $n < 0$, alors $\dfrac{x^{kn}}{1+x^k} \underset{(0)}{\sim} x^{kn}$ et l'intégrale existe si et seulement si $kn < -1$, ce qui est toujours le cas, sauf pour $n = -1$ et $k = 1$. Bref :

$$I_n \text{ existe sauf dans le cas } n = -1 \text{ et } k = 1$$

2. $|I_n| \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^{kn}\, dx = \frac{1}{kn+1}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{kn}}{1+x^k}\, dx &= \Big[\frac{x^{kn+1}}{kn+1}\times\frac{1}{1+x^k}\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{kn+1}}{kn+1}\times\frac{-kx^{k-1}}{(1+x^k)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2(kn+1)} + \frac{k}{kn+1}\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{(1+x^k)^2}\, dx\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{(1+x^k)^2}\, dx \leqslant \int_0^1 x^{k(n+1)}\, dx = \frac{1}{k(n+1)+1}$, on en déduit :

$$\frac{1}{2(kn+1)} \leqslant (-1)^n I_n \leqslant \frac{1}{2(kn+1)} + \frac{k}{kn+1}\times\frac{1}{kn+k+1}$$

Ainsi :

$$I_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{(-1)^n}{2kn}$$

4. $I_0 - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(-x^k)^n}{1+x^k}\, dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int_0^1 (-x)^{k\ell}\, dx = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k\ell}}{k\ell+1}$

Ainsi :

$$(-1)^k(I_0 - I_n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(-1)^\ell}{k\ell+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^k I_0$$

Ce qui prouve la convergence demandée.

5. Il affiche, pour $k = 2$, les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3.

Exercice 1.13.

1. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} \times |\ln(x^2 + y^2)|$$

b) En déduire que la fonction f dfinie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, à valeurs réelles par :

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$$

est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier l'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de f en tout point .

3. Déterminer les points critiques de f.

4. a) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$ (on pourra étudier $h : x \mapsto f(x, 0) - 1$).

b) Montrer que f admet un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1}, 0)$.

c) Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 1)$.

Solution :

1. a) On a $|x| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, donc $|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \ln(x^2 + y^2)$, ou encore :

$$|x \ln(x^2 + y^2)| \leqslant 2\sqrt{x^2 + y^2} \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

b) Comme $\lim\limits_{u\to 0^+} 2u \ln u = 0$, il vient :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \ln(x^2 + y^2) = 0$$

Or pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = \exp(x \ln(x^2 + y^2)) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1$, soit :

En posant $f(0, 0) = 1$, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $\star$ f est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, avec en particulier :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \big(\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\big) \exp(x \ln(x^2 + y^2)\big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \exp(x \ln(x^2 + y^2)\big)$$

$\star$ $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0.

$\star$ $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x^2}-1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \ln x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

3. $$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} xy=0 \\ \ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0 \text{ et } y\in\{-1,1\} \\ \text{ou} \\ y=0 \text{ et } x\in\{-1/\mathrm{e},1/\mathrm{e}\} \end{cases}$$

Il existe donc quatre points critiques.

4. a) Soit h définie par : $h(x)=f(x,0)-1=\begin{cases} \mathrm{e}^{x\ln x^2}-1 & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

$$\text{Si } x\in\,]0,1[,\ f(x,0)-1<0 \text{ et si } x\in\,]-1,0[,\ f(x,0)-1>0$$

Donc f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

b) Pour $y\neq 0, \ln(x^2+y^2)>\ln x^2$, donc si $x>0, x\ln(x^2+y^2)\geqslant x\ln x^2$ et

$$f(x,y)\geqslant f(x,0)=h(x)+1.$$

Une étude rapide de la fonction h montre que la restriction de h à $\mathbb{R}^+$ est minimale au point $1/\mathrm{e}$ (car on a $h'(x)=\mathrm{e}^{x\ln x^2}(2+\ln x^2)$), on peut donc écrire :

$$\forall\, x>0, \forall\, y\neq 0, f(x,y)\geqslant h(\mathrm{e}^{-1})+1=f(\mathrm{e}^{-1},0)$$

f admet donc un minimum local en $(\mathrm{e}^{-1},0)$.

c) $f(x,1)-f(0,1)=\mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)}-1$ qui est du signe de x, donc f n'admet pas d'extremum en $(0,1)$.

Exercice 1.14.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}\mathrm{e}^{-x}$.

1. Étudier les variations de la fonction f_n et tracer sa courbe représentative dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'intégrale, $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t}dt$ converge et donner sa valeur en fonction de n.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \geqslant 0$, on a : $f_n(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt$.

4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{-x} f_{n-k}(x) = f_n(2x)$.

5. Vérifier que, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} f_n(t)\, dt$ est convergente et a pour valeur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

6. Comparer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt \right]$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t} dt \right]$$

Solution :

1. On a : $f_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{e}^{-x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} x^k = -\frac{x^n}{n!} \mathrm{e}^{-x}$

Donc :

n pair :

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
f_n	$+\infty$ $\searrow$ 1 $\searrow$ 0

n impair :

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
f_n	$-\infty$ $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0

2. La question précédente donne :

$$\int_a^b t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt = n!\big(f_n(a) - f_n(b)\big)$$

Donc :

$$I_n = n!$$

3. De même :

$$\int_x^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\, dt = n! f_n(x)$$

4. $f_n(2x) = \displaystyle\int_{2x}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{e}^{-t}\, dt$. Et, avec le changement de variable $t = u + x$:

$$f_n(2x) = \int_x^{+\infty} \frac{(u+x)^n}{n!}\mathrm{e}^{-(u+x)}\,du = \int_x^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k u^{n-k} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{-u}\,du$$

$$= \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \int_x^{+\infty} \frac{u^{n-k}}{(n-k)!}\mathrm{e}^{-u}\,du$$

$$f_n(2x) = \mathrm{e}^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f_{n-k}(x)$$

5. La convergence est immédiate, par croissances comparées, et :

$$\int_x^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_x^{+\infty} \frac{t^k}{k!}\mathrm{e}^{-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

6. On a, respectivement :

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt \right] = \lim_{x\to+\infty} \big(1 - \lim_{n\to\infty} f_n(x))\big) = \lim_{x\to+\infty} (1-1) = 0$$

et :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}dt \right] = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Exercice 1.15.

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par :

$$P_0 = 1,\ P_1 = X, \ldots, P_n = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}, \ldots$$

Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles, de classe C^∞.

1. Montrer que pour tout entier relatif j, $P_n(j)$ est un entier relatif.

2. Montrer qu'il existe une unique suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possédant la propriété suivante :

« pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$ s'annule aux points $0, 1, 2, \ldots, n.$ »

(on pourra résoudre un système d'équations linéaires d'inconnues $a_0, a_1, \ldots, a_n$.)

3. Soit $b > 0$ donné.
Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la fonction $f : x \mapsto f(x) = b^x$ est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $a_n = (b-1)^n$.

4. Soit $x \geqslant 0$ fixé. Montrer que pour tout entier naturel N, il existe un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k P_k(x) + P_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta)$$

(on pourra utiliser la fonction $g : t \mapsto g(t) = f(t) - \sum\limits_{k=0}^{N} a_k P_k(t) - AP_{N+1}(t)$, où A est une constante judicieusement choisie, et appliquer le théorème de Rolle).

Solution :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$\star$ Si $0 \leqslant j \leqslant n-1$, alors $P_n(j) = 0$;
$\star$ Si $j \geqslant n$, alors $P_n(j) = \binom{n}{j}$;
$\star$ Si $j < 0$, $P_n(j) = (-1)^n \dfrac{|j|(|j|+1)\dots(|j|+n-1)}{n!} = (-1)^n \dbinom{|j|+n-1}{|j|}$.
dans tous les cas $P_n(j) \in \mathbb{Z}$.

2. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on veut réaliser $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k(j) = f(j)$ pour tout j de $[\![0, n]\!]$.
Matriciellement cela se traduit par :

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$$

où M est la matrice de terme générique $m_{i,j} = \binom{i}{j}$, les lignes et les colonnes étant pour une fois numérotées de 0 à n.
Cette matrice est trigonale inférieure, les coefficients diagonaux valant tous 1, ce qui prouve que M est inversible.
On peut calculer l'inverse de M en interprétant l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ canoniquement associé à ${}^tM$: cet endomorphisme est l'application $P(X) \mapsto P(X+1)$, dont l'isomorphisme réciproque est l'application $P(X) \mapsto P(X-1)$ de matrice ${}^tM^{-1}$.
Bref, on trouve M^{-1} de terme générique $m'_{i,j} = (-1)^{i+j}\binom{i}{j}$ et ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, j \in [\![0, n]\!], a_j = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} f(k)$$

On constate que ces nombres sont bien indépendants de n et uniquement déterminés par f.

3. Ici : $a_j = \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^{j+k} \binom{j}{k} b^k = (-1)^j \sum\limits_{k=0}^{j} (-b)^k \binom{j}{k} = (-1)^j (1-b)^j$, soit :

$$\forall\, j \in \mathbb{N}, a_j = (b-1)^j$$

4. $\star$ Supposons dans un premier temps que $x \notin [\![0, N]\!]$.
On définit la fonction g comme dans l'énoncé en choisissant A de façon à ce que l'on ait $g(x) = 0$ (c'est possible, puisque $P_{N+1}(x) \neq 0$).

La fonction g est indéfiniment dérivable et s'annule en $(N+2)$ points distincts (les points $0, 1, \dots, N$ et x). En rangeant ces points et en appliquant de nombreuses fois le théorème de Rolle, on en déduit que la fonction $g^{(N+1)}$ s'annule au moins une fois en un point que nous noterons θ et qui est compris entre le plus petit et le plus grand des points utilisés, donc appartient à $\mathbb{R}^+$.

Or P_{N+1} est de degré $N+1$ et de coefficient dominant $\dfrac{1}{(N+1)!}$, donc $P_{N+1}^{(N+1)} = 1$ et il reste :

$$g^{(N+1)}(t) = f^{(N+1)}(x) - A$$

Donc $A = f^{(N+1)}(\theta)$, ce qu'il fallait.

$\star$ Si $x \in [\![0, N]\!]$, la formule demandée est vraie quel que soit le choix de θ.

Exercice 1.16.

Soit n un entier naturel. On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout x réel :

$$F_n(x) = \frac{1}{2^n n!}(x^2-1)^n = \frac{1}{2^n n!}(x-1)^n(x+1)^n$$

et P_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par, pour tout x réel :

$$P_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ F_n^{(n)}(x) & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

où $F_n^{(n)}$ désigne la dérivée d'ordre n de F_n.

1. Montrer que P_n est une fonction polynôme dont on déterminera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On note $B_{n,k}$ le polynôme défini par $B_{n,k} = (X+1)^k(X-1)^{n-k}$.

a) Montrer que $(B_{n,0},\ B_{n,1},\ \dots,\ B_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Montrer l'égalité :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$

c) En déduire que $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$.

d) Démontrer que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$. Étudier la parité de P_n suivant les valeurs de n.

3. On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n-1$.

a) Démontrer que, pour tout x réel :

$$F_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{2^n n!} \binom{n}{k} \binom{n}{p-k} B_{2n-p,n-k}(x)$$

b) En déduire que $F_n^{(p)}(1) = 0$ et $F_n^{(p)}(-1) = 0$.

c) Démontrer que P_n possède n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,\ 1[$.

Solution :

1. F_n est une fonction polynôme de degré $2n$ et de coefficient dominant $\frac{1}{2^n n!} X^{2n}$, il en résulte que $P_n = F_n^{(n)}$ est une fonction polynôme de degré n et de coefficient dominant :

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{2^n n!} X^n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} X^n$$

2. a) Soit $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}(X) = 0$ une relation de dépendance entre les polynômes de la famille. Supposons les coefficients non tous nuls et soit i le plus petit des indices k tels que $\alpha_k \neq 0$. Il reste donc :

$$\alpha_i B_{n,i}(X) + \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k B_{n,k}(X) = 0.$$

Dans $\mathbb{R}[X]$ on peut alors simplifier par $(X+1)^i$ et en substituant ensuite à X la valeur -1, on trouve $\alpha_i = 0$, ce qui prouve que notre hypothèse est absurde.
(En clair la famille est libre car échelonnée en valuation par rapport à $(X+1)$).
La famille est libre, formée d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, et de cardinal *ad hoc*,il s'agit bien d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ se décompose sur cette base, et en appliquant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \frac{1}{2^n n!}[(X-1)^n(X+1)^n]^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(X-1)^n]^{(k)} [(X+1)^n]^{(n-k)} \\
&= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k} \times \frac{n!}{k!}(X+1)^k
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}(X)$$

$$P_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}^2 B_{n,k}$$

c) A chaque fois, il n'y a qu'un terme utile et :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n}B_{n,n}(1) = 1\ ;\ P_n(-1) = \frac{1}{2^n}B_{n,0}(-1) = (-1)^n$$

d) On a :

$$P_n(-X) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(-X+1)^k(-X-1)^{n-k}$$

$$= (-1)^n\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X-1)^k(X+1)^{n-k} = (-1)^nP_n(X)$$

Ainsi P_n a même parité que n, si vous nous permettez cet abus.

3. a) Toujours grâce à la formule de Leibniz :

$$F_n^{(p)}(X) = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\times\frac{n!}{(n-k)!}(X-1)^{n-k}\times\frac{n!}{(n-p+k)!}(X+1)^{n-p-k}$$

et en regroupant :

$$F_n^{(p)}(X) = \sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{2^n n!}\binom{n}{k}\binom{n}{p-k}B_{2n-p,n-k}(X)$$

b) C'est clair par la formule précédente et on pourrait aussi invoquer le rapport entre l'ordre de multiplicité d'une racine et l'annulation des dérivées successives ...

c) $\star$ F_n s'annule en -1 et 1, donc (Rolle) F_n' s'annule en au moins un point de $]-1,1[$.

$\star$ F_n' s'annule en -1 et 1 et en au moins un point de $]-1,1[$, donc (Rolle et Rolle) F_n'' s'annule en au moins deux points de $]-1,1[$.

$\star$ Au bout de n opérations, $F_n^{(n)}$ s'annule en au moins n points de l'intervalle $]-1,1[$ et comme F_n est de degré n, F_n s'annule exactement n fois sur $]-1,1[$.

Exercice 1.17.

1. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout réel $t > 0$, on considère la fonction g_t définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g_t(x) = \dfrac{f(tx)}{f(x)}$.

On suppose que, pour tout $t > 0$, $g_t(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. On définit alors la fonction L par : $\forall\, t > 0, L(t) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_t(x)$.

a) Montrer que L est croissante et calculer $L(1)$

b) Montrer que $\forall (s,t) \in (]0,+\infty[)^2,\ L(st) = L(s)\times L(t)$.

En déduire que : $\forall\, x \in]0,+\infty[, L\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{1}{L(x)}$, puis que :

$$\forall\, s \in]0,+\infty[, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, L(s^n) = (L(s))^n \text{ et } L(s^{1/n}) = (L(s))^{1/n}.$$

2. Montrer que L est continue sur $]0,+\infty[$ (on pourra distinguer $t=1$ et $t \neq 1$).

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $h(x) = \ln(L(\mathrm{e}^x))$.

a) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ h(x+y) = h(x) + h(y)$.

b) En considérant $\displaystyle\int_0^1 h(x+t)dt$, montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

c) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall\, t \in]0,+\infty[,\ L(t) = t^k$.

Solution :

1. a) $0 < t_1 < t_2 \implies \forall\, x \geqslant 0, 0 \leqslant t_1 x \leqslant t_2 x \implies g_{t_1}(x) \leqslant g_{t_2}(x)$ et, par prolongement des inégalités à la limite : $L(t_1) \leqslant L(t_2)$:

La fonction L est croissante.

Il est clair que $L(1) = 1$.

b) $\star$ On peut écrire : $g_{st}(x) = \dfrac{f(stx)}{f(x)} = \dfrac{f(s(tx))}{f(tx)} \times \dfrac{f(tx)}{f(x)}$ et par passage à la limite lorsque x (donc aussi tx) tend vers $+\infty$:

$$L(st) = L(s)L(t)$$

$\star$ Ainsi $1 = L(1) = L\big(x\frac{1}{x}\big) = L(x)L\big(\frac{1}{x}\big)$ et :

$$L\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{1}{L(x)}$$

$\star$ $L(st) = L(s)L(t)$ donne par un argument de récurrence simple :

$$\forall\, s > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, L(s^n) = (L(s))^n$$

$\star$ Ainsi : $L(s) = L((s^{1/n})^n) = (L(s^{1/n}))^n$ et $L(s^{1/n}) = (L(s))^{1/n}$

2. La fonction L est croissante, donc admet en tout point t une limite à gauche $L_-(t)$ et une limite à droite $L_+(t)$ et L est continue en t si la limite à gauche et la limite à droite en t sont égales (d'ailleurs alors égales à $L(t)$).

$\star$ On a, par exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{1/n} = 1$ et :

$$L_+(1) = \lim_{n\to+\infty} L(2^{1/n}) = \lim_{n\to+\infty} (L(2))^{1/n} = L(2)^0 = 1 = L(1)$$

$\star$ On procède exactement de la même façon pour la limite à gauche en 1 en partant par exemple de $(1/2)^{1/n}$ ...

$$L \text{ est continue au point } 1.$$

$\star$ Soit $x_0 \neq 1$ et (u_n) une suite quelconque convergente de limite x_0, alors par continuité de L en 1 :

$$L(u_n) = L\Big(\frac{u_n}{x_0}x_0\Big) = L\Big(\frac{u_n}{x_0}\Big)L(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L(1)L(x_0) = L(x_0)$$

Et, par le théorème de continuité séquentielle, L est continue au point x_0.

3. a) $h(x+y) = \ln(L(\mathrm{e}^{x+y})) = \ln(L(\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y)) = \ln(L(\mathrm{e}^x)L(\mathrm{e}^y))$
$= \ln(L(\mathrm{e}^x) + \ln(L(\mathrm{e}^y) = h(x) + h(y)$.

b) Soit H une primitive de la fonction continue h, on a :

$$H(x+1) - H(x) = \int_x^{x+1} h(u)\,du = \int_0^1 h(x+t)\,dt = \int_0^1 (h(x)+h(t))\,dt$$
$$= h(x) + C$$

La fonction H étant de classe $\mathcal{C}^1$, il vient en dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+, h'(x) = h(x+1) - h(x) = h(x) + h(1) - h(x) = h(1)$$

Ainsi la fonction h est affine et comme $h(0) = \ln(L(1)) = 0$, h est linéaire :

$$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, x \geqslant 0, h(x) = \alpha x$$

Alors :

$$\forall\, t > 0, L(t) = L(\mathrm{e}^{\ln t}) = \mathrm{e}^{h(\ln t)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln t} = t^\alpha$$

Exercice 1.18.

Dans tout cet exercice, $I = \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]$.

On définit une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de I sur $\mathbb{R}$, par : $f_0 = 1$, et pour tout $n \geqslant 0$, pour tout $x \in I$:

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f_n(t) + f_n(t^2))dt$$

1. a) Calculer f_1 et f_2.

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est polynomiale.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$ existe. On le note D_n.

b) Calculer D_1.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_{n+1} \leqslant \dfrac{D_n}{2}$. En déduire la limite de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Montrer que pour tout x fixé de I, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $f(x)$ sa limite.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

a) Justifier l'existence de M_n.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n \leqslant 1 + \dfrac{M_{n-1}}{2}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(x, y) \in I^2$: $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant 2|x - y|$. En déduire que la fonction f est continue sur I.

6. a) Montrer que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour tout $x \in I$:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}\big(1 - \frac{1}{2^p}\big)$$

b) En déduire que pour tout $x \in I$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

c) Montrer que f vérifie, pour tout x de I :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t) + f(t^2))dt$$

Solution :

1. a) $f_1(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x 2dt = 1 + x$;

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (2 + t + t^2)\,dt = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

b) Si $t \mapsto f_n(t)$ est polynomiale, il en est de même de $t \mapsto f_n(t^2)$; les fonctions polynomiales ayant des primitives polynomiales, $t \mapsto f_{n+1}(t)$ est encore polynomiale. On conclut par l'argument de récurrence habituel.

2. a) f_n et f_{n-1} sont continues sur le segment $[-1/2; 1/2]$, donc y sont bornées, ainsi D_n existe.

b) $f_1(x) - f_0(x) = x$, donc $D_1 = \dfrac{1}{2}$.

c) $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \dfrac{1}{2}\Big|\displaystyle\int_0^x ((f_n(t) - f_{n-1}(t)) + (f_n(t^2) - f_{n-1}(t^2)))\,dt\Big|$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big|\int_0^x (|f_n(t)-f_{n-1}(t)|+|f_n(t^2)-f_{n-1}(t^2)|)\,dt\Big|$$

Comme $t\in[-1/2,1/2] \implies t^2\in[-1/2,1/2]$, on peut majorer, et :

$$|f_{n+1}(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{1}{2}\Big|\int_0^x (D_n+D_n)\,dt\Big| \leqslant D_n|x|\leqslant \frac{1}{2}D_n$$

et par passage à la borne supérieure :

$$D_{n+1}\leqslant \frac{1}{2}D_n$$

Ainsi $D_n\leqslant \big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}D_1=\big(\frac{1}{2}\big)^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} D_n=0$.

3. La question précédente montre que la série de terme général $f_n(x)-f_{n-1}(x)$ est convergente pour tout x de I. Ceci signifie que la suite de terme général $f_n(x)$ est convergente pour tout x de I.

4. a) f_n est continue sur I, donc bornée sur ce segment.

b) $f_n(x)|=\big|1+\frac{1}{2}\int_0^x (f_{n-1}(t)+f_{n-1}(t^2))\,dt\big|\leqslant 1+\frac{1}{2}\big|\int_0^x 2M_{n-1}\,dt\big|$

$\leqslant 1+M_{n-1}|x|\leqslant 1+M_{n-1}$

D'où, par passage à la borne supérieure :

$$M_n\leqslant 1+\frac{1}{2}M_{n-1}$$

5. $|f_n(x)-f_n(y)|=\frac{1}{2}\big|\int_x^y (f_{n-1}(t)+f_{n-1}(t^2))\,dt\big|\leqslant \frac{1}{2}|y-x|2M_{n-1}$.

Or une récurrence élémentaire montre que pour tout k, $M_k\leqslant 2$ et ainsi :

$$\forall\, x\in I, |f_n(x)-f_n(y)|\leqslant 2|x-y|$$

Par prolongement des inégalités à la limite, on a donc :

$$\forall\, x\in I, |f(x)-f(y)|\leqslant 2|x-y|$$

et f est continue sur I.

6. a) $f_{n+p}(x)-f_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}(f_k(x)-f_{k-1}(x))$, d'où :

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|f_k(x)-f_{k-1}(x)|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}\big(\tfrac{1}{2}\big)^k=\big(\tfrac{1}{2}\big)^n(1-\big(\tfrac{1}{2}\big)^p)$$

b) n étant fixé, ainsi que x, il n'y a plus qu'à faire tendre p vers l'infini, et :

$$\forall\, x\in I, |f(x)-f_n(x)|\leqslant \frac{1}{2^n}$$

c) Il suffit de vérifier que pour tout x de I :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x (f_n(t)+f_n(t^2))\,dt = \int_0^x (f(t)+f(t^2))\,dt$$

Or :

$$\left|\int_0^x ((f_n(t)-f(t))-(f_n(t^2)-f(t^2)))\,dt\right| \leqslant \left|\int_0^x \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)dt\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$$

On a donc bien le résultat annoncé, et donc :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x (f(t)+f(t^2))\,dt$$

Exercice 1.19.

Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0,1]$, à valeurs réelles.

À tout $f \in E$, on associe g définie sur $[0,1]$ par

$$g(x) = \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\,dt$$

1. Vérifier que g est un élément de E et que l'application $u : f \mapsto g$ est un endomorphisme de E.

2. Montrer que $g = u(f)$ si et seulement si g est deux fois dérivable sur $[0,1]$ telle que $g'' = -f$, $g'(1) = 0$ et $g(0) = 0$.

3. L'application u est-elle injective ?

Solution :

1. Pour $x \in [0,1]$, on a :

$$g(x) = \int_0^1 \inf(x,t)f(t)\,dt = \int_0^x tf(t)\,dt + \int_x^1 xf(t)\,dt.$$

En notant F_1 une primitive de $t \mapsto tf(t)$ et F une primitive de f, on a donc :

$$g(x) = F_1(x) - F_1(0) + x(F(1) - F(x))$$

Sous cette forme, il est clair que la fonction g est continue sur $[0,1]$ (et même de classe $\mathcal{C}^1$).

D'autre part, la linéarité de l'opérateur $f \mapsto g$ résulte des propriétés des opérations et de la linéarité de l'opérateur « intégration sur $[0,1]$ ».

2. Soit $f \in E$ et $g = u(f)$. Nous avons déjà dit que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et :

$g'(x) = F_1'(x) + (F(1) - F(x)) - xF'(x) = xf(x) + F(1) - F(x) - xf(x)$

$$\forall x \in [0,1], g'(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$$

La fonction g' est donc encore de classe $\mathcal{C}^1$ et $g''(x) = -f(x)$.

Enfin, $g(0) = F_1(0) - F_1(0) + 0 \times (F-1) - F(0)) = 0$ et $g'(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,dt = 0$.

Réciproquement, considérons une fonction g deux fois dérivable sur $[0,1]$, telle que $g(0) = 0$, $g'(1) = 0$ et posons $f = -g''$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,dt &= \int_0^x - t g''(t)\,dt - x\int_x^1 g''(t)\,dt \\ &= \big[-tg'(t)\big]_0^x + \int_0^x g'(t)\,dt - x\big[g'(t)\big]_x^1\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \inf(x,t) f(t)\,dt = -xg'(x) + g(x) - g(0) + xg'(x) - xg'(1) = g(x)$$

On a donc bien $g = u(f)$.

3. Si f est telle que $g = u(f) = 0$, alors g'' est la fonction nulle sur $[0,1]$ et donc f aussi, ce qui prouve que u est un opérateur injectif.