3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère deux variables aléatoires indépendantes réelles X et Y, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre 1.

1. a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer une densité de la variable $W = Y - tX$.

   b) Déterminer, s'il existe, le moment d'ordre n (avec $n \geqslant 1$) de W.

2. En déduire une densité de la variable $Z = \dfrac{Y}{X}$.

3. Déterminer la loi de la variable $U = \dfrac{X}{X+Y}$.

Solution :

1. a) Les variables aléatoires Y et $-tX$ sont indépendantes et ont des densités : on peut donc calculer une densité de $Y - tX$ par produit de convolution.
On sait par le cours que si f_X est une densité de X, une densité de f_{aX+b} est donnée, pour $a \neq 0$ et tout b, par :

$$f_{aX+b}(x) = \frac{1}{|a|} f_X\big(\frac{x-b}{a}\big)$$

Ainsi, ici :

$$f_{-tX}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{x/t}}{t} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

De plus :

$$f_{-tX}(u) f_Y(x-u) \neq 0 \iff \begin{cases} u \leqslant 0 \\ x-u \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u \leqslant 0 \\ x \geqslant u \end{cases}$$

Donc :
• si $x \leqslant 0$, la condition précédente est équivalente à $u \leqslant x$ et :

$$\begin{aligned} f_W(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_{-tX}(u) f_Y(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{t} e^{u/t} e^{u-x} du \\ &= e^{-x}\Big[\frac{1}{t+1} e^{(1+\frac{1}{t})u}\Big]_{\to -\infty}^{x} = \frac{e^{x/t}}{1+t} \end{aligned}$$

• si $x \geqslant 0$, la condition précédente est équivalente à $u \leqslant 0$ et :

$$f_W(x) = \int_{-\infty}^{0} f_{-tX}(u) f_Y(x-u)\, du = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{t} e^{u/t} e^{u-x}\, du = \frac{e^{-x}}{1+t}$$

b) Par comparaison « Riemannienne », pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$I_n = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^n e^{x/t}}{1+t}\, dx \text{ et } J_n = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^n e^{-x}}{1+t}\, dx$$

convergent.
Le changement de variable de classe C^1 strictement monotone, $u = -\dfrac{x}{t}$ donne :

$$I_n = \frac{t}{1+t} \int_{0}^{+\infty} (-tu)^n e^{-u}\, du = \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t} \int_{0}^{+\infty} u^n e^{-u}\, du = \frac{(-1)^n t^{n+1} n!}{1+t}$$

et de même $J_n = \dfrac{n!}{1+t}$.

2. On a $Z(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^+$. Donc, pour tout $t \leqslant 0, F_Z(t) = 0$.
Soit $t > 0$:

$$P(Z \leqslant t) = P\big(\frac{Y}{X} \leqslant t\big) = P(W \leqslant 0) = \frac{t}{1+t}$$

Une densité de Z est donnée par :

$$f_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

3. On vérifie que $U(\Omega) \subseteq [0,1]$. Ainsi, pour $t \in]0,1[$:

$$P(U \leqslant t) = P\big(\frac{X}{X+Y} \leqslant t\big) = P(X - tX \leqslant tY) = P\big(Z \leqslant \frac{t}{1-t}\big) = t$$

Cela signifie que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 3.2.

1. Déterminer le réel α tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t.\mathrm{e}^{-t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

α ayant la valeur trouvée, soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et déterminer l'espérance $E(X^n)$ de X^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. a) Pour quelles valeurs du réel u, la variable aléatoire e^{uX} a-t-elle une espérance ?

b) Pour quelles valeurs du réel u, la série de terme général $\dfrac{u^n}{n!}E(X^n)$ est-elle convergente ?

c) Pour quelles valeurs du réel u peut-on écrire :

$$E\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} X^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} E(X^n)\ ?$$

4. Pour $u \in \mathbb{R}$, déterminer la fonction de répartition et une densité de $Y_u = \mathrm{e}^{uX}$.

Solution :

1. La fonction f est positive si et seulement si $\alpha \geqslant 0$, et est continue. A l'aide d'une intégration par parties, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \alpha\, t\, \mathrm{e}^{-t}\, dt = \alpha \left(\big[-t\, \mathrm{e}^{-t} \big]_0^{\to +\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} dt \right) = \alpha$$

Donc :

$$\alpha = 1$$

2. Pour tout entier n, $t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t} = o(1/t^2)$ en $+\infty$, et par intégration par parties et récurrence :

$$E(X^n) = \Gamma(n+2) = (n+1)!.$$

3. a) Soit $Y_u = \mathrm{e}^{uX}$. On sait que $E(Y_0) = 1$.
Pour $u \neq 0$, par le théorème du transfert,

$$E(Y_u) = \int_0^{+\infty} t\, \mathrm{e}^{(u-1)t} dt.$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} t\,\mathrm{e}^{(u-1)\,t} = +\infty$, si $u \geqslant 1$ et $t\,\mathrm{e}^{(u-1)t} = o(1/t^2)$ au voisinage de $+\infty$ si $u < 1$, donc Y_u admet une espérance si et seulement si $u < 1$.
En utilisant une nouvelle intégration par parties, on obtient :

$$E\big(\mathrm{e}^{uX}\big) = \frac{1}{(u-1)^2}.$$

b) De manière immédiate, pour $u \in\,]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}\, E(X^n) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, u^n = \frac{1}{(1-u)^2}$$

c) Pour $u \in\,]-1,1[$,

$$E\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n\,X^n}{n!}\Big) = E\big(\mathrm{e}^{uX}\big) = \frac{1}{(u-1)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\frac{u^n}{n!}\, E(X^n)\Big]$$

4. En notant F la fonction de répartition de X, G_u la fonction de répartition et g_u une densité de Y_u, il vient :

$$G_u(y) = P(Y_u \leqslant y) = P\big(\mathrm{e}^{uX} \leqslant y\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ P(u\,X \leqslant \ln y) & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

Ainsi :
⋆ $Y_0 = 1$.
⋆ Si $u > 0$, pour $y > 0$,

$$G_u(y) = P\Big(X \leqslant \frac{\ln y}{u}\Big) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ F\big(\frac{\ln y}{u}\big) = 1 - \big(\frac{\ln y}{u} + 1\big)\, y^{-1/u} & \text{si } 1 < y \end{cases}$$

et, en dérivant :

$$g_u(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{uy} f\big(\dfrac{\ln y}{u}\big) = \dfrac{1}{u^2}\,\dfrac{\ln y}{y^{1+1/u}} & \text{si } y > 1 \end{cases}$$

⋆ Si $u < 0$, pour $y > 0$,

$$G_u(y) = P\Big(X \geqslant \frac{\ln y}{u}\Big) = 1 - F\Big(\frac{\ln y}{u}\Big)$$

soit : $G_u(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 - F\big(\frac{\ln y}{u}\big) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$, et

$$g_u(y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{uy} f\big(\dfrac{\ln y}{u}\big) & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3.3.

On dispose de N boîtes indiscernables ($N \in \mathbb{N}^*$) dans lesquelles on place l'une après l'autre des billes de façon aléatoire, avec équiprobabilité du choix des urnes à chaque placement et indépendance des différents choix.

Pour j positif ou nul, on note X_j le nombre de boîtes non vides après les j premiers lancers. Par convention $X_0 = 0$ et on suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire réelle X_j ?

Soit $j \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

2. a) Déterminer la loi de probabilité de X_0, X_1, X_2.

b) Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les probabilités conditionnelles :

$$P_{[X_j=i]}([X_{j+1} = k]) \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N.$$

c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'expression de : $P([X_{j+1} = k])$ en fonction des nombres $P([X_j = i]), 1 \leqslant i \leqslant N$.

3. Soit $j \in \mathbb{N}$. On numérote les boîtes de 1 à N.
On considère les événements :
- $B =$ « au moins une boîte est restée vide au terme de j lancers »
- $B_i =$ « la boîte de numéro i est restée vide au terme de j lancers » $(1 \leqslant i \leqslant N)$.

a) Déterminer la probabilité $P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cdots \cap B_{i_\ell})$ pour tous indices tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots i_\ell \leqslant N$.

b) En déduire $P(B)$.

c) En déduire $P([X_j = N])$.

4. Écrire un programme Pascal permettant de simuler la variable aléatoire X_j.

Solution :

1. Pour $j \geqslant 1$, X_j prend ses valeurs entre 1 et $\min(j, N)$.

2. a) $\star$ $P(X_0 = 0) = 1$, $P(X_1 = 1) = 1$.

$\star$ $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{n}$ (la probabilité que la deuxième bille aille dans la même boîte que la première vaut $\dfrac{1}{n}$) et $P(X_2 = 2) = \dfrac{n-1}{n}$.

b) pour $0 \leqslant i \leqslant N$:

$P_{(X_j=k)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{k}{n}$ (on retombe dans l'une des k boîtes déjà occupées),

$P_{(X_j=k-1)}(X_{j+1} = k) = \dfrac{n-k+1}{n}$ (on tombe dans l'une des $n-(k-1)$ boîtes vides à ce moment), Sinon : $P_{(X_j=i)}(X_{j+1}=k)=0$ (car en lançant une bille, le nombre de boîtes atteintes peut augmenter d'une unité ou rester le même).

c) $(X_j=i)_{0\leqslant i\leqslant \min(j,N)}$ est un système complet d'événements et donc :

$$\begin{aligned} P(X_{j+1}=k) &= \sum_{i=0}^{min(j,N)} P_{(X_j=i)}(X_{j+1}=k)P(X_j=i) \\ &= \frac{k}{n}P(X_j=k)+\frac{n-k+1}{n}P(X_j=k-1) \end{aligned}$$

3. a) Pour $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\ell\leqslant k$, on a par indépendance :

$$P(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cdots\cap B_{i_\ell})=\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

(car toutes les billes sont tombées dans les $(N-\ell)$ autres boîtes !)

b) On applique la formule du crible (de Poincaré) à l'événement :

$$B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_N$$

$$P(B)=\sum_{\ell=1}^{N-1}(-1)^{\ell+1}\sum_{i_1<i_2<\cdots i_\ell}P(B_{i_1}\cap B_{i_2}\cdots\cap B_{i_\ell})$$

Or la $n^{\text{ème}}$ somme comporte $\displaystyle\binom{N}{\ell}$ termes, tous de même probabilité, donc :

$$P(B)=\sum_{\ell=1}^{N-1}(-1)^{\ell+1}\binom{N}{\ell}\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

c) Clairement :

$$P(X_j=N)=1-P(B)=\sum_{\ell=0}^{N-1}(-1)^{\ell}\binom{N}{\ell}\big(\frac{N-\ell}{N}\big)^j$$

4. Une proposition de programme :

```
B= array[1..N] of integer ; (* les boîtes*)
For k := 1 to N do B[k] :=0 ; (* mise à zéro*)
For k :=1 to j do Begin
      u := random(N)+1 (* choix d'une boîte*)
      B[u] := B[u]+1 (* on rajoute une boule*)
                  end ;
decompte := 0 ;
For i = 1 to n do if B[i]<>0 then decompte := decompte +1
```

Exercice 3.4.

On considère deux dés (non nécessairement équilibrés) A et B à n faces chacun, faces numérotées de 1 à n, avec $n\geqslant 2$. On lance ces dés et on note X_1 le numéro obtenu sur le dé A et X_2 celui obtenu sur le dé B.

Cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $p_k = P([X_1 = k])$, $p'_k = P([X_2 = k])$ et $S = X_1 + X_2$. On note également $\mathcal{A} = S(\Omega)$ et $\forall\, j \in \mathcal{A},\ q_j = P([S = j])$.

Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité suivante :

$$\max_{(i,j)\in\mathcal{A}^2} |q_i - q_j| \geqslant \frac{1}{4n} \quad (\star)$$

1. Déterminer $\mathcal{A}$.

2. On suppose à présent que pour chaque dé chaque numéro i est remplacé par le numéro $n + 1 - i$. On note alors Y_1 et Y_2 les variables prenant pour valeurs les résultats sur les dés A et B respectivement et $S' = Y_1 + Y_2$.
Comparer les lois de S et S' et montrer que $\max\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \geqslant \dfrac{1}{2n}$.

3. On suppose que $\min\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \leqslant \dfrac{1}{4n}$. Montrer alors l'inégalité $(\star)$

4. On suppose que $\min\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j > \dfrac{1}{4n}$.

a) Comparer q_{n+1} et $p_1p'_n + p'_1p_n$, puis comparer q_{n+1} et $2\sqrt{q_2q_{2n}}$

b) En remarquant que l'on a $q_2 \leqslant q_{2n}$ ou $q_2 \geqslant q_{2n}$, démontrer l'inégalité $(\star)$.

5. La variable aléatoire S peut-elle suivre une loi uniforme ?

Solution :

1. De manière évidente $\mathcal{A} = [\![2, 2n]\!]$.

2. On a : $Y_1 = n + 1 - X_1, Y_2 = n + 1 - X_2$. Donc $Y_1(\Omega) = Y_2(\Omega) = [\![1, n]\!]$, et $S' = Y_1 + Y_2 = 2n + 2 - S$.
Ainsi $S'(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$ et, pour tout i de $[\![2, 2n]\!]$,

$$P(S' = i) = P(S = 2n + 2 - i) = q_{2n+2-i}.$$

$\star$ Dire que $\max\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j \geqslant \dfrac{1}{2n}$ est équivalent à dire : il existe $j_0 \in \mathcal{A}$ tel que $q_{j_0} \geqslant \dfrac{1}{2n}$.

Raisonnons par contraposée, et supposons que pour tout $j \in \mathcal{A},\ q_j < \dfrac{1}{2n}$.
Alors, comme $\mathcal{A}$ est de cardinal $2n - 1$, on aurait :

$$\sum_{j\in\mathcal{A}} q_j < 2n\times\frac{1}{2n} = 1$$

ce qui est clairement absurde.

3. On suppose dans cette question qu'il existe $i_0 \in [\![2, 2n]\!]$ tel que $q_{i_0} \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
On aura donc :

$$\max_{j\in\mathcal{A}} q_j - \min_{j\in\mathcal{A}} q_j = q_{j_0} - q_{i_0} \geqslant \frac{1}{4n}$$

et :

$$\max_{(i,j)\in\mathcal{A}^2} |q_j - q_i| \geqslant q_{j_0} - q_{i_0} \geqslant \frac{1}{4n}$$

4. On suppose que $\min\limits_{j\in\mathcal{A}} q_j > \dfrac{1}{4n}$. Donc pour tout $j \in \mathcal{A}, q_j > \dfrac{1}{4n}$.

a) On a $[(X_1 = 1) \cap (X_2 = n)] \cup [(X_2 = 1) \cap (X_1 = n)] \subset (S = n + 1)$.
D'où, par incompatibilité et indépendance :

$$\begin{aligned} P(S = n+1) &\geqslant P((X_1 = 1) \cap (X_2 = n)) + P((X_2 = 1) \cap (X_1 = n)) \\ &\geqslant P(X_1 = 1)P(X_2 = n) + P(X_2 = 1)P(X_1 = n) \end{aligned}$$

donc

$$q_{n+1} \geqslant p_1 p'_n + p_n p'_1.$$

Or pour a et b positifs, on a : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$.
Donc, en utilisant les événements :

$$(S = 2) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \text{ et } (S = 2n) = (X_1 = n) \cap (X_2 = n)$$
$$q_{n+1} \geqslant 2\sqrt{p_1 p'_n \times p_n p'_1} = 2\sqrt{q_2 q_{2n}}$$

b) $\star$ Si $q_2 \leqslant q_{2n}$, alors $q_{n+1} \geqslant 2q_2$ et $q_{n+1} - q_2 \geqslant q_2 \geqslant \dfrac{1}{4n}$.
Si $q_2 \geqslant q_{2n}$, alors $q_{n+1} \geqslant 2q_{2n}$ et $q_{n+1} - q_2 \geqslant q_{2n} \geqslant \dfrac{1}{4n}$.
Ainsi, on a toujours :

$$\big|q_{m+1} - q_2\big| \geqslant \frac{1}{4n}.$$

5. Supposons que S suive la loi uniforme. Ainsi pour tout $(i, j) \in \mathcal{A}^2, q_i = q_j$, ce qui est absurde car alors $0 \geqslant \dfrac{1}{4n}$.

Exercice 3.5.

On considère une suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telle que pour tout $n \geqslant 1$, U_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, où $p \in\,]1/2, 1[$.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable X_n par : $X_n = 2U_n - n$.

1. Pour $s \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $Y_{s,n}$ par : $Y_{s,n} = \mathrm{e}^{-sX_n}$.

a) Montrer que l'on a $E(Y_{s,n}) = (pe^{-s} + qe^{s})^n$, où $q = 1 - p$.

b) Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ et montrer que l'on a, pour tout réel $s \geqslant 0$: $P(X_n \leqslant 0) \leqslant E(Y_{s,n})$.

c) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité : $P(X_n \leqslant 0) \leqslant (2\sqrt{pq})^n$. On pose $r = 2\sqrt{pq}$. Vérifier que $r < 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la variable aléatoire Z_n en posant :

$$Z_n = \inf(0, X_1, \ldots, X_n).$$

a) Montrer que $Z_n(\Omega) \subseteq [\![-n, 0]\!]$ et calculer la probabilité $P\left([Z_n = -n]\right)$.

b) Soit $n \geqslant 2$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. On considère l'événement $A_k = \bigcup\limits_{i=k+1}^{n} [X_i \leqslant 0]$.

Montrer que $P(A_k) \leqslant \dfrac{r^{k+1}}{1-r}$.

c) Soit $i \in [\![-n, 0]\!]$. Prouver que l'on a :

$$P(Z_n = i) \leqslant P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(Z_k = i)$$

d) En déduire que, pour tout $k < n$, on a : $\dfrac{E(Z_n)}{n} \geqslant -P(A_k) + \dfrac{E(Z_k)}{n}$

e) Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{E(Z_n)}{n} = 0$.

Solution :

1. a) On a :

$$\begin{aligned} E(Y_{s,n}) &= E(\mathrm{e}^{-s(2U_n - n)}) = \mathrm{e}^{sn} E(\mathrm{e}^{-2sU_n}) = \mathrm{e}^{sn} \sum_{k=0}^{n} e^{-2sk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \mathrm{e}^{sn} (\mathrm{e}^{-2s} p + q)^n = \left(p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s}\right)^n \end{aligned}$$

b) On voit que $X_n(\Omega) = \{-n, -n+2, -n+4, ..., n-2, n\}$, et on a :

$$\begin{aligned} E(Y_{s,n}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{(n-2k)s} P(X_n = -2n + k) \\ &\geqslant \sum_{-n+2k \leqslant 0} \mathrm{e}^{(n-2k)s} P(X_n = -2n + k) \\ E(Y_{s,n}) &\geqslant \sum_{-n+2k \leqslant 0} P(X_n = -n + 2k) = P(X_n \leqslant 0) \end{aligned}$$

c) Avec ce qui précède, on obtient :

$$P(X_n \leqslant 0) \leqslant (p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s})^n = [f(s)]^n$$

Comme $f'(s) = -p\,\mathrm{e}^{-s} + q\,\mathrm{e}^{s} = q\,\mathrm{e}^{-s}(\mathrm{e}^{2s} - \dfrac{p}{q})$, on voit que f est strictement décroissante sur $[0, \ln\sqrt{p/q}]$ et strictement croissante sur $[\ln\sqrt{p/q}, +\infty[$. On a donc un minimum en $s = \ln\sqrt{p/q}$ et par suite :

$$P(X_n \leqslant 0) \leqslant f(2\ln\sqrt{p/q})^n = (2\sqrt{pq})^n$$

On a bien $r^2 = 4p(1-p) < 1$, car $x \mapsto x(1-x)$ est maximale sur $[0,1]$ en $\dfrac{1}{2}$.

2. On considère la variable aléatoire $Z_n = \inf(0, X_1, \dots, X_n)$.

a) Avec la question 1. b) on voit que $Z_n(\Omega) \subseteq [-n, 0]$. Comme la variable X_n est la seule qui peut prendre la valeur $-n$, on a :

$$P(Z_n = -n) = P(X_n = -n) = P(U_n = 0) = q^n.$$

b) On a :

$$P(A_k) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} P(X_i \leqslant 0) \leqslant \sum_{i=k+1}^{n} r^i = r^{k+1}\frac{1-r^{n-k}}{1-r} \leqslant \frac{r^{k+1}}{1-r}$$

c) Soit $i \in \{-n, ..., -1, 0\}$, on a :

$$P(Z_n = i) = P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(A_k^c \cap (Z_n = i))$$

Où A_k^c désigne le complémentaire de l'événement A_k.
Comme

$$(A_k^c \cap (Z_n = i)) = [\textstyle\bigcap_{j=k+1}^{n}(X_j > 0)] \cap (Z_n = i) \subseteq (Z_k = i)$$

car la valeur i ne peut être prise que par l'une des variables $0, X_1, ..., X_k$.
Il vient :

$$P(Z_n = i) \leqslant P(A_k \cap (Z_n = i)) + P(Z_k = i)$$

d) Soit $k < n$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{E(Z_n)}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{0} iP(Z_n = i) \geqslant \sum_{i=-n}^{0} \frac{i}{n} P(A_k \cap (Z_n = i)) + \frac{E(Z_k)}{n}\\ &\geqslant -\sum_{i=-n}^{0} P(A_k \cap (Z_n = i)) + \frac{E(Z_k)}{n} = -P(A_k) + \frac{E(Z_k)}{n}\end{aligned}$$

e) Avec la question 2. b) et la question précédente, on voit que :

$$0 \geqslant \frac{E(Z_n)}{n} \geqslant -\frac{r^{k+1}}{1-r} + \frac{E(Z_k)}{n}$$

pour tout $n > k$.
Soit $\varepsilon > 0$, et un entier k tel que $\dfrac{r^{k+1}}{1-r} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Cet entier k étant fixé, pour tout $n \geqslant \dfrac{2}{\varepsilon(1 + |E(Z_k)|)}$ on aura :

$$0 \geqslant \frac{E(Z_n)}{n} \geqslant -\frac{\varepsilon}{2} + \frac{E(Z_k)}{1 + |E(Z_k)|}\frac{\varepsilon}{2} \geqslant -\varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(Z_n)}{n} = 0.$$

Exercice 3.6.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $E(X) \geqslant \lambda P([X \geqslant \lambda])$.

Dans la suite de l'exercice, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n désigne une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, avec $0 < p < 1$, et x un réel strictement positif fixé. On pose $q = 1 - p$.

2. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n - np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

3. Etablir la formule $E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) = \mathrm{e}^{-n\lambda p}(p.\mathrm{e}^{\lambda} + q)^n$

4. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on pose : $\psi(\lambda) = \ln(p.\mathrm{e}^{\lambda} + q) - \lambda p$.

   a) Montrer que : $\sup\limits_{\lambda\geqslant 0} \psi''(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   b) En déduire que : $\sup\limits_{\lambda\geqslant 0} \psi(\lambda) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{8}$.

5. Montrer enfin l'inégalité : $P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx^2}$.

Solution :

1. On écrit :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x_i\geqslant\lambda} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i<\lambda} x_i P(X = x_i) \\ &\geqslant \sum_{x_i\geqslant\lambda} x_i P(X = x_i) \geqslant \lambda \sum_{x_i\geqslant\lambda} P(X = x_i) = \lambda P(X \geqslant \lambda) \end{aligned}$$

2. Par croissance de la fonction exponentielle et comme $\lambda \geqslant 0$, on a :

$$P(S_n - np \geqslant nx) = P(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)} \geqslant \mathrm{e}^{\lambda nx})$$

On applique alors la question précédente à $X = \mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}$. Il vient :

$$P(S_n - np \geqslant nx) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}}$$

3. Comme S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, en appliquant le théorème du transfert, il vient :

$$\begin{aligned} E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)}) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\lambda(k-np)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda np}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{\lambda}p)^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-n\lambda p}(p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^n \end{aligned}$$

4. a) La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ et

$$\psi'(\lambda) = -p + \frac{p\mathrm{e}^{\lambda}}{p\mathrm{e}^{\lambda}+q} \quad ; \quad \psi''(\lambda) = \frac{pq\mathrm{e}^{\lambda}}{(p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^2}$$

On vérifie que $\psi''(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{4}$ car $(p\mathrm{e}^{\lambda}-q)^2 = (p\mathrm{e}^{\lambda}+q)^2 - 4pq\mathrm{e}^{-\lambda} \geqslant 0$.

b) En intégrant et en vérifiant que $\psi'(0) = \psi(0) = 0$, il vient :

$$\psi'(\lambda) = \int_0^{\lambda} \psi''(u)\,du \leqslant \int_0^{\lambda} \frac{du}{4} = \frac{\lambda}{4}$$

et

$$\psi(\lambda) = \int_0^{\lambda} \psi'(u)\,du \leqslant \int_0^{\lambda} \frac{udu}{4} = \frac{\lambda^2}{8}$$

5. On sait que pour tout $\lambda > 0$,

$$P([S_n - np \geqslant nx]) \leqslant \frac{E(\mathrm{e}^{\lambda(S_n-np)})}{\mathrm{e}^{n\lambda x}} \leqslant \mathrm{e}^{-n(\lambda x - \psi(\lambda))}$$

Pour résoudre cette question, il suffit donc de montrer l'existence de $\lambda > 0$ tel que $2x^2 \leqslant \lambda x - \psi(\lambda)$, et par la question précédente, l'existence de $\lambda > 0$ tel que $\dfrac{\lambda^2}{8} \leqslant \lambda x - 2x^2$.

En résolvant cette inéquation en x (qui est un « carré parfait »), on voit que le réel $\lambda = 4x$ convient.

Exercice 3.7.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda(x-1)}$, où λ est un réel strictement positif.

1. Étudier, sur l'intervalle $[0,1]$, les variations de la fonction F définie par

$$F(x) = f(x) - x.$$

On donnera les tableaux de variations correspondant aux cas $\lambda \leqslant 1$ et $\lambda > 1$. En déduire en fonction des valeurs du paramètre λ le nombre de points fixes de f dans $[0,1]$. On désigne par $r(\lambda)$ le plus petit point fixe de f.

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite. Celle-ci peut-elle être égale à 1 ?

Dans une population on appelle descendants de première génération d'un individu, ses enfants, et plus généralement, pour $p \geqslant 1$, descendants de $(p+1)^{\text{ème}}$ génération les enfants de ses descendants de $p^{\text{ème}}$ génération. On suppose :

• les nombres d'enfants de différents individus d'une même génération sont des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On note X une de ces variables aléatoires.

• Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$, les variables aléatoires associant aux différents individus d'une même génération les nombres possibles de leurs descendants de $n^{\text{ème}}$ génération sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note X_n une de ces variables aléatoires

• On note, pour tout k de $\mathbb{N}$, $p(k) = P(X = k)$, la probabilité pour un individu d'avoir k enfants, et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = P(X_n = 0)$, (avec $u_0 = 0$), la probabilité pour un individu de n'avoir aucun descendant à la $n^{\text{ème}}$ génération.

La limite de cette suite représente, si elle existe, la probabilité pour un individu de voir sa descendance s'éteindre.

3. a) Montrer que pour tout réel x, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p(k)x^k = f(x)$.

b) En remarquant que $u_1 = f(u_0)$, calculer la probabilité conditionnelle pour qu'un individu n'ait pas de petits-enfants sachant qu'il a exactement k enfants. En déduire que $u_2 = f(u_1)$.

c) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

Solution :

Soit f la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par $f(x) = \exp\left(\lambda(x-1)\right),\ \lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On a $F'(x) = f'(x) - 1 = \lambda e^{\lambda(x-1)} - 1$.

La fonction F' s'annule pour $x = 1 + \dfrac{1}{\lambda}\ln\left(\dfrac{1}{\lambda}\right) = r(\lambda)$

Il faut donc discuter selon la position de $r(\lambda)$ par rapport à 1 :

$\lambda \leqslant 1$	$\lambda > 1$

x	0		1
$F'(x)$		$-$	
F	$e^{-\lambda}$	$\searrow$	0

x	0		$r(\lambda)$		1
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F	$e^{-\lambda}$	$\searrow$		$\nearrow$	0

Pour $\lambda \leqslant 1$ il y a une seule solution dans $[0,1]$ qui est 1 et deux solutions si $\lambda > 1$.

2. La fonction f est croissante sur $[0,1]$ et $u_1 \geqslant u_0$ donc, comme la suite est monotone, elle est croissante. Le point $r(\lambda)$ est un point fixe pour f. Comme $u_0 \leqslant r(\lambda)$, on en déduit toujours par croissance de f et par récurrence que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant r(\lambda)$$

Par suite, f étant continue, (u_n) converge vers $r(\lambda)$. Pour $\lambda \leqslant 1$, cette limite est 1.

3. Les hypothèses permettent de déduire,

a) Pour tout réel x de $]0,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p(k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)} = f(x)$$

b) On a $u_1 = P(X_1 = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda} = f(u_0)$. De plus, par indépendance

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, P_{(X_1=k)}(X_2 = 0) = (\mathrm{e}^{-\lambda})^k = \mathrm{e}^{-\lambda k}$$

Car cela signifie que chacun des k enfants est sans descendance de première génération. On en déduit :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(X_2 = 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda k}\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \exp(\lambda \mathrm{e}^{-\lambda})\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= f(\mathrm{e}^{-\lambda}) = f(u_1) \end{aligned}$$

c) De la même manière,

$$\begin{aligned} u_{n+1} = P(X_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P_{(X_1=k)}(X_{n+1} = 0)P(X_1 = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} u_n^k \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \exp(\lambda u_n)\mathrm{e}^{-\lambda} = f(u_n) \end{aligned}$$

On en déduit que la limite de la suite (u_n) est $r(\lambda)$.

Exercice 3.8.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$ et qui admet un moment d'ordre 2 ($E(X^2)$ existe).

1. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} x^2P(|X| \geqslant x) = 0$.

2.Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)dt$ est convergente.

3. Montrer que : $E(X^2) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)dt$.

4. Montrer que l'on a : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)dt$.

5. On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose : $X = \inf(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Montrer que X est une variable aléatoire réelle à densité qui admet un moment d'ordre 2.

b) Calculer la variance de X.

Solution :

1. On a : $0 \leqslant x^2P(|X| \geqslant x) = x^2\displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f(t)\,dt + x^2\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$

$$0 \leqslant x^2P(|X| \geqslant x) \leqslant \int_{-\infty}^{-x} t^2f(t)\,dt + \int_x^{+\infty} t^2f(t)\,dt$$

Comme par hypothèse l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ est convergente, on en déduit immédiatement (restes d'intégrales convergentes) que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2P(|X| \geqslant x) = 0$$

2. Notons F la fonction de répartition de X. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$P(|X| \geqslant t) = P(X \leqslant -t) + P(X > t) = F(-t) + 1 - F(t)$$

Si $x > 0$, en tenant compte de la question 1. on voit que :

$$\begin{aligned}\int_0^x tP(|X| \geqslant t)dt &= \int_0^x t[F(-t) + 1 - F(t)]dt \\ &= \Big[\frac{t^2}{2}(F(-t) + 1 - F(t))\Big]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{2}[-f(-t) - f(t)]dt \\ &= \frac{1}{2}x^2P(|X| \geqslant x) + \int_{-x}^x \frac{s^2}{2}f(s)\,ds.\end{aligned}$$

Comme la quantité $x^2P(|X| \geqslant x)$ est de limite nulle et que la dernière intégrale converge, on obtient bien la convergence de l'intégrale considérée.

3. Avec la question 1., on voit que, lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_0^x tP(|X| \geqslant t)\,dt = \frac{1}{2}x^2P(|X| \geqslant t) + \int_{-x}^x \frac{s^2}{2}f(s)\,ds \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{E(X^2)}{2}$$

D'où l'égalité souhaitée.

4. On peut prouver l'existence de $E(X)$ avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz ou bien en utilisant l'inégalité $2|X| \leqslant 1 + X^2$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x P(|X| \geqslant t)\,dt &= \int_0^x [F(-t) + 1 - F(t)]\,dt\\ &= \big[t(F(-t) + 1 - F(t))\big]_0^x - \int_0^x t[-f(-t) - f(t)]\,dt\\ &= xP(|X| \geqslant x) + \int_{-x}^x sf(s)\,ds\end{aligned}$$

Comme on a $\lim\limits_{x\to+\infty} xP(|X| \geqslant x) = 0$, en passant à la limite on obtient :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)\,dt.$$

5. a) Notons F la fonction de répartition de X. En tenant compte de l'indépendance des variables $X_1, \dots, X_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}F(t) = P(X \leqslant t) &= 1 - P(X > t) = 1 - P(\textstyle\bigcap_{i=1}^n (X_i > t))\\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t))\end{aligned}$$

Comme les variables X_i suivent des lois exponentielles, on en déduit facilement que X est une variable à densité. De plus on a $0 \leqslant X \leqslant X_1 + \cdots + X_n$, d'où $X^2 \leqslant (X_1 + \cdots + X_n)^2$, et par suite X admet un moment d'ordre 2 puisque chaque X_i en admet un.

b) Avec ce qui précède, on voit que :

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_0^{+\infty} P(|X| \geqslant t)\,dt = \int_0^{+\infty} P(\textstyle\bigcap_{i=1}^n (X_i > t))\,dt\\ &= \int_0^{+\infty} \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(t))dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)t}dt = \frac{1}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}\end{aligned}$$

et, avec $S = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, que :

$$E(X^2) = 2\int_0^{+\infty} tP(|X| \geqslant t)\,dt = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-St}dt$$

$$= 2\Big[-\frac{t}{S}\mathrm{e}^{-St}\Big]_0^{+\infty} + \frac{2}{S}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-St}dt = \frac{2}{S^2} = \frac{2}{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2}$$

D'où :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2}$$

Exercice 3.9.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $n+1$ variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pose :

$$Y_n = X_1X_2...X_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire $-\ln(X_1)$. En déduire une densité de $-\ln(Y_n)$.

2. Le but de cette question est de calculer $p = P([Y_n < X_{n+1}])$.

a) Montrer que la variable aléatoire $\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n)$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,dt & \text{si } x \geqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x}{2^n} & \text{sinon} \end{cases}$$

b) En déduire la valeur de p.

3. a) Déterminer un équivalent de $h(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction h étant la fonction définie dans la question précédente.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Solution :

1. La variable aléatoire $-\ln(X_1)$ prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$.
Soit $t \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$P(-\ln(X_1) \leqslant t) = P(\ln(X_1) \geqslant -t) = P(X_1 \geqslant \mathrm{e}^{-t}) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

Ainsi, $-\ln(X_1)$ suit la loi exponentielle de paramètre 1, ou encore la loi $\gamma(1,1)$.

Étant donné que $-\ln(Y_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}(-\ln(X_k))$, et que les $-\ln(X_k)$ sont mutuellement indépendantes en tant que fonctions de variables mutuellement indépendantes, on a grâce à la stabilité de la loi γ :

$$-\ln(Y_n) \hookrightarrow \gamma(1,n).$$

Ainsi, une densité f_n de $-\ln(Y_n)$ est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Par convolution, la variable $\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n)$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) f_n(t)\, dt$$

où $f(t) = e^t$ si $t \leqslant 0$ et $f(t) = 0$ sinon. On remarque que :

$$(f(x-t)f_n(t) \neq 0) \iff (t \geqslant 0 \text{ et } x - t \leqslant 0) \iff (t \geqslant x \text{ et } t \geqslant 0)$$

• Premier cas : $x \leqslant 0$.

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{x-t} \frac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt = e^x \int_0^{+\infty} e^{-2t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

En faisant le changement de variable $u = 2t$, on obtient :

$$h(x) = e^x \int_0^{+\infty} e^{-u} \big(\frac{u}{2}\big)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{2}\, du = \frac{e^x}{2^n} \int_0^{+\infty} f_n(u)\, du = \frac{e^x}{2^n}$$

• Deuxième cas : $x \geqslant 0$. Alors :

$$h(t) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-2t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, dt$$

b) On a alors :

$$p = P(\ln(Y_n) < \ln(X_{n+1})) = 1 - P(\ln(X_{n+1}) - \ln(Y_n) \leqslant 0)$$
$$= 1 - \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{2^n}\, dx = 1 - \frac{1}{2^n}\big[e^x\big]_{\to -\infty}^{0}$$

donc :

$$p = 1 - \frac{1}{2^n}$$

3. a) Pour $x \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$ existe (car la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $n > 1$).

En faisant des intégrations par parties successives, il vient :

$$I_n(x) = \frac{x^{n-1}e^{-2x}}{2(n-1)!} + e^{-2x} \sum_{j=0}^{n-2} a_{n,j} x^j$$

où les coefficients $a_{n,j}$ sont sans intérêt ici. Ainsi :

$$I_n(x) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{x^{n-1}e^{-2x}}{2(n-1)!},$$

b) Soit $x > 0$. Par la question précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}}{2(n-1)!} = 0$$

Exercice 3.10.

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant respectivement la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et la loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$.

1. Soit r un réel strictement positif. Quelle est la loi de la variable $-rX$?

2. Montrer que la variable $S = Y - rX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}$.

b) Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.

c) La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

4. Soit Z et T deux variables aléatoires indépendantes dont des densités, notées f_Z et f_T sont nulles sur $\mathbb{R}^-$ et strictement positives sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) On pose $V = \ln(Z)$. Donner, en fonction de f_Z, une densité de V.

b) On pose $W = -\ln(T)$. Donner, en fonction de f_T, une densité de W.

c) On pose $S = \ln\left(\frac{Z}{T}\right)$. Déduire de ce qui précède qu'une densité de S est donnée par :

$$f_S(s) = \mathrm{e}^s \int_0^{+\infty} u f_Z(u\,\mathrm{e}^s) f_T(u)du$$

d) Montrer qu'une densité de la variable aléatoire Q définie par $Q = \dfrac{Z}{T}$ est donnée par :

$$f_Q(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t f_Z(xt) f_T(t)dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

e) Retrouver, grâce à cette dernière formule, une densité de la variable aléatoire R définie à la question 3.

Solution :

1. La variable aléatoire $-rX$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^-$, et pour $x \leqslant 0$,

$$P(-rX \leqslant x) = P(X \geqslant -\frac{x}{r}) = \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}}.$$

Une densité de $-rX$ est donc : $f : x \mapsto \dfrac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}}\mathbf{1}_{]-\infty,0]}$.

2. On a, par convolution :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t)f_{-rX}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_Y(x-t)\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{r}}\,dt$$

$\rightarrow$ Si $x \geqslant 0$, on obtient :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{0} \mu\mathrm{e}^{-\mu(x-t)}\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda t}{r}}\,dt = \tfrac{\lambda\mu}{r}\mathrm{e}^{-\mu x}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{r})t}\,dt = \frac{\lambda\mu\mathrm{e}^{-\mu x}}{\lambda+\mu r}$$

$\rightarrow$ Si $x \leqslant 0$, on obtient :

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{r}\mathrm{e}^{-\mu x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{r})t}dt = \frac{\lambda\mu\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{r}x}}{\lambda+\mu r}$$

Ainsi :

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{r}} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. a) Soit r un réel strictement positif. On a :

$$P\Big(\frac{Y}{X} \leqslant r\Big) = P(Y \leqslant rX) = P(Y - rX \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu r}\mathrm{e}^{\frac{\lambda}{r}t}\,dt$$

Finalement :

$$\forall r > 0,\ F_R(r) = \frac{\mu r}{\mu r + \lambda}$$

b) Une densité de R est donc, par dérivation et pour $r \geqslant 0$ (ou $r > 0$) :

$$f_R(r) = \frac{\mu\lambda}{(\mu r + \lambda)^2}$$

c) Comme $rf_R(r) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu}\times\dfrac{1}{r}$, la variable R n'admet pas d'espérance.

4. a) On a : $F_V(x) = P(V \leqslant x) = P(\ln Z \leqslant x) = P(Z \leqslant \mathrm{e}^x) = F_Z(\mathrm{e}^x)$.
En dérivant, on obtient :

$$f_V(x) = \mathrm{e}^x f_Z(\mathrm{e}^x)$$

b) De même :

$$F_W(x) = P(W \leqslant x) = P(-\ln T \leqslant x) = P(\ln T \geqslant -x) = P(T \geqslant \mathrm{e}^{-x})$$
$$= 1 - F_T(\mathrm{e}^{-x}).$$

En dérivant :

$$f_W(x) = \mathrm{e}^{-x} f_T(\mathrm{e}^{-x})$$

c) Ainsi : $S = \ln\left(\frac{Z}{T}\right) = \ln Z - \ln T = V + W$. Les variables Z et T étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que les variables V et W sont indépendantes. On peut donc effectuer un produit de convolution pour trouver une densité de Z :

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(s-t) f_W(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{s-t} f_Z(\mathrm{e}^{s-t}) \mathrm{e}^{-t} f_T(\mathrm{e}^{-t})\, dt$$
$$= \mathrm{e}^s \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} f_Z(\mathrm{e}^{s-t}) f_T(\mathrm{e}^{-t})\, dt$$

On effectue alors le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$, avec $dt = -\frac{du}{u}$. On obtient donc :

$$f_S(s) = \mathrm{e}^s \int_0^{+\infty} u f_Z(u\,\mathrm{e}^s) f_T(u)\, du$$

d) Pour $x > 0$,

$$F_Q(x) = P(Q \leqslant x) = P\left(\frac{Z}{T} \leqslant x\right) = P(\ln\left(\frac{Z}{T}\right) \leqslant \ln x) = F_S(\ln x)$$

En dérivant, on obtient :

$$f_Q(x) = \frac{1}{x} f_S(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{\ln x} \int_0^{+\infty} u f_Z(ux) f_T(u)\, du$$

Finalement :

$$f_Q(x) = \int_0^{+\infty} u f_Z(xu) f_T(u)\, du.$$

e) La question précédente donne alors : une densité de R est la fonction h telle que pour $x \geqslant 0$:

$$h(x) = \int_0^{+\infty} t\mu \mathrm{e}^{-\mu x t} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt$$

Après intégration par parties, il vient :

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{(\mu x + \lambda)^2}$$

Exercice 3.11.

Soit θ un réel strictement positif. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $]0, \theta[$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose :

$$Y_n = \sup(X_1, \dots, X_n), \quad Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n),$$
$$T_n = \frac{2}{n}(X_1 + \cdots + X_n), \quad T'_n = \frac{n+1}{n} Y_n \text{ et } T''_n = Y_n + Z_n$$

1. a) Déterminer une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

b) Montrer que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ.

2. a) Montrer que Y_n est une variable à densité. Déterminer son espérance et sa variance.

b) Montrer que $(T'_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ et comparer $V(T_n)$ et $V(T'_n)$.

3. a) Montrer que Z_n est une variable à densité. Déterminer son espérance et sa variance.

b) Retrouver l'égalité $V(Y_n) = V(Z_n)$ sans calcul.

c) Montrer que $V(T''_n) \leqslant 4V(Y_n)$.

d) Montrer que $(T''_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite convergente d'estimateurs sans biais de θ.

Comparer $V(T''_n)$ et $V(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Solution :

1. a) C'est une question de cours. Une densité de X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{si } x \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors $E(X) = \frac{\theta}{2}$ et $V(X) = \frac{\theta^2}{12}$.

b) Il suffit de calculer l'espérance $E(T_n)$ et la variance $V(T_n)$. On a :

$$E(T_n) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{2}{n} \times \frac{n\theta}{2} = \theta$$

Ainsi T_n est un estimateur sans biais de θ. Puis par indépendance :

$$V(T_n) = \frac{4}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{4}{n^2} \times \frac{n\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$: (T_n) est une suite d'estimateurs sans biais convergente.

2. a) Toujours par indépendance :

$$P(Y_n \leqslant y) = P([Y_1 \leqslant y] \cap \cdots \cap [Y_n \leqslant y]) = \prod_{k=1}^{n} P(Y_k \leqslant y) = (F_X(y))^n$$

Ainsi la fonction de répartition de Y_n est :

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \left(\frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si } y \geqslant \theta \end{cases}$$

et une densité :

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{y}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il vient, après des calculs évidents :

$$E(Y_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y_n}(y)\, dy = \frac{n\theta}{n+1}$$

et

$$V(Y_n) = E(Y_n^2) - E^2(Y_n) = \frac{n\theta^2}{(n+2)(n+1)^2}$$

b) La suite (T'_n) est une suite d'estimateurs sans biais puisque :

$$E(T'_n) = \frac{n+1}{n} E(Y_n) = \theta \text{ et } V(T'_n) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 V(Y_n) = \frac{\theta^2}{(n+2)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus, comme pour $n \geqslant 1, 3n \leqslant n(n+2)$, on a : $V(T'_n) \leqslant V(T_n)$.

3. a) Toujours par indépendance :

$$P(Z_n \leqslant y) = 1 - P(Z_n > y) = 1 - (1 - F_X(y))^n$$

Soit :

$$P(Z_n \leqslant y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^n & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 1 & \text{si } y \geqslant \theta \end{cases}$$

et une densité de Z_n est :

$$f_{Z_n}(y) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(1 - \frac{y}{\theta}\right)^{n-1} & \text{si } y \in]0, \theta[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un calcul immédiat donne $E(Z_n) = \dfrac{\theta}{n+1}$ et $V(Z_n) = \dfrac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$.

b) On sait que si X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(]0, \theta[)$, alors $\theta - X$ suit la même loi. Or :

$$\theta - Z_n = \max(\theta - X_1, \ldots, \theta - X_n)$$

Donc $V(Z_n) = V(\theta - Z_n) = V(Y_n)$.

c) L'inégalité de Cauchy Schwarz donne $|\operatorname{Cov}(Y_n, Z_n)| \leqslant \sqrt{V(Y_n)}\sqrt{V(Z_n)}$.
D'où :

$V(Y_n + Z_n) = V(Y_n) + 2\operatorname{Cov}(Y_n, Z_n) + V(Z_n)$

$$\leqslant V(Y_n) + 2\sqrt{V(Y_n)}\sqrt{V(Z_n)} + V(Z_n)$$
$$\leqslant (\sqrt{V(Y_n)} + \sqrt{V(Z_n)})^2 = (2\sqrt{V(Y_n)})^2 = 4V(Y_n)$$

d) De nouveau : $E(T''_n) = E(Y_n) + E(Z_n) = \theta$ entraîne que Z_n est un estimateur sans biais, et comme $V(T''_n) \leqslant 4V(Y_n)$, c'est un estimateur convergent. De plus :

$$0 \leqslant \frac{V(T''_n)}{V(T_n)} \leqslant 4\frac{V(Y_n)}{V(T_n)} = \frac{12n^2}{(n+1)^2(n+2)} \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{12}{n}$$

Donc pour n assez grand, on aura : $V(T''_n) \leqslant V(T_n)$.

Exercice 3.12.

1. On considère deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}, \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n}{k+1}$$

a) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1}$ en fonction de n.

b) Exprimer, pour tout $n \geqslant 2$, $v_n - v_{n-1}$ en fonction de u_n et n.

Soit $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, des variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1. On note $Y_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$ et $Z_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$.

2. a) Montrer que Y_n est une variable à densité et donner sa densité. Reconnaître la loi de Y_n et donner son espérance et sa variance.

b) Montrer que Z_n est une variable à densité et préciser une densité.

3. Espérance de Z_n.

a) Montrer que Z_n admet une espérance et exprimer cette espérance sous forme intégrale.

b) En déduire que $E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4. Montrer que Z_n^2 admet une espérance et exprimer $E(Z_n^2)$ en fonction de v_n.

Solution :

1. a) Par la formule de Pascal, et pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\left(\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n-1}{k+1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \times \frac{n}{k+1}\binom{n-1}{k} \\
&= u_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1} = u_{n-1} - \frac{1}{n}\sum_{h=1}^{n}(-1)^h\binom{n}{h}
\end{aligned}$$

Et par la formule du binôme :

$$u_n = u_{n-1} - \frac{1}{n}(0-1) = u_{n-1} + \frac{1}{n}$$

b) De même :

$$\begin{aligned}
v_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\left(\binom{n-1}{k+1} + \binom{n-1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k} \\
&= v_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\binom{n-1}{k} = v_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{1}{n}u_n$$

2. a) La fonction de répartition des variables aléatoires X_k est :

$$F_k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Or, pour tout x de $\mathbb{R}$: $P(Y_n > x) = P((X_1 > x) \cap \ldots \cap (X_n > x))$ et par idépendance :

$$P(Y_n > x) = (1 - F(x))^n$$

Ainsi :

$$P(Y_n \leqslant x) = 1 - (1 - F(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-nx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre n et donc :

$$E(Y_n) = \frac{1}{n} \; ; \; V(Y_n) = \frac{1}{n^2}$$

b) De la même façon :

$$P(Z \leqslant x) = P((X_1 \leqslant x) \cap \ldots \cap (X_n \leqslant x)) = (F(x))^n$$

La variable aléatoire Z_n est donc une variable à densité, et on peut prendre pour densité la fonction :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

3. a) $\forall x \geqslant 0, 0 \leqslant nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \leqslant nx\mathrm{e}^{-x}$ et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}dx$ montre que Z_n admet une espérance donnée par :

$$E(Z_n) = \int_0^{+\infty} nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}dx$$

b) En développant par la formule du binôme, on obtient :

$$nx\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k x\mathrm{e}^{-(k+1)x}$$

Il est connu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,dx = \frac{1}{(k+1)^2}$ (intégrer par parties), et ainsi :

$$E(Z_n) = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k+1}$$

Soit : $E(Z_n) = u_n$.

Comme $u_1 = 1$, la relation de récurrence précédente donne alors :

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

4. Toutes les convergences étant aisées, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
E(Z_n^2) &= \int_0^{+\infty} nx^2\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-(k+1)x}dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-1)^k \frac{2}{(k+1)^3} \quad \text{(intégrer deux fois par parties)} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1}(-1)^k \frac{2}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Soit :

$$E(Z_n^2) = 2v_n$$

Exercice 3.13.

Une personne envoie des courriers électroniques via deux serveurs notés A et B. L'expérience montre que le serveur A est choisi avec la probabilité p (avec $p \in \,]0,1[$) et le serveur B le reste du temps, les choix successifs étant supposés indépendants. Les envois sont représentés par une suite de lettres. La séquence $ABBBAAB$... signifie que le premier message a transité par le serveur A, les trois suivants par B, les cinquième et sixième messages par A, le suivant par B, etc. On dit, dans ce cas (comme pour $BAAABBA$...) que l'on a une première série de longueur 1, une deuxième de longueur 3, une troisième de longueur 2, ...

On note L_1 la variable aléatoire égale à la longueur de la première série, L_2 égale à celle de la deuxième série, L_3 de la troisième série.

1. a) Déterminer la loi de L_1.

b) Montrer que L_1 admet une espérance et une variance. Calculer l'espérance $E(L_1)$.

2. a) Donner la loi du couple (L_1, L_2)

b) En déduire la loi de L_2.

c) Calculer l'espérance $E(L_2)$.

3. Déterminer la loi de L_3.

4. a) Justifier l'existence de la covariance $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$ de L_1 et L_2.

b) Calculer cette covariance et préciser son signe.

Solution :

1. a) L_1 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout k de $\mathbb{N}^*$:

$$P(L_1 = k) = P(A_1 A_2 \dots A_k B_{k+1} \cup B_1 B_2 \dots B_k A_{k+1})$$

La réunion précédente étant disjointe et les choix successifs indépendants, il vient donc :

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p$$

On remarque que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(L_1 = k) = \sum_{k=1}^{\infty} (p^k q + q^k p) = q \times \frac{p}{1-p} + p \times \frac{q}{1-q} = p + q = 1$$

Ce qui prouve que L_1 est bien une variable aléatoire ...

b) Les séries de termes généraux respectifs $kq^k, k^2 q^k, kp^k, k^2 p^k$ sont réputées convergentes (car p et q appartiennent à $]0,1[$), ce qui prouve que L_1 admet une espérance et une variance, et :

$$\begin{aligned} E(L_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(L_1 = k) = qp \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} \\ &= qp \times \frac{1}{(1-p)^2} + pq \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \end{aligned}$$

$$E(L_1) = \frac{p^2 + q^2}{pq}$$

2. a) Pour k et i dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P((L_1,L_2)=(k,i))=P(A_1\dots A_kB_{k+1}\dots B_{k+i}A_{k+i+1}\cup B_1\dots B_kA_{k+1}\dots A_{k+i}B_{k+i+1})$$

Soit, à nouveau par incompatibilité et indépendance :

$$P((L_1,L_2)=(k,i))=p^kq^ip+q^kp^iq=p^{k+1}q^i+q^{k+1}p^i$$

b) Comme $(L_1=k)_{k\geqslant 1}$ est un système (quasi)-complet, il vient, les convergences étant claires :

$$\forall\, i\in\mathbb{N}^*, P(L_2=i)=\sum_{k=1}^{\infty}P((L_1=k)\cap(L_2=i))$$

$$=q^ip^2\sum_{k=1}^{\infty}p^{k-1}+p^iq^2\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=q^ip^2\times\frac{1}{1-p}+p^iq^2\times\frac{1}{1-q}$$

$$\forall\, i\in\mathbb{N}^*, P(L_2=i)=q^{i-1}p^2+p^{i-1}q^2$$

(On peut remarquer que l'on a $\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(L_2=i)=1$)

c) Les convergences étant encore banales, on a :

$$E(L_2)=\sum_{i=1}^{\infty}iP(L_2=i)=p^2\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}+q^2\sum_{i=1}^{\infty}ip^{i-1}$$

$$=p^2\times\frac{1}{(1-q)^2}+q^2\times\frac{1}{(1-p)^2}$$

$$E(L_2)=2$$

3. De la même façon, pour $r\in\mathbb{N}^*$:

$$P(L_3=r)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}P((L_1=k)\cap(L_2=i)\cap(L_3=r))$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(p^kq^ip^rq+q^kp^iq^rp)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(p^{k+r}q^2\times\frac{1}{1-q}+q^{k+r}p^2\times\frac{1}{1-p}\Big)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(p^{k+r-1}q^2+q^{k+r-1}p^2)=p^rq^2\times\frac{1}{1-p}+q^rp^2\times\frac{1}{1-q}$$

$$\forall\, r\in\mathbb{N}^*, P(L_3=r)=p^rq+q^rp$$

Donc L_3 a même loi que L_1.

4. a) Sous réserve de convergence, on a :

$$E(L_1L_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}ki(p^{k+1}q^i+q^{k+1}p^i)$$

La convergence résulte des mêmes arguments qu'en 1. b).

b) Puis :

$$E(L_1L_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(kp^{k+1}q \times \frac{1}{(1-q)^2} + kq^{k+1}p \times \frac{1}{(1-p)^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (qkp^{k-1} + pkq^{k-1}) = q \times \frac{1}{(1-p)^2} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

$$E(L_1L_2) = \frac{1}{pq}$$

D'où : $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = E(L_1L_2) - E(L_1)E(L_2) = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{2(p^2+q^2)}{pq}$

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1-2p^2-2(1-p)^2}{pq} = \frac{1+4p-4p^2}{pq}$$

Or l'application définie sur $[0,1]$ par $p \mapsto p(1-p)$ est maximale pour $p = \dfrac{1}{2}$, le maximum valant $\dfrac{1}{4}$, donc $\mathrm{Cov}(L_1, L_2) \leqslant 0$, avec égalité pour $p = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3.14.

1. Soit a et b deux réels strictement positifs.

Établir l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt$.

On note alors $J(a,b)$ cette intégrale.

2. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{J(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifier que f est une densité de probabilité.

Si X est une variable aléatoire admettant f pour densité, on dit que X suit la loi $\beta(a,b)$.

3. On considère une variable X suivant la loi $\beta(p,q)$, où p et q sont deux entiers naturels non nuls.

a) Calculer $J(p,q)$.

b) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

4. Pour n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $Y_k(\omega)$ le $k^{\text{ème}}$ des nombres $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, quand ceux-ci sont rangés dans l'ordre croissant.
On a donc par exemple :

$$Y_1(\omega) = \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \text{ et } Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet que pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, Y_k est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables $X_1, \dots, X_n$.
On note, pour $k \in [\![1, n]\!]$, F_k la fonction de répartition de Y_k.

a) Donner les expressions de F_1 et de F_n.

b) Déterminer, pour $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction de répartition de Y_k

c) Déterminer une densité de Y_k ; reconnaître la loi de Y_k et donner son espérance.

(on remarquera que $j\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j-1}$ et que $(n-j)\binom{n}{j} = n\binom{n-1}{j}$).

Solution :

1. La fonction $t \mapsto t^{a-1}(1-t)^{b-1}$ est continue sur $]0, 1[$, équivalente à $t \mapsto t^{a-1}$ au voisinage de 0 et équivalente à $t \mapsto (1-t)^{b-1}$ au voisinage de 1. Deux applications de la règle de Riemann donnent la convergence demandée.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, positive et d'intégrale sur $\mathbb{R}$ valant 1, par définition de la fonction J. Il s'agit bien d'une fonction densité de probabilité.

3. a) Pour $p \geqslant 2$, une intégration par parties sans ruse donne :

$$\begin{aligned} J(p,q) &= \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \\ &= \Big[-\frac{1}{q}(1-t)^q t^{p-1}\Big]_0^1 + \frac{p-1}{q}\int_0^1 t^{p-2}(1-t)^q\,dt \end{aligned}$$

Soit :

$$J(p,q) = \frac{p-1}{q}J(p-1, q+1)$$

Par récurrence, on obtient alors :

$$J(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

Le résultat final étant valable aussi pour $p = 1$.

b) $E(X) = \dfrac{1}{J(p,q)}\displaystyle\int_0^1 t^{p-1+1}(1-t)^{q-1}dt = \dfrac{J(p+1,q)}{J(p,q)}$

Soit, après simplification :

$$E(X) = \frac{p}{p+q}$$

4. a) On a :
$(Y_1 > x) = (X_1 > x) \cap \ldots (X_n > x)$ et $(Y_n \leqslant x) = (X_1 \leqslant x) \cap \ldots (X_n \leqslant x)$, d'où par indépendance et identité de la distribution :

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ et } F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

b) Soit x dans $[0,1]$, $(Y_k \leqslant x)$ est réalisé si et seulement si au moins k des variables aléatoires X_i prennent une valeur inférieure ou égale à x. Ceci se prouit pour chaque variable X_i avec la probabilité x et puisque nous sommes dans le cas de l'indépendance, il vient :

$$P(Y_k \leqslant x) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}$$

b) Par dérivation légitime, une densité f_k de Y_k est :

$$f_k(x) = \begin{cases} \sum_{j=k}^{n} j\binom{n}{j} x^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} (n-j)\binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $0 < x < 1$, il vient :

$$f_k(x) = \sum_{j=k}^{n} n\binom{n-1}{j-1} x^{j-1}(1-x)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n-1} n\binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-j-1}$$

Le télescopage est en place et il reste :

$$\forall\, x \in \,]0,1[,\, f_k(x) = n\binom{n-1}{k-1} x^{k-1}?`(1-x)^{n-k}$$

Ainsi $Y_k \hookrightarrow \beta(k, n-k+1)$ et $E(Y_k) = \dfrac{k}{n+1}$.

Exercice 3.15.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que X admet une densité f continue et on note F la fonction de répartition de X.
On suppose que X admet une espérance que l'on note $E(X) = \mu$.

1. Dans cette question, on suppose que X est à valeurs positives. Justifier que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x \int_x^{+\infty} f(t)dt \right] = 0$$

Montrer que l'on a :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$$

2. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$X^+(\omega) = \max\big(X(\omega), 0\big) \quad \text{et} \quad X^-(\omega) = -\min\big(X(\omega), 0\big)$$

Justifier que X^+ et X^- sont des variables aléatoires positives.

3. En exprimant X à l'aide de X^+ et X^-, montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(x)\, dx = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

4. Montrer que μ est l'unique réel a tel que :

$$\int_{-\infty}^{a} F(x)dx = \int_{a}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

Solution :

1. Pour $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une intégrale convergente car définissant $E(X)$).

Intégrons par parties, en intégrant $x \mapsto f(x)$ en $x \mapsto F(x) - 1 = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$:

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\, dt &= \big[t(F(t) - 1)\big]_0^x + \int_0^x (1 - F(t))\, dt \\ &= x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt + \int_0^x P(X > t)\, dt\end{aligned}$$

Le passage à la limite lorsque x tend vers $+\infty$ est licite et donne :

$$E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > x)dx$$

2. $X^+ = \frac{1}{2}(X + |X|)$ et $X^- = \frac{1}{2}(|X| - X)$, ce qui prouve que X^+ et X^- sont des variables aléatoires et leur positivité est banale.

3. On a $X = X^+ - X^-$, donc d'après le résultat de la première question :

$$\begin{aligned}\mu = E(X^+) - E(X^-) &= \int_0^{+\infty} P(X^+ > x)\, dx - \int_0^{+\infty} P(X^- > x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} P(X > x)\, dx - \int_0^{+\infty} P(-X > x)\, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx - \int_0^{+\infty} F(-x)\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F(x)\, dx\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F) - \int_{-\infty}^{0} F = \int_0^{\mu} F + \int_0^{\mu} (1 - F)$$

et par la relation de Chasles, il reste :

$$\int_{-\infty}^{\mu} F(x)dx = \int_{\mu}^{+\infty} [1 - F(x)]dx$$

4. $a \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{a} F(x)\, dx$ est croissante et $a \mapsto \displaystyle\int_{a}^{+\infty} (1-F(x))\, dx$ est décroissante. Si ces fonctions se croisent en deux points λ et μ, alors elles sont constantes sur le segment $[\lambda, \mu]$ et F vaut à la fois 0 et 1 sur ce segment, ce qui ne semble pas raisonnable.

Exercice 3.16.

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ existent. On suppose, en outre, qu'il existe un réel m tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$$

a) Montrer que : $E((X_n - m)^2) = V(X_n) + (E(X_n) - m)^2$.

b) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on a :

$$P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2)$$

c) Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On lance n fois une pièce non équilibrée avec laquelle la probabilité d'obtenir « pile » lors d'un jet est p.

Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de « pile » obtenus. Enfin, Y_n est la variable aléatoire définie par : $Y_n = \mathrm{e}^{\frac{S_n}{n}}$.

a) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

b) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Solution :

1. a) $E((X_n - m)^2) = E(X_n^2 - 2mX_n + m^2) = E(X_n^2) - 2mE(X_n) + m^2$
$$= (E(X_n) - m)^2 + E(X_n^2) - E(X_n)^2$$
$$= (E(X_n) - m)^2 + V(X_n)$$

b) D'après l'inégalité de Markov :
$$P([X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} E((X_n - m)^2)$$
et donc :
$$0 \leqslant P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}(V(X_n) + (E(X_n) - m)^2)$$

c) L'encadrement précédent donne par ... encadrement :
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - m| \geqslant \varepsilon) = 0$$
Ce qui prouve que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable cetaine égale à m.

2. a) Par la formule du transfert :
$$E(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{k/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p\mathrm{e}^{1/n} + q)^n$$
D'autre part
$$E((\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}})^2) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2k/n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p\mathrm{e}^{2/n} + q)^n$$
Donc :
$$V(Y_n) = (p\mathrm{e}^{2/n} + q)^n - (p\mathrm{e}^{1/n} + q)^{2n}$$

b) Pour r non nul, posons $u_n = (p\mathrm{e}^{r/n} + q)^n$. On a, au voisinage de l'infini :
$\ln(u_n) = n\ln(p\mathrm{e}^{r/n} + q) = n\ln(1 + p(\mathrm{e}^{r/n} - 1)) \sim n{\times}p(\mathrm{e}^{r/n} - 1) \sim np{\times}\frac{r}{n}$
Ce qui signifie que $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} pr$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{pr}$.

Ainsi les résultat de la question 2. a) donnent pour $r = 1$ et $r = 2$:
$$\lim_{n\to\infty} E(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \mathrm{e}^p \ ; \ \lim_{n\to\infty} V(\mathrm{e}^{\frac{S_n}{m}}) = \mathrm{e}^{2p} - (\mathrm{e}^p)^2 = 0$$
La suite (Y_n) converge en probabilité vers la variable certaine égale à e^p.

Exercice 3.17.

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et à valeurs réelles.

On admet que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes admettant une espérance, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives telles que :

• Y suit la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif ;
• X est une variable à densité, de densité continue φ.

a) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(t)dt$. On note I cette intégrale.

b) Soit g une densité de la variable aléatoire $Y - X$. Donner, pour tout réel z positif une expression de $g(z)$ en fonction notamment de l'intégrale I.

c) En déduire, en fonction de I, la valeur de $P([Y > X])$.

2. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes ($n \geqslant 2$), suivant toutes la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Comparer les événements

$$[X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n] \text{ et } [X_1 \leq \inf(X_2, \ldots X_n)].$$

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Z_n définie par : $Z_n = \inf(X_2, \ldots X_n)$.

c) En déduire la valeur de : $P([X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)])$.

3. Soit X_1, X_2, Y trois variables aléatoires à densité indépendantes, à valeurs positives, où Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Calculer $P([Y > X_1 + X_2])$ en fonction de $P([Y > X_1])$ et de $P([Y > X_2])$.

b) Quelle propriété est ainsi généralisée ?

Solution :

1. a) On a $\forall\, t \geqslant 0, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\varphi(t) \leqslant \varphi(t)$, et la règle de comparaison pour les fonctions positives permet de conclure.

b) Une densité de $-X$ est h définie par $h(x) = 0$ si $x \geqslant 0$ et $h(x) = \varphi(-x)$ si $x < 0$.

Comme Y et $-X$ sont indépendantes, par convolution une densité de $Z = Y - X$ est g définie par :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}, g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(z-t)h(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f_Y(z-t)\varphi(-t)\,dt$$

$\rightarrow$ Si $z \leqslant 0$, $g(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{z} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda(z-t)}\varphi(-t)\,dt$

$\rightarrow$ Si $z > 0$, $g(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{-\lambda(z-t)}\varphi(-t)\,dt = \lambda e^{-\lambda z}\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda t}\varphi(-t)\,dt$

soit :

$$\forall\, z > 0, g(z) = \lambda e^{-\lambda z}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t}\varphi(t)\,dt = \lambda e^{-\lambda z} I$$

c) $P(Y > X) = P(Z > 0) = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} g(z)\,dz = I\int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = I$

Notons que I est en fait l'espérance de la variable aléatoire $e^{-\lambda X}$

2. a) Ces deux événements sont clairement égaux.

b) Z_n prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et :

$P(Z_n \leqslant z) = 1 - P(Z_n > x) = 1 - P((X_2 > z) \cap \ldots \cap (X_n > z))$, d'où : pour tout $z \geqslant 0$: $P(Z_n \leqslant z) = 1 - (e^{-\lambda z})^{n-1} = e^{-(n-1)\lambda z}$, et :

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}((n-1)\lambda)$$

c) X_1 suit la loi exponentielle de paramètre λ. D'après les résultats de la question 1. la probabilité recherchée est égale à $1 - E(e^{-\lambda Z_n})$, donc :

$$P(X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = 1 - E(e^{-\lambda Z_n})1 - \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda t}(n-1)\lambda e^{-\lambda(n-1)t}\,dt$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n}$$

$$P(X_1 = \inf(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \frac{1}{n}$$

3. a) $P(Y > X_1 + X_2) = E(e^{-\lambda(X_1+X_2)}) = E(e^{-\lambda X_1})E(e^{-\lambda X_2})$

(par indépendance)

b) Ainsi $P(Y > X_1 + X_2) = P(Y > X_1)P(Y > X_2)$, ce qui généralise le résultat d'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Exercice 3.18.

1. a) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin x$ réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. On note $\operatorname{Arc\,sin}$ la bijection réciproque.

b) Établir, pour tout $y \in \left]-1, 1\right[$: $\operatorname{Arc\,sin}' y = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

c) Soit a, b, x trois réels tels que $0 \leqslant a < b \leqslant x$. On note :

$$I(a, b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\,dt$$

Justifier l'existence de cette intégrale et calculer sa valeur grâce au changement de variable : $u = \dfrac{2t}{x} - 1$.

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.

2. Montrer que X^2 est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. Montrer que les variables aléatoires X^2 et Y^2 sont indépendantes.

4. Déterminer une densité f de la variable aléatoire $X^2 + Y^2$.

5. En déduire la valeur de : $I = \displaystyle\int_1^2 \operatorname{Arc}\sin\left(\frac{2}{x} - 1\right) dx$.

6. Déterminer une densité f_R de la variable aléatoire : $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Solution :

1. a) Evident.

b) La fonction f est dérivable, de dérivée $f'(x) = \cos x$ non nulle sur $]-\pi/2, \pi/2[$, donc la fonction Arc sin est dérivable sur $]-1,1[$, avec :

$$\forall\, y \in\,]-1,1[, \operatorname{Arc}\sin'(y) = \frac{1}{\sin'(\operatorname{Arc}\sin y)} = \frac{1}{\cos(\operatorname{Arc}\sin y)}$$

Comme $y \in\,]-1,1[\implies \operatorname{Arc}\sin(y) \in\,]-\pi/2, \pi/2[$, il n'y a pas de problème d'extraction de racines et $\sin(\operatorname{Arc}\sin y) = y$ donne $\cos(\operatorname{Arc}\sin y) = \sqrt{1-y^2}$, soit :

$$\forall\, y \in\,]-1,1[, \operatorname{Arc}\sin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

c) Si $0 < a$ et $b < x$, la fonction à intégrer est continue sur le segment $[a,b]$, donc l'intégrale existe, et si $a = 0$ et/ou $b = x$, la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale du ou des côtés de la borne concernée.

Le changement de variable proposé est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, donc légitime (si vous avez un doute, faites le d'abord sur un segment $[\alpha, \beta]$, puis passez à la limite au cas où a et/ou b posent problème).

$u = \dfrac{2t}{x} - 1$ donne $t = \frac{x}{2}(u+1)$, d'où $dt = \frac{x}{2}\, du$ et :

$$I(a,b) = \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2\sqrt{x - \frac{x}{2}(u+1)}} \times \frac{x}{2}\, du$$

$$= \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{1}{2}(u+1)}} \times \frac{1}{2}\, du$$

$$= \int_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1} \frac{du}{4\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{4}\Big[\operatorname{Arc\,sin} u\Big]_{\frac{2a}{x}-1}^{\frac{2b}{x}-1}$$

$$\int_a^b \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}} dt = \frac{1}{4}\operatorname{Arc\,sin}\big(\frac{2b}{x}-1\big) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc\,sin}\big(\frac{2a}{x}-1\big)$$

2. La variable aléatoire X^2 prend ses valeurs entre 0 et 1, et pour $x \in [0,1]$:

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 \leqslant x) = P(-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}) = P(X \leqslant \sqrt{x}) = \sqrt{x}$$

La fonction F_{X^2} est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf (peut-être) en 0 et en 1, donc X^2 est une variable aléatoire à densité, et on peut prendre pour densité la fonction f_{X^2} définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{X^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc il en est de même des variables aléatoires X^2 et Y^2.

4. Par indépendance, on peut prendre pour densité de X^2+Y^2, la foction f définie par convolution par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{Y^2}(x-t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X^2}(t) f_{X^2}(x-t)\, dt$$

$\star$ Evidemment, si $x < 0$ ou $x > 2$, on a $f(x) = 0$ (la variable X^2+Y^2 prend ses valeurs entre 0 et 2)

$\star$ Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors :
$[0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x-t \leqslant 1] \iff [0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } x-1 \leqslant t \leqslant x] \iff [0 \leqslant t \leqslant x]$

Il reste donc :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\, dt = I(0,x) = \frac{1}{4}\operatorname{Arc\,sin}(1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc\,sin}(-1)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4}$$

$\star$ Si $1 < x \leqslant 2$, alors :
$[0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x-t \leqslant 1] \iff [0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ et } x-1 \leqslant t \leqslant x] \iff [x-1 \leqslant t \leqslant 1]$

Il reste donc :

$$f(x) = \int_{x-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \times \frac{1}{2\sqrt{x-t}}\, dt = I(x-1,1)$$

$$= \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2}{x}-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2(x-1)}{x}-1)$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(\frac{2}{x}-1) - \frac{1}{4}\operatorname{Arc}\sin(1-\frac{2}{x})$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\big(\frac{2}{x}-1\big)$$

Ainsi, on peut prendre :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\big(\frac{2}{x}-1\big) & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx = 1$

Par conséquent $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2}\operatorname{Arc}\sin\big(\frac{2}{x}-1\big)\,dx = 1-\frac{\pi}{4}$,et :
$$\int_1^2 \operatorname{Arc}\sin\big(\frac{2}{x}-1\big)\,dx = 2-\frac{\pi}{2}$$

6. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$: $F_R(x) = P(R \leqslant x) = P(X^2+Y^2 \leqslant x^2) = F_{X^2+Y^2}(x^2)$

Donc R est une variable aléatoire à densité, et on peut prendre pour densité de R, la fonction f_R définie par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2xf(x^2) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant \sqrt{2} \\ \frac{\pi x}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ x\operatorname{Arc}\sin\big(\frac{2}{x^2}-1\big) & \text{si } 1 \leqslant x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Exercice 3.19.

Soit n un entier strictement supérieur à 1.

1. Déterminer le nombre de couples $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$ tels que $|i+j-n-2| = 1$.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, prenant leurs valeurs dans $[\![1,n+1]\!]$.

On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$:
$$a_{i,j} = P(X=j \cap Y=i), b_{i,j} = P_{[X=j]}([Y=i])$$

On note B la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1}$, et on suppose que :

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{si } |i+j-n-2| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Calculer la valeur de α.

3. Déterminer les lois de X et de Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

4. a) Expliciter la matrice B.

b) Montrer que 1 est une valeur propre de B.

5. On suppose dans cette question que $n = 3$. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Il s'agit de compter les couples d'éléments de $[\![1, n+1]\!]$ tels que $i+j = n+3$ ou $i+j = n+1$.
Dans la première catégorie, on trouve les couples $(2, n+1), (3, n), \ldots, (n+1, 2)$ et dans la deuxième on trouve les couples $(1, n), (2, n-1), \ldots, (n, 1)$.

Il y a $2n$ couples convenant

2. Comme $\sum\limits_{i,j} a_{i,j} = 1$ et comme il y a $2n$ termes valant α :

$$\alpha = \frac{1}{2n}$$

3. La matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ est clairement symétrique et on remarque que les termes non nuls de A sont ceux qui bordent immédiatement la « deuxième diagonale » de A. Ainsi la première et la dernière ligne et la première et la dernière colonne de A comportent un seul terme non nul, tandis que toutes les autres rangées en comportent deux. Soit, par sommations marginales :

$$P(X = 1) = P(X = n+1) = \frac{1}{2n}; \forall\, i \in [\![2, n]\!], P(X = i) = \frac{1}{n}$$

Y a même loi que X

La présence de zéros dans le tableau de la loi conjoite montre que X et Y ne sont pas indépendantes. Car par exemple :

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0, \text{ alors que } P(X = 1)P(Y = 1) \neq 0$$

4. a) On a $b_{i,j} = \dfrac{a_{i,j}}{P(X = j)}$, donc :

$$b_{n,1} = 1,\ b_{n-1,2} = b_{n-2,3} = \cdots = b_{1,n} = \frac{1}{2}$$

$b_{2,n+1} = 1$, $b_{3,n} = b_{4,n-1} = \cdots = b_{n+1,2} = \dfrac{1}{2}$
tous les autres coefficients étant nuls.

b) Pour prouver que 1 est valeur propre, on peut résoudre l'équation matricielle $BC = C$, où C est une matrice a priori de $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{C})$ et constater qu'il existe des solutions non triviales.

On peut aussi remarquer que pour tout i :
$$\sum_{j=1}^{n+1} b_{i,j} P(X = j) = \sum_{j=1}^{n+1} P_{(X=j)}(Y = i)P(X = j) = P(Y = i) = P(X = i)$$
Ce qui traduit exactement le fait que 1 est valeur propre de B, le vecteur colonne de la loi de X étant un vecteur propre associé.

5. On a ici : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

→ On sait déjà que 1 est valeur propre et on trouve :
$$E_{(1)}(B) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

→ On peut continuer classiquement, ou remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des colonnes non proportionnelles et propres pour la valeur propre $-1/2$.
On a fait alors le plein et on peut conclure : B est diagonalisable.

Exercice 3.20.

Dans tout l'exercice, k désigne un entier naturel non nul donné. On considère une suite de variables aléatoires $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et telles que :
• la loi de T_0 est donnée, avec $T_0(\Omega) = [\![0, 2k]\!]$.
• Pour tout entier naturel n non nul et tout élément j de $[\![0, 2k]\!]$, la loi conditionnelle de T_n sachant $[T_{n-1} = j]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(2k, \frac{j}{2k})$.

Par convention, si une variable Z suit la loi $\mathcal{B}(n, 0)$, alors Z est la variable certaine égale à 0 et si Z suit la loi $\mathcal{B}(n, 1)$, alors Z est la variable certaine égale à 1.

On note, pour tout entier naturel n, V_n la matrice de $\mathcal{M}_{2k+1,1}(\mathbb{R})$, définie par :

$$V_n = \begin{pmatrix} P([T_n = 0]) \\ P([T_n = 1]) \\ \vdots \\ P([T_n = 2k]) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq 2k}$, élément de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont indépendants de n, telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ V_n = MV_{n-1}$.

$$\textit{On trouvera : } m_{i,j} = \binom{2k}{i}\Big(\frac{j}{2k}\Big)^i\Big(1 - \frac{j}{2k}\Big)^{2k-i}$$

2. On considère les deux matrices L et J de $\mathcal{M}_{1,2k+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$L = (\,1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1\,) \text{ et } J = (\,0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad 2k\,).$$

a) Montrer que $LM = L$.

b) Montrer que $JM = J$.

3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, non nul, on a : $JV_n = JV_{n-1}$.

b) En déduire que toutes les variables aléatoires T_n ont la même espérance ; on pose alors $E(T_n) = \mu$.

4. On note Q la matrice de $\mathcal{M}_{1,2k+1}(\mathbb{R})$ définie par $Q = (\,0 \quad 1^2 \quad 2^2 \quad \ldots \quad (2k)^2\,)$.

a) En utilisant la matrice Q, déterminer, pour tout entier naturel n non nul, une relation entre $E(T_n^2)$ et $E(T_{n-1}^2)$.

b) En déduire une expression de $E(T_n^2)$ en fonction de $E(T_0^2)$, de μ et de k.

c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(T_n^2)$.

5. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $[\![0, 2k]\!]$, alors $E(Z^2) \leqslant 2kE(Z)$, l'égalité n'ayant lieu que si Z prend uniquement les valeurs 0 et $2k$ avec une probabilité non nulle.

6. En s'inspirant de la question précédente, et en admettant que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi, précisez la loi limite.

Solution :

1. Pour $n \geqslant 1$ et $i \in [\![0, 2k]\!]$, la formule des probabilités totales donne :

$$P(T_n = i) = \sum_{j=0}^{2k} P_{(T_{n-1}=j)}(T_n = i)P(T_{n-1} = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} P(T_{n-1} = j)$$

On peut donc prendre pour matrice M la matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ de terme générique $m_{i,j}$ (i et j varient entre 0 et $2k$) :

$$m_{i,j} = \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i}$$

2. a) Posons $LM = (\, a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{2k}\,)$, on a pour tout j de $[\![0, 2k]\!]$:

$$a_j = \sum_{i=0}^{2k} m_{i,j} = \sum_{i=0}^{2k} \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} = 1 \text{ (formule du binôme)}$$

Soit :

$$LM = L$$

b) Posons $JM = (\, b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{2k}\,)$, on a de même :

$$b_j = \sum_{i=0}^{2k} i \times \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} = 2k \times \frac{j}{2k}$$

(car on a reconnu la formule donnant l'espérance d'une variable suivant la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{j}{2k}$). Ainsi :

$$JM = J$$

3. a) $JV_n = J(MV_{n-1}) = (JM)V_{n-1} = JV_{n-1}$

b) Or JV_n est une matrice arrée d'ordre 1, identifiée à son unique terme valant :

$$\sum_{i=0}^{2k} iP(T_n = i) = E(T_n)$$

On vient donc de montrer que pour $n \geqslant 1$, $E(T_n) = E(T_{n-1})$ et la suite $(E(T_n))$ est constante.

4. a) Posons $QM = (\, c_0 \quad c_1 \quad \dots \quad c_{2k}\,)$, on a pour tout j de $[\![0, 2k]\!]$:

$$c_j = \sum_{i=0}^{2k} i^2 \times \binom{2k}{i} \left(\frac{j}{2k}\right)^i \left(1 - \frac{j}{2k}\right)^{2k-i} = E(Y^2)$$

où Y est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $2k$ et $\frac{j}{2k}$, donc :

$$c_j = V(Y) + E(Y)^2 = 2k \times \frac{j}{2k}\left(1 - \frac{j}{2k}\right) + j^2 = j\left(1 - \frac{j}{2k}\right) + j^2$$
$$= j + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)j^2$$

Soit :

$$QM = J + \left(1 - \frac{1}{2k}\right)Q$$

On remarque que $E(T_n^2) = QT_n$, donc $E(T_n^2) = QMT_{n-1}$, et en remplaçant :

$$E(T_n^2) = JT_{n-1} + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)QT_{n-1}$$

Soit :

$$E(T_n^2) = E(T_{n-1}) + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)E(T_{n-1}^2) = \mu + \big(1 - \frac{1}{2k}\big)E(T_{n-1}^2)$$

b) La relation de récurrence précédente est du type arithmético-géométrique, la résolution est classique (recherche du point fixe et retour au cas géométrique ...) et donne :

$$E(T_n^2) = \big(1 - \frac{1}{2k}\big)^n (E(T_0^2) - 2k\mu) + 2k\mu$$

c) Donc : $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n^2) = 2k\mu$.

5. On a $E(Z^2) = \sum\limits_{j=0}^{2k} j^2 P(Z=j) \leqslant 2k \sum\limits_{j=0}^{2k} jP(Z=j) \quad (\text{car } j^2 \leqslant 2kj)$

Ainsi $E(Z^2) \leqslant 2kE(Z)$, avec égalité si et seulement si :

$$\sum_{j=0}^{2k} (2kj - j^2)P(Z=j) = \sum_{j=1}^{2k-1} j(2k-j)P(Z=j) = 0$$

On a donc égalité si et seulement si les seules valeurs prises par Z (avec une probabilité non nulle) sont les valeurs 0 et $2k$.

6. Soit i dans $[\![1, 2k-1]\!]$, on écrit :

$$0 \leqslant i(2k-i)P(T_n = i) \leqslant \sum_{j=0}^{2k} j(2k-j)P(T_n = j)$$

Donc :

$$0 \leqslant i(2k-i)P(T_n = i) \leqslant 2k\mu - E(T_n^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si (T_n) converge en loi, alors la limite T ne peut prendre que les valeurs 0 et $2k$ avec une probabilité non nulle. Le calcul de l'espérance impose d'avoir $P(T = 2k) = \frac{\mu}{2k}$ et ainsi $P(T=0) = 1 - \frac{\mu}{2k}$.

Exercice 3.21.

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$, n variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{n}$, avec $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 1 - (1-x)\mathrm{e}^x$. Montrer que pour tout x de $[0,1]$, on a : $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

3. Pour tout entier $n > \lambda$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note U_i une variable aléatoire indépendante de Y_i et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $f\big(\frac{\lambda}{n}\big)$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, soit X_i la variable aléatoire définie par :

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } Y_i = U_i = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de X_i.

4. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a : $P(X_i \neq Y_i) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{n^2}$.

5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = Y_i]\big)$.

Solution :

1. Par le théorème de stabilité, S_n suit la loi de Poisson de paramètre λ.

2. On peut bien sûr étudier les variations de la fonction f, mais on peut aussi savoir que pour tout u réel, on a : $\mathrm{e}^u \geqslant 1 + u$, d'où :
$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$ et $1 \geqslant (1 - x)\mathrm{e}^x$ ou encore $1 - (1 - x)\mathrm{e}^x \geqslant 0$ et enfin si $x \leqslant 1$, clairement $1 - (1 - x)\mathrm{e}^x \leqslant 1$. Bref :

$$(0 \leqslant) x \leqslant 1 \implies 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

3. La variable aléatoire X_i est une variable de Bernoulli, et par indépendance :

$$P(X_i = 0) = P(Y_i = 0)P(U_i = 0) = \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}} \times (1 - f(\frac{\lambda}{n})) = 1 - \frac{\lambda}{n}$$

Donc

$$P(X_i = 1) = \frac{\lambda}{n} \text{ et } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{\lambda}{n})$$

4. Comme X_i ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, on a :

$$P(X_i = Y_i) = P((X_i = 1) \cap (Y_i = 1)) + P((X_i = 0) \cap (Y_i = 0))$$

et comme $(X_i = 0) \subset (Y_i = 0)$ et $(Y_i = 1) \subset (X_i = 1)$:

$$P(X_i = Y - i) = P(Y_i = 1) + P(X_i = 0) = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}$$

Donc : $P(X_i \neq Y_i) = \dfrac{\lambda}{n}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}})$
et ainsi, par inégalité usuelle :

$$P(X_i \neq Y_i) \leqslant \frac{\lambda^2}{n^2}$$

5. Par les lois de Morgan : $P\big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = Y_i]\big) = 1 - P\big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} [X_i \neq Y_i]\big)$

Or la probabilité d'une réunion est toujours majorée par la somme des probabilités des événements en question (démonstration par exemple par récurrence), donc :

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[X_i \neq Y_i]\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda^2}{n^2} = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}[X_i = Y_i]\Big) = 1$$