1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Soit f une fonction de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$f(x+1) = xf(x) \text{ et } f''(x) > 0.$$

1. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $f(c) = 0$. Montrer qu'il existe $u \in]c, c+1[$ et $v \in]c+1, c+2[$ tels que $f'(u) = f'(v) = 0$. En déduire une contradiction puis justifier que $f(x)$ est de signe constant sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que f' est croissante et ne s'annule qu'une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en un point α appartenant à $]1,2[$. En déduire que f est toujours positive.

3. a) Donner une relation entre $f(n)$ et $f(2)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

c) Donner le tableau des variations de f.

4. On considère dans cette question une fonction f de $D =]-1,0[\cup]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 vérifiant, pour tout $x \in D$: $f(x+1) = xf(x)$, et pour tout $x \in]0,+\infty[, f''(x) > 0$.

Donner le signe de f sur $]-1,0[$ et les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs inférieures et lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Solution :

1. Avec $f(c) = 0$, on a $f(c+1) = cf(c) = 0$, puis $f(c+2) = (c+1)f(c+1) = 0$. Le théorème de Rolle nous assure alors de l'existence de u et v convenables.

Toujours par le théorème de Rolle appliqué maintenant à f', il existe $w > 0$ tel que $f''(w) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

On en déduit que f ne s'annule pas. Par le théorème des valeurs intermédiaires (et la continuité de f), elle est donc de signe constant.

2. Comme $f''(x) > 0$, on en déduit que f' est strictement croissante.
Or $f(2) = 1 \times f(1) = f(1)$, donc il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
On en déduit que f est décroissante sur $]0, \alpha[$ et croissante sur $]\alpha, +\infty[$.
Mais $f(3) = 2f(2)$, donc si $f(2) < 0$, on aurait $f(3) < f(2)$ ce qui est contradictoire. Ainsi $f(2) > 0$. Comme f est de signe constant, f est toujours positive.

3. a) On obtient par récurrence $f(n) = f(2)(n-1)!$.

On en déduit que $f(x) \geqslant f(\lfloor x \rfloor) = f(2)\lfloor (x-1) \rfloor !$, (où $\lfloor . \rfloor$ désigne la fonction « partie entière ») donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

b) La relation $f(x+1) = xf(x)$ donne quand x tend vers 0 par valeurs supérieures :

$$f(x) \sim \frac{f(1)}{x} \text{ (car } f(1) \neq 0)$$

donc $f(x)$ tend vers $+\infty$ en lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

4. On a pour $x \in]-1, 0[$, $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x}$. Or $x < 0$ donc $f(x) < 0$. En faisant tendre x vers 0 par valeurs inférieures, on montre, comme au 3. b), que $f(x) \sim \dfrac{f(1)}{x}$ donc $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend ves 0 par valeurs inférieures, car cette fois-ci, $x < 0$.

Dans la relation $f(x) = \dfrac{f(x+1)}{x}$, on pose $x = -1 + h$; elle devient

$$f(-1+h) = \frac{f(h)}{h-1}.$$

On fait tendre x vers -1 par valeurs supérieures donc h vers 0 et on obtient que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

Exercice 1.2.

On considère une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. On suppose dans cette question que f est décroissante, strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

a) Soit r un réel strictement positif. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\int_{kr}^{(k+1)r} f(t)\,dt \leqslant rf(kr) \leqslant \int_{(k-1)r}^{kr} f(t)\,dt$$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} f(kr) \leqslant \frac{1}{r}\int_0^{nr} f(t)dt.$$

En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} f(kr)$ est convergente. On note $\varphi(r)$ la somme de cette série.

c) Donner un équivalent de $\varphi(r)$ lorsque r tend vers 0 par valeurs supérieures.

2. On suppose dans cette question que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ converge.

a) Soient (a, b) un couple de réels tels que $0 < a < b$ et x un réel strictement positif. Prouver que l'on a :

$$\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

b) Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $\gamma(t) = \sup_{s\in[0,t]} |f(s) - f(0)|$.

Montrer que la fonction γ est bien définie , croissante, et tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

Prouver l'inégalité suivante :

$$\Big|\int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t}\, dt\Big| \leqslant \gamma(bx) \ln \frac{b}{a}.$$

c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\, dt$ est convergente et la calculer.

3. Que peut-on dire de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\mathrm{e}^{-kr} - \mathrm{e}^{-2kr}}{k}$, où $r > 0$? Que peut-on dire de sa somme lorsque r tend vers 0 ?

Solution :

1. a) Si $r > 0$, comme f est décroissante, on a :

$$\int_{kr}^{(k+1)r} f(t)dt \leqslant \int_{kr}^{(k+1)r} f(kr)dt = rf(kr).$$

On a aussi, pour $k \geqslant 1$: $\displaystyle\int_{(k-1)r}^{kr} f(t)dt \geqslant \int_{(k-1)r}^{kr} f(kr)dt = rf(kr).$

b) En utilisant la question précédente, on obtient par sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} rf(kr) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)r}^{kr} f(t)dt = \int_0^{nr} f(t)dt \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Comme la série considérée est à termes positifs, on en déduit qu'elle est convergente.

c) En utilisant à nouveau la question a), on voit que

$$\int_r^{(n+1)r} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{kr}^{(k+1)r} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} r f(kr)$$

Finalement, on obtient : $\displaystyle\int_r^{+\infty} f(t)dt \leqslant r\,\varphi(r) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$

Comme l'intégrale de f est convergente et de valeur non nulle, on en déduit que :

$$\varphi(r) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{r}\int_0^{+\infty} f(t)dt$$

2. a) Soient (a, b) un couple de réels tels que $0 < a < b$ et x un réel strictement positif. Compte tenu de l'hypothèse, il n'y a pas vraiment de problème de convergence en $+\infty$ et on a avec des changements de variables évidents :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t}\,dt &= \int_x^{+\infty} \frac{f(at)}{t}\,dt - \int_x^{+\infty} \frac{f(bt)}{t}\,dt \\ &= \int_{ax}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du - \int_{bx}^{+\infty} \frac{f(u)}{u}\,du = \int_{ax}^{bx} \frac{f(u)}{u}\,du\end{aligned}$$

b) Comme la fonction $s \mapsto |f(s) - f(0)|$ est continue sur le segment $[0, t]$, elle y est bornée et par conséquent la borne supérieure $\gamma(t)$ est bien définie. La croissance de γ est évidente puisque $[0, t_1] \subseteq [0, t_2]$ si $t_1 \leqslant t_2$. Le fait que γ converge vers 0 en 0^+ provient directement du fait que f est continue en 0^+.

Par ailleurs, on obtient :

$$\Big|\int_{ax}^{bx} \frac{f\,(t) - f(0)}{t} dt\Big| \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{|f\,(t) - f(0)|}{t} dt \leqslant \int_{ax}^{bx} \frac{\gamma\,(bx)}{t} dt = \gamma\,(bx) \ln \frac{b}{a}.$$

c) On observe que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f\,(at) - f\,(bt)}{t} dt - f(0) \ln \frac{b}{a} = \int_{ax}^{bx} \frac{f\,(t) - f(0)}{t} dt.$

Or l'intégrale du membre de droite tend vers 0 lorsque $x \to 0^+$. On en déduit à la fois la convergence et la valeur $f(0) \ln(b/a)$ de l'intégrale considérée.

3. On introduit la fonction $h(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^+$, strictement positive et d'intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t > 0$, on a :

$$h'(t) = \frac{-(1+t)e^{-t} + (1+2t)e^{-2t}}{t^2} = \frac{e^{-2t}}{t^2}\big[1 + 2t - (1+t)e^t\big]$$

Une étude rapide la fonction $\psi(t) = 1 + 2t - (1+t)e^t$ donne $\psi'(t) = 2 - (2+t)e^t < 0$ et comme $\psi(0) = 0$, la fonction ψ est négative et h décroît. On peut donc utiliser les résultats précédents et on obtient la convergence de la série et le fait que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kr} - e^{-2kr}}{k} \underset{(0^+)}{\sim} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \ln 2$$

et par conséquent la somme converge vers $\ln 2$ lorsque r tend vers 0.

Exercice 1.3.

Soit F la fonction de la variable réelle définie par : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x \ln(1+t^2)} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\, dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1)$. En déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$, puis calculer $F(2)$.

c) Plus généralement, établir une relation de récurrence entre $F(n)$ et $F(n+1)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

d) Exprimer, sous forme de somme, $F(-n)$ pour n entier naturel non nul. Donner les valeurs de $F(-1)$ et $F(-2)$ sous forme de fractions.

3. Montrer que la fonction F est décroissante sur $\mathbb{R}$.

4. Pour $x < 0$, étudier les variations de $\varphi_x : t \mapsto e^{-x \ln(1+t^2)}$ sur $[0, 1]$, et calculer $\varphi_x\big(\frac{1}{2}\big)$.

En déduire la limite de F en $-\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{F(x)}{x}$ quand x tend vers $-\infty$.

5. Montrer que pour $u \in [0, 1], \ln(1 + u) \geqslant u \ln 2$; en déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Solution :

1. Pour tout réel x, l'intégrale proposée existe (intégrale d'une fonction continue sur le segment d'intégration).

2. a) $F(0) = \displaystyle\int_0^1 dt = 1$ et $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{Arc}\tan 1 = \frac{\pi}{4}$.

b) On réalise une intégration par parties :

$$u'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} \Longleftarrow u(t) = -\frac{1}{2(1+t^2)} \ ; \ v(t) = t \implies v'(t) = 1$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la manoeuvre est légitime et donne :

$$\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \Big[-\frac{t}{2(1+t^2)} \Big]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} F(1)$$

Or :

$F(2)=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2ln(1+t^2)}dt=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}dt=\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt$
ce qui donne :

$$F(2)=F(1)-\big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}F(1)\big)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

c) Procédons de façon analogue :

$$\begin{aligned}F(n+1)&=\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}dt=\int_0^1 \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt\\&=F(n)-\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt\end{aligned}$$

Notons $J_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}dt$ et intégrons par parties :

$$u'(t)=\frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} \Longleftarrow u(t)=-\frac{1}{2n(1+t^2)^n}\ ;\ v(t)=t \implies v'(t)=1$$

Les fonctions utilisées sont de classe C^1 et :

$$J_{n+1}=\Big[-\frac{t}{2n(1+t^2)^n}\Big]_0^1+\frac{1}{2n}F(n)$$

Ainsi : $J_{n+1}=-\dfrac{1}{n2^{n+1}}+\dfrac{1}{2n}F(n)$. En reportant, on obtient la relation cherchée :

$$F(n+1)=\big(1-\frac{1}{2n}\big)F(n)+\frac{1}{n2^{n+1}}$$

d) Pour $n\in\mathbb{N}$:

$$F(-n)=\int_0^1 (1+t^2)^n dt=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^{2k}dt=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2k+1}.$$

En particulier : $F(-1)=\dfrac{4}{3}$ et $F(-2)=\dfrac{28}{15}$.

3. F est décroissante sur $\mathbb{R}$, car si x et x' sont deux réels tels que $x\leqslant x'$, $\ln(1+t^2)$ étant positif pour tout réel t, on a : $\mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}\geqslant \mathrm{e}^{-x'\ln(1+t^2)}$, puis en intégrant $F(x)\geqslant F(x')$

4. Pour $x<0$, $\varphi_x : t\mapsto \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}$ est croissante sur $[0,1]$, et $\varphi_x(\frac{1}{2})=\big(\frac{5}{4}\big)^{-x}$.

Alors : $F(x)\geqslant \displaystyle\int_{1/2}^1 \mathrm{e}^{-x\ln(1+t^2)}\,dt\geqslant \frac{1}{2}\big(\frac{5}{4}\big)^{-x}$.

On en déduit (limites classiques) que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{-x}=+\infty$.

5. Par convexité $u\in[0,1]\implies \ln(1+u)\geqslant u\ln 2$ (on tient la corde) et donc pour $x>0$:

$$F(x)\leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2x\ln 2}\,dt=\frac{1}{\sqrt{x\ln 2}}\int_0^{\sqrt{x\ln 2}}\mathrm{e}^{-u^2}\,du\leqslant \frac{1}{\sqrt{x\ln 2}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,du$$

Ainsi, F étant à valeurs positives : $\lim\limits_{+\infty} F = 0$.

Exercice 1.4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \mathrm{e}^{-2x}\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour $k \in [\![0, 2]\!]$, déterminer un polynôme P_k de degré au plus k tel que :

$$I_n = P_k\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

5. a) Pour tout polynôme Q de degré au plus q, montrer l'existence d'un polynôme R de degré au plus q tel que :

$$Q\left(\frac{1}{n+1}\right) = R\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^q}\right) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré au plus k tel que :

$$I_n = P_k\left(\frac{1}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^k}\right) \text{ quand } n \text{ tend vers l'infini}$$

Solution :

1. Un calcul immédiat donne : $I_0 = \left[\dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}$

$$I_1 = \left[(1-x)\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I_0 = \frac{\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$$

Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $(1-x)^{n+1} \leqslant (1-x)^n$, donc la suite (I_n) décroît.

2. La suite est décroissante et positive donc elle converge.

Pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $\mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$, donc en intégrant : $\dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$

Donc (la majoration suffisait) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \left[(1-x)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)(1-x)^n\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\, dx = \frac{1-(n+1)I_n}{2}$$

Ainsi $I_n = \dfrac{1-2I_{n+1}}{n+1} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{1}{n}$. Donc :

$$\lim_{n\to\infty} nI_n = 1$$

4. On a : $I_n = 0 + o(1)$, donc $P_0 = 0$, on vient de voir que $nI_n = 1 + o(1)$, donc $I_n = \dfrac{1}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$ et $P_1 = X$.
Comme $nI_n = (1 - 2I_{n+1})\dfrac{n}{n+1}$, on a :

$$n(nI_n - 1) = n\Big(\big(\frac{n}{n+1} - 1\big) - 2I_{n+1}\frac{n}{n+1}\Big) = -\frac{n}{n+1} - 2(n+1)I_{n+1}\big(\frac{n}{n+1}\big)^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1 - 2 = -3$$

Donc

$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\big(\frac{1}{n^2}\big) \text{ et } P_2 = X - 3X^2$$

5. a) Soit le polynôme $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_qX^q$. La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est de classe $\mathbb{C}^\infty$ donc elle admet un développement limité à l'ordre q. Alors, classe oblige, $Q\big(\dfrac{x}{1+x}\big)$ admet un développement limité d'ordre q en 0 ; notons $R(x)$ sa partie principale (de degré au plus q) ; on a :

$$Q\big(\frac{x}{1+x}\big) = R(x) + o(x^q)$$

Si on prend $x = \dfrac{1}{n}$, alors $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1}{n+1}$, donc : $Q\big(\dfrac{1}{n+1}\big) = R\big(\dfrac{1}{n}\big) + o\big(\dfrac{1}{n^q}\big)$.

b) Par récurrence sur k. Si P_k existe, on a :

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{n+1}(1 - 2I_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\Big(1 - 2P_k\big(\frac{1}{n+1}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^k}\big)\Big)\\ &= \frac{1}{n+1}\Big(1 - 2P_k\big(\frac{1}{n+1}\big)\Big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big) = Q\big(\frac{1}{n+1}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big),\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{avec } Q = X(1 - 2P_k)\\ &= P_{k+1}\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^{k+1}}\big) + o\big(\frac{1}{(n+1)^{k+1}}\big), \text{ par 5.a, avec } P_{k+1} = R\\ &= P_{k+1}\big(\frac{1}{n}\big) + o\big(\frac{1}{n^{k+1}}\big)\end{aligned}$$

Et alors P_{k+1} est de degré au plus $k+1$ comme Q.

Exercice 1.5.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (u, f) un couple de fonctions continues sur l'intervalle $I = [a, +\infty[$ à valeurs réelles. On suppose que u est positive et qu'il existe une constante k telle que, pour x de I, on a :

$$f(x) \leqslant k + \int_a^x u(t)f(t)\,dt$$

1. On considère la fonction F définie sur I par : $F(x) = \displaystyle\int_a^x u(t)f(t)\,dt$..

a) Montrer que F est de classe C^1 sur I.

b) Prouver que pour x de I, on a : $F'(x) \leqslant ku(x) + u(x)F(x)$,où F' est la fonction dérivée de F.

c) Vérifier que la fonction définie sur I par :

$$x \mapsto \big(F'(x) - u(x)F(x)\big)\exp\Big(-\int_a^x u(t)\,dt\Big)$$

est la dérivée d'une fonction que l'on déterminera.

d) En déduire que pour x de I, on a : $F(x) \leqslant -k + k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$

e) Montrer que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$.

2. Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qui satisfait l'équation suivante :

$$f'(x) + \mathrm{e}^{-x} f(x) = \frac{x \cos x}{(1+x^2)^2}$$

et telle que $f(0) = 0$ (on ne cherchera pas à déterminer cette fonction ni même à montrer son existence).

a) Montrer que pour x réel positif, on a :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t} |f(t)|\, dt$$

b) Prouver que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto u(t) f(t)$ est continue sur I comme produit de fonctions continues, donc F est continue sur I, dérivable sur $]a, +\infty[$ et on a $F'(t) = u(t)f(t)$, donc F' est continue sur $]a, +\infty[$.
Comme $F'(t)$ admet une limite égale à $u(a)f(a)$, la fonction F est de classe C^1 sur I.

b) On sait que $f(x) \leqslant k + \int_a^x u(t)f(t)dt = k + F(x)$. Comme u est une fonction positive, on en déduit que

$$F'(x) = u(x)f(x) \leqslant ku(x) + u(x)F(x)$$

c) La forme de la fonction suggère que c'est la dérivée de la fonction

$$G : x \mapsto F(x) \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big)$$

On le justifie en observant que les règles de dérivation d'un produit et d'une fonction composée s'appliquent.

d) Avec la question b), on voit que :

$$G'(x) \leqslant ku(x) \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big) = H'(x)$$

où $H(x) = -k \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big)$.

D'où : $G(x) = G(x) - G(a) \leqslant k - k \exp\big(-\int_a^x u(t)dt\big)$

Ce qui entraîne que : $F(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big) - k$.

e) En combinant l'hypothèse et l'inégalité de la question d), on obtient pour $x \in I$:

$$f(x) \leqslant k + F(x) \leqslant k \exp\big(\int_a^x u(t)dt\big)$$

2. a) Comme $f(0) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \big|\int_0^x f'(t)dt\big| \leqslant \int_0^x \big|\frac{t\cos t}{(1+t^2)^2} - \mathrm{e}^{-t} f(t)\big|dt \\ &\leqslant \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}dt + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt \\ &\leqslant \Big[\frac{-1}{2(1+t^2)}\Big]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt = \frac{-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{2} + \int_0^x \mathrm{e}^{-t}|f(t)|dt\end{aligned}$$

b) Les hypothèses de la question 1 sont satisfaites, on a donc d'après 1. e) et pour tout x de $\mathbb{R}^+$:

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\exp\big(\int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt\big) = \frac{1}{2}\exp\big[1 - \mathrm{e}^{-x}\big] \leqslant \frac{\mathrm{e}}{2}$$

Exercice 1.6.

1. On considère une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

a) Écrire la définition mathématique de la convergence de la suite (a_n) vers ℓ.

b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, on a :

$$\big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}$$

c) En déduire la limite de la suite $(v_n)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \text{ et pour } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

b) Montrer qu'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha}\big)$ existe et est un réel non nul.

c) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Solution :

1. a) $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, k \geqslant n_0, |a_k - \ell| \leqslant \varepsilon/2$

b) n_0 ayant le sens précédent, pour $n \geqslant n_0$, on peut « casser » la sommation :

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - \ell\Big| &= \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - \ell)\Big| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}(a_k - \ell)\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n-1}|a_k - \ell| \leqslant \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

c) Et : $\exists\, n_1, \forall\, n \geqslant n_1, \Big|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_0-1}(a_k - \ell)\Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour $n \geqslant N = \max(n_0, n_1)$ on a : $|v_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que la suite (v_n) converge vers ℓ.

2. a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in\,]0, \pi/2[$, ce qui montre que $u_n > 0$. La suite (u_n) est décroissante puisque, pour tout réel $x > 0$, on a $\sin x < x$ (inégalité standard). Ainsi, la suite (u_n) est convergente. En notant ℓ sa limite, on a $\ell = \sin \ell$, ce qui donne $\ell = 0$.

b) Grâce au développement limité de la fonction sinus au voisinage de 0, à l'ordre 3, il vient :

$$u_{n+1} = \sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$$

Donc

$$u_{n+1}^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}(1 + \frac{\alpha u_n^2}{6} + o(u_n^2))$$

et

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{\alpha}{6} u_n^{2-\alpha}$$

Ceci est de limite finie non nulle si et seulement si $\alpha = 2$, la limite valant alors $\frac{1}{3}$.

3. On utilise le résultat de la question 1. : la suite v définie par $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ tend vers $\frac{1}{3}$.

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0} \Big(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\Big) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\Big(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2}\Big) = \frac{1}{3}$$

Ainsi $n u_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, soit $u_n^2 \underset{(n\to\infty)}{\sim} \dfrac{3}{n}$ et par positivité, $u_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 1.7.

Dans cet exercice, n et p sont deux entiers naturels non nuls tels que $n > p$. Soit (E) l'équation d'inconnue t appartenant à $\mathbb{R}^+$ et de paramètre réel x :

$$t^n + xt^p - 1 = 0.$$

1. Montrer que pour tout x réel, (E) admet une unique solution strictement positive y. On pose $y = f(x)$.

2. a) Montrer que la fonction f ainsi définie est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) On admet que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Exprimer sa dérivée f' à l'aide de f.

3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

4. a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. En déduire un équivalent simple de $f(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

5. Soit α et β deux réels. Déterminer en fonction de α et β la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^\alpha x^\beta dx$.

Solution :

1. Soit x réel fixé. Posons $\varphi_x : t \to t^n + xt^p - 1$. La fonction φ_x est polynomiale donc dérivable et :

$$\varphi'_x(y) = ny^{p-1}\big(y^{n-p} + \frac{xp}{n}\big).$$

$\star$ Si $x \geqslant 0$, φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, avec $\varphi_x(0) = -1 < 0$ et $\varphi_x(1) = x \geqslant 0$ ou $\lim\limits_{+\infty} \varphi_x = +\infty$, on conclut à l'existence et l'unicité de la solution de (E).

$\star$ Si $x < 0$, φ'_x s'annule en $t_0 = \big(-\dfrac{xp}{n}\big)^{\frac{1}{n-p}} > 0$ et la fonction φ_x décroît strictement sur $[0, t_0]$, croît strictement sur $[t, +\infty[$. On conclut par le même argument.

2. a) Soit $x_1 < x_2$.
Posons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Pour tout $y \geqslant 0$: $y^n + x_1y^p - 1 \leqslant y^n + x_2y^p - 1$ et :

$$0 = y_1^n + x_1y_1^p - 1 \leqslant y_1^n + x_2y_1^p - 1$$

ce qui montre que $\varphi_{x_2}(y_1) \geqslant 0$. Comme φ_{x_2} n'est positive que sur $[y_2, +\infty[$, on conclut : $y_1 \geqslant y_2$.

Ainsi la fonction f est décroissante (même en fait strictement).

b) On sait que, pour tout x réel, $[f(x)]^n + x[f(x)]^p - 1 = 0$. Comme f est supposée dérivable, il vient : $nf'(x)[f(x)]^{n-1} + [f(x)]^p + xpf'(x)[f(x)]^{p-1} = 0$, soit (toujours parceque la dérivabilité a été admise) :

$$f'(x) = -\frac{[f(x)]^p}{n[f(x)]^{n-1} + xp[f(x)]^{p-1}}$$

Comme $f(0)=1$, il vient $f'(0)=-\dfrac{1}{n}$.

3. On a supposé que f est de classe C^∞. Ainsi un développement limité en 0 à l'ordre 2 est donné par :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+o(x^2).$$

En redérivant :

$$nf''(x)[f(x)]^{n-1}+n(n-1)[f'(x)]^2[f(x)]^{n-2}+pf'(x)[f(x)]^{p-1}+pf'(x)[f(x)]^{p-1} +xpf''(x)[f(x)]^{p-1}+xp(p-1)[f'(x)]^2[f(x)]^{p-2}=0$$

Avec $f(0)=1$ et $f'(0)=-\dfrac{1}{n}$, il vient $f''(0)=\dfrac{2p+1-n}{n^2}$
et

$$f(x)=1-\frac{x}{n}+\frac{(2p+1-n)x^2}{2n^2}+o(x^2)$$

4. a) $\star$ La fonction f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc admet une limite λ en $+\infty$.

Supposons $\lambda>0$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x)=\lambda^n$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^p(x)=\lambda^p$ et
$\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x)+xf^p(x)-1=\infty$, en contradiction avec $f^n(x)+xf^p(x)-1=0$.
Donc $\lambda=0$.

$\star$ On a : $[f(x)]^p(x+[f(x)]^{n-p})=1$, donc par le résultat précédent

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]^p x=1 \text{ et } f(x)\underset{(+\infty)}{\sim} x^{-1/p}.$$

b) Si l'on suppose que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\mu\in\mathbb{R}$, alors :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f^n(x)=\mu^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f^p(x)=\mu^p$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^n(x)+xf^p(x)-1=\infty$ en contradiction avec $f^n(x)+xf^p(x)-1=0$.
Ainsi μ n'existe pas et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, par décroissance de f sur $\mathbb{R}$.

5. La fonction $h: x\mapsto x^\beta[f(x)]^\alpha$ est continue sur $]0,+\infty[$.

- au voisinage de 0, $h(x)\sim x^\beta$ et $\displaystyle\int_0^1 h(x)dx$ converge si et seulement si $\beta>-1$.
- au voisinage de $+\infty$, $h(x)\sim x^{\beta-\alpha/p}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge si et seulement si $\dfrac{\alpha}{p}-\beta>1$.

Bref, l'intégrale existe si et seulement si $\beta>-1$ et $\alpha>p(1+\beta)$.

Exercice 1.8.

Soit $A=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$ et f définie sur A par :

$$f(x,y)=\frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)} \text{ et } f(0,0)=0$$

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

1. Montrer que $\forall (x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}, 0\leqslant f(x,y)\leqslant \|(x,y)\|$
En déduire que f est continue sur A.
2. Déterminer le minimum de f sur A.
3. Montrer que si $x>10$ ou $y>10$, alors $f(x,y)\leqslant \dfrac{1}{10}$.
Justifier que f est bornée sur A et atteint ses bornes.
4. Déterminer le maximum de f sur A.
5. Montrer que pour $(x,y)\in A$, de norme assez grande, $f(x,y)$ est aussi petit que l'on veut.

Solution :

1. On a pour $(x,y)\in A\setminus\{(0,0)\}$ (tout est positif) :
$$0\leqslant f(x,y)\leqslant \frac{1}{(1+x)(1+y)}\times\frac{x}{x+y}\times y\leqslant y\leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$
Ceci entraîne que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ et f est continue en $(0,0)$.

2. Comme $f(1,0)=0$ et f est positive sur A, il vient $\displaystyle\min_{(x,y)\in A} f(x,y)=0$.

3. On a, pour $x>10, y>10$:
$$0\leqslant f(x,y)\leqslant \frac{x}{1+x}\times\frac{y}{1+y}\times\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{10}$$
Soit $K=[0,10]^2$. L'ensemble K est fermé borné, donc $\displaystyle\sup_K f$ existe et est atteint. Comme $\displaystyle\sup_{A\setminus K} f\leqslant \frac{1}{10}$, la fonction f est bornée sur A. de plus $f(1,1)=\dfrac{1}{8}>\dfrac{1}{10}$; donc $\displaystyle\sup_A f=\sup_K f$.

4. Le maximum de f n'est pas atteint en un point du bord de K, et comme f est de classe C^1 sur l'intérieur de K, il est atteint en un point critique. Or
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(y-x^2)}{(1+x)^2(1+y)(x+y)^2}\ \text{et}\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x(x-y^2)}{(1+y)^2(1+x)(y+x)^2}$$
Les points critiques vérifient $y=x^2$ et $x=y^2$, et comme x,y sont non nuls, ceci est équivalent à $x=y=1$. C'est le point où le maximum est atteint.

5. Pour x,y positifs, on a $x+y\geqslant\sqrt{x^2+y^2}$, d'où $0\leqslant f(x,y)\leqslant\dfrac{1}{x+y}$, ce qui donne le résultat.

Exercice 1.9.

1. Montrer que, pour tout réel y, les intégrales
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\,dx,\ \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,dx\ \text{et}\ \int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)\,dx$$

sont convergentes.

On définit ainsi une fonction F qui à tout réel y, associe le nombre :

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)dx$$

2. Montrer que F est bornée sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que : $\forall p, q \in \mathbb{R}, \cos p - \cos q = -2 \sin \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2}$

3. a) Établir, pour tout réel x, l'inégalité : $|\sin x| \leqslant |x|$.

b) En déduire que F est continue sur $\mathbb{R}$.

4. a) Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, |\cos(a+b) - \cos a + b \sin a| \leqslant \dfrac{b^2}{2}$.

b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel y, la dérivée F' de F est donnée par :

$$F'(y) = -2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)dx$$

c) En déduire que pour tout réel y, $F'(y) = -2yF(y)$.

d) Montrer que pour tout réel y : $F(y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-y^2}$.

Solution :

1. Pour tout réel y, $|\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)| \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ qui est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On conclut par le théorème de majoration. De même $|x\mathrm{e}^{-x^2} \sin(2xy)| \leqslant x\mathrm{e}^{-x^2}$ et $|x^2\mathrm{e}^{-x^2} \cos(2xy)| \leqslant x^2\mathrm{e}^{-x^2}$ et les fonctions majorantes sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

2. L'inégalité ci-dessus montre que pour tout y réel : $|F(y)| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

3. a) C'est l'inégalité des accroissement finis pour la fonction sinus sur l'intervalle $[0, x]$.

b) Soit y réel fixé. Grâce à la formule rappelée :

$$\begin{aligned}|F(y+h) - F(y)| &\leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}|\cos(2x(y+h)) - \cos(2xy)|dx \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}|\sin(2xy + xh)| \cdot |\sin(xh)|dx \\ &\leqslant 2|h|\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}dx\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre h vers 0 pour montrer la continuité de F en y, donc sur $\mathbb{R}$.

4. a) Soit $\varphi : x \mapsto \cos x$. On a $|\varphi(a+b) - \varphi(a) - b\varphi'(a)| \leqslant \dfrac{b^2}{2} \sup\limits_{[a,a+b]} |\varphi''| \leqslant \dfrac{b^2}{2}$

Ce qui est exactement le résultat demandé.

b) Pour y réel et h non nul, on écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Big|\frac{F(y+h)-F(y)}{h} + 2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,dx\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{h}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}(\cos(2xy+2xh) - \cos(2xy) + 2xh\sin(2xy))\,dx\Big| \\
\Delta &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}|\cos(2xy+2xh) - \cos(2xy) + 2xh\sin(2xy)|\,dx \\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} 2x^2h^2\,dx \leqslant 2|h|\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

Le majorant est de limite nulle quand h tend vers 0, donc F est dérivable en y et

$$F'(y) = \int_0^{+\infty} -2x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\,dx$$

c) Effectuons une intégration par parties sur $[0, A]$. Toutes les fonctions en jeu sont de classe C^1.

$$\int_0^A (-2x\mathrm{e}^{-x^2})\sin(2xy)dx = \big[\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2xy)\big]_0^A - 2y\int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2xy)dx$$

On fait tendre A vers $+\infty$. Il vient : $F'(y) = -2yF(y)$

d)) Cette équation différentielle linéaire s'intègre en $F(y) = K\mathrm{e}^{-y^2}$. La constante K est déterminée par $K = F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 1.10.

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(t) = \dfrac{t^2}{2\pi} - t$, et g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{h(t)}{2\sin(\frac{t}{2})} & \text{si } t \in]0, \pi] \\ -1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $C^1([0, \pi])$.

2. Déterminer une constante C telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, pour tout réel t de $]0, \pi]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\frac{t}{2}} + C$$

3. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1([0,\pi])$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)\,dt = 0$$

Soit la fonction ζ définie par : $\zeta(x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

4. Déterminer le domaine de définition de la fonction ζ.

5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt$.

6.Déduire des questions précédentes que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Solution :

1. Sur $]0,\pi]$ les théorèmes généraux permettent de conclure, g est même de classe $\mathcal{C}^\infty$, avec pour $t > 0$:

$$g'(t) = \frac{(\frac{t}{\pi}-1)2\sin\frac{t}{2} - (\frac{t^2}{2\pi}-t)\cos\frac{t}{2}}{4\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{(\frac{t}{\pi}-1)t - (\frac{t^2}{2\pi}-t) + o(t^2)}{t^2} \sim \frac{1}{2\pi}$$

Comme $h(t) \underset{(0)}{\sim} -t$ et $\sin u \underset{(0)}{\sim} u$, on a $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = -1 = g(0)$ et g est continue en 0.

Le théorème des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ s'applique et g est dérivable en 0 avec $g'(0) = \dfrac{1}{2\pi}$, donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$.

2. Comme $t \in]0,\pi]$, on a $\mathrm{e}^{it} \neq 1$ et par un calcul classique :

$$S = \sum_{k=0}^n \mathrm{e}^{ikt} = \frac{1-\mathrm{e}^{i(n+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} = \mathrm{e}^{i\frac{n}{2}t} \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) = \frac{\cos(\frac{n}{2}t).\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

La forme demandée exige de transformer le produit du numérateur en somme :

$$\begin{aligned}\cos(\frac{n}{2}t).\sin(\frac{n+1}{2}t) &= \frac{1}{2}[\sin(\frac{n+1}{2}t - \frac{nt}{2}) + \sin(\frac{n+1}{2}t + \frac{nt}{2})] \\ &= \frac{1}{2}[\sin(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{2n+1}{2}t)]\end{aligned}$$

On obtient la formule voulue, avec $C = \dfrac{1}{2}$.

3. En intégrant par parties :

$$I_n = \int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)tdt = \Big[f(t)\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{-(n+\frac{1}{2})}\Big]_0^\pi + \int_0^\pi f'(t)\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}dt$$

Soit :

$$I_n = -\frac{2f(0)}{2n+1} - \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos((n+\frac{1}{2})t)dt$$

Or : $\left|\int_0^\pi f'(t).\cos((n+\frac{1}{2})t)dt\right| \leqslant \int_0^\pi |f'(t)|dt$, donc :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)t\,dt = 0$$

4. Ce sont des séries de Riemann, la fonction ζ est définie sur $]1,+\infty[$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, On fait deux intégrations par parties (en dérivant la partie polynomiale) :

$$I_k = \int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt = -\frac{1}{k}\int_0^\pi h'(t)\sin(kt)\,dt = \cdots = \frac{1}{k^2}$$

On déduit de (2) : $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos(kt) = \dfrac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin\frac{t}{2}} - \dfrac{1}{2}$, puis, en reportant :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi h(t)\cos(kt)dt = \int_0^\pi h(t)\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)dt\\ &= \int_0^\pi g(t)\sin\big((n+\frac{1}{2})\big)tdt - \int_0^\pi \frac{h(t)}{2}dt.\end{aligned}$$

On fait tendre n vers l'infini, on applique le résultat de 3. à la fonction g de la question 1. et comme on a : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{h(t)}{2}dt = -\frac{\pi^2}{6}$, il reste :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

Exercice 1.11.

Soit p un entier de $\mathbb{N}^*$. On note S le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes. On confond fonction polynomiale et polynôme associé.

1. Soit f la fonction polynomiale définie par $f(x) = x^{2p+1} + x^{2p} - 2p$.
Étudier les variations de f et justifier que $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$. On la note λ.

2. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soit n un entier tel que $n \geqslant 2$.
Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients complexes de degré n s'écrivant sous la forme $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k X^k$.

a) On pose $Q(X) = \sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\big(\sum\limits_{i=0}^{k-1}a^{k-i-1}X^i\big)$.

Établir que $P(X) - P(a) = (X-a)Q(X)$. En déduire que $(X-a)^2$ divise $(P(X)-P(a))$ si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{n}k\alpha_k a^{k-1} = 0$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que a soit racine au moins double de P.

b) Montrer que le polynôme $X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ admet $(2p+1)$ racines simples dans $\mathbb{C}$, toutes non nulles. On les notera $z_1, z_2, \cdots, z_{2p+1}$ avec $z_{2p+1}=\lambda$. Montrer que pour tout k de $[\![1, 2p+1]\!]$, $|z_k| \geqslant \lambda$. (On pourra considérer $f(|z_k|)$). Montrer que l'égalité a lieu si et seulement si $k=2p+1$.

3. **Exemple.** Soit $P(X)=X^3+X^2-2$.

a) Montrer que P admet une unique racine réelle et deux racines complexes conjuguées dont on déterminera le module et un argument.

b) Soit $E=\{(u_n)_{n\geq 0} \,/\, \forall\, n\in\mathbb{N}, u_{n+3}=-u_{n+2}+2u_n\}$. Montrer que E est un sous-espace-vectoriel de S.

c) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{3n\pi}{4}}$, $w_n=2^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-i\frac{3n\pi}{4}}$, $x_n=1$. Montrer que la famille $((v_n)_n, (w_n)_n, (x_n)_n)$ est une base de E.

Solution :

1. On a $f'(x)=x^{2p-1}((2p+1)x+2p)$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Avec $\alpha=-\dfrac{2p}{2p+1}$ et $f(\alpha)=\big(\dfrac{2p}{2p+1}\big)^{2p}\big(1-\dfrac{2p}{2p+1}\big)-2p<0$, car le premier terme de cette expression vaut moins que 1. Ceci prouve que f s'annule sur $\mathbb{R}$ en un unique point λ, avec $\lambda>0$.

2. a) $\star$ $P(X)-P(a)=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k X^k-\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k a^k=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k(X^k-a^k)$
et comme $X^k-a^k=(X-a)(X^{k-1}+aX^{k-2}+\cdots+a^{k-1})$, on a bien :

$$P(X)-P(a)=(X-a)Q(X)$$

$\star$ Ainsi $(X-a)^2|P(X)-P(a) \iff X-a|Q(X) \iff Q(a)=0$

$$\iff \sum_k k\alpha_k a^{k-1}=0$$

Ainsi a est racine multiple de P si et seulement si $P(a)=P'(a)=0$ (ce que l'on sait pour le cas réel, mais n'est pas au programme pour les polynômes complexes).

b) $\star$ a est racine multiple de $P=X^{2p+1}+X^{2p}-2p$ si et seulememnt si $P(a)=0$ et $P'(a)=0$. La deuxième condition s'écrit $(2p+1)a^{2p}+2pa^{2p-1}=0$, soit $a=0$ ou $a=-\dfrac{2p}{2p+1}$ et on sait depuis la question 1. que ces nombres ne sont pas racines de P.
Ainsi P admet $2p+1$ racines dans $\mathbb{C}$ et elles sont toutes simples.

$\star$ $f(|z_k|)=|z_k|^{2p}(|z_k|+1)-2p \geqslant |z_k|^{2p}(|z_k+1|)-2p=|z_k^{2p+1}+z_k^{2p}|-2p=0$

Donc, de par l'étude des variations de f : $|z_k| \geqslant \lambda$ et il ne peut y avoir égalité que si $|z_k| + 1 = |z_k + 1|$, ce qui impose que z_k soit un réel positif (revenir aux parties réelles et imaginaires ...), donc que $z_k = \lambda$, *i.e.* $k = 2p + 1$.

3. a) $X^3 + X^2 - 2 = (X-1)(X^2 + 2X + 2) = (X-1)((X+1)^2 + 1)$, donc les racines de P sont :

$$1, -1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}, -1 - i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}$$

b) E contient la suite nulle, est clairement stable par combinaison linéaire et l'application de E dans $\mathbb{C}^3$ qui à u associe le triplet (u_0, u_1, u_2) est un isomorphisme, (la linéarité est banale et la bijectivité est justement le fait de la relation de récurrence).

c) $\star$ La suite $(r^n)_n$ est élément de E si et seulement si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, r^{n+3} + r^{n+2} - 2r^n = 0$$

et ceci a lieu pour tout n si et seulement si ceci a lieu pour $n = 0$.
Bref les suites géométriques (v_n), (w_n) et (x_n) appartiennent à E.

Enfin, soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \alpha u_n + \beta v_n + \gamma x_n = 0$.

La suite $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$ est donc convergente (de limite $-\gamma$), et ceci n'a lieu que pour $\alpha = \beta = 0$, et il reste alors $\gamma = 0$. Donc la famille considérée est libre de cardinal *ad hoc* et est une base de E.

Exercice 1.12.

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$: $u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$.

1. Montrer que la série de terme général u_p converge. Soit γ sa somme. Montrer que $\gamma \in [0, 1]$.

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$: $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\big(\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n\big)dt$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $t \in [0, n]$, on a :

$$\big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

c) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite.

3. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\big(1 - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n\big)dt$.

a) Justifier l'existence de J_n.

b) Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1 - \frac{t}{n}\big)^k dt = n\big(\ln(n+1) + \sum_{p=1}^n u_p\big)$$

En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $J_n = \ln(n+1) + \displaystyle\sum_{p=1}^n u_p$.

4. On pose : $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$ et $V = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}dt$.

a) Justifier l'existence de U et de V.

b) Démontrer que $U - V = \gamma$.

Solution :

1. La méthode de comparaison série-intégrale pour la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ montre que $0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$. Ceci montre que la série de terme général u_p converge puisque les sommes partielles vérifient

$$0 \leqslant S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

La suite des sommes partielles est donc croissante majorée par 1 : elle admet une limite $\gamma \in [0,1]$.

2. a) La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\big(\mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n\big)$ est continue sur $]0,n]$. Au voisinage de $t = 0$, il vient :

$$f(t) = \frac{1}{t}\big(1 - t + o(t) - (1 - t + o(t))\big) = o(1)$$

Ainsi la fonction f admet un prolongement par continuité en $t = 0$, avec $f(0) = 0$. L'intégrale est « faussement » impropre.

b) Par convexité de la fonction exponentielle, pour tout x réel : $1 + x \leqslant \mathrm{e}^x$. Ainsi

$$1 - \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{-t/n} \text{ et } 1 + \frac{t}{n} \leqslant \mathrm{e}^{t/n}$$

donc

$$\big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} \text{ et } \big(1 + \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{t}$$

Il reste à multiplier la dernière inégalité par le réel positif $\big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n \mathrm{e}^{-t}$ pour obtenir l'inégalité de gauche.

c) Les deux inégalités ci-dessus montrent que

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}\big(1 - \big(1 - \frac{t^2}{n^2}\big)^n\big)$$

La fonction $x \mapsto (1-x)^n$ est convexe sur $[0,1]$;
donc pour $x \in [0,1], (1-x)^n \geqslant 1 - nx$. Ceci entraîne que :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}\big(1 + \frac{nt^2}{n^2} - 1\big) = \mathrm{e}^{-t} \times \frac{t^2}{n}$$

Ainsi $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^n t\mathrm{e}^{-t}dt \leqslant \dfrac{\Gamma(2)}{n}$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$.

3. a) La fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t}\big(1 - \big(1 - \dfrac{t}{n}\big)^n\big)$ est continue sur $[0,n]$. Au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre 1 montre que $g(t) \sim \dfrac{1}{t} \times t = 1$. Ainsi J_n est-elle faussement impropre.

b) Comme $u_p = \dfrac{1}{p} - \ln(p+1) + \ln(p)$, il vient $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p = \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p} - \ln(n+1)$.

Or, le changement de variable affine $u = 1 - \dfrac{t}{n}$ (ou l'intégration directe) donne

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1 - \tfrac{t}{n}\big)^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 nu^k du = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = n \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = n(\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n} u_p)$$

Donc :

$$\ln(n+1) + \sum_{p=1}^{n} u_p = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \big(1 - \tfrac{t}{n}\big)^k dt = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{1 - (1 - t/n)^n}{1 - (1 - t/n)} dt$$
$$= \int_0^n \frac{1}{t} \big(1 - \big(1 - \tfrac{t}{n}\big)^n\big) dt = J_n$$

4. a) L'intégrale U est faussement impropre, puisque la fonction à intégrer est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0 par 1.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$, positive et majorée par $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$, ce qui montre que V est bien définie.

b) Par la question 3. b, $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p = J_n - \ln(n+1)$, et $J_n - I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} dt$.

Donc :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = I_n + \int_0^n \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} dt - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt$$
$$= I_n + \int_0^1 \frac{1 - \mathrm{e}^{-t}}{t} dt + \int_1^n \frac{-\mathrm{e}^{-t}}{t} dt - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$$
$$= I_n + U - \int_1^n \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} - \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big)$$

Il reste à faire tendre n vers $+\infty$ pour obtenir $\gamma = U - V$.

Exercice 1.13.

1. a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \leqslant x - 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des réels strictement positifs.

En appliquant l'inégalité précédente à chacun des nombres $a_i = \dfrac{x_i}{\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k}$,

montrer que : $\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k) \leqslant \ln\big(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\big)$

Connaissez-vous une autre faon de démontrer ce résultat ?

2. a) Soit g la fonction définie pour tout x strictement positif par :

$$g(x) = \ln\big(1 + \frac{1}{x}\big) - \frac{1}{1+x}.$$

Étudier les variations de g et préciser les limites de g aux bornes de l'intervalle d'étude.

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f définie pour tout x strictement positif par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

3. a) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

b) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $v_n \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}$.

c) Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \geqslant \int_0^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

d) En utilisant les résultats de la question 1, montrer que

$$\frac{1}{n}\int_0^n x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \leqslant \ln(v_n) \leqslant 1$$

e) En déduire que la suite $(v_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Solution :

1. a) Inégalité classique qui se démontre par concavité de la fonction ln et position de la courbe par rapport à sa tangente en $(1, 0)$ ou par étude simple de la fonction associée.

b) On pose $a_i = \dfrac{x_i}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k}$, élément de $\mathbb{R}_+^*$ puisque les x_i le sont.

On peut donc leur appliquer l'inégalité de la première question, puis ajouter ces n inégalités. On obtient : $\sum_{i=1}^{n} \ln(a_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n}(a_i - 1)$ ou encore :

$$\ln\left(\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^n}\right) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - n$$

Or $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$. On a donc bien prouvé que $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant 0$, ou encore :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Inégalité qui peut aussi se démontrer par récurrence et par l'inégalité de définition de la concavité.

2. a) g est dérivable et $g'(x) = -\dfrac{1}{x(1+x)^2}$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Clairement : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=0$, et $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} g(x)=+\infty$.

b) f a même sens de variation que $h=\ln\circ f$.
$h(x)=x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big) \implies h'(x)=\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)+x\big(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\big)=g(x)$
Donc h et f sont strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} h(x)=0, \text{ donc } \lim_{+\infty} f=\mathrm{e} \text{ et } \lim_{0} f=1$$

3. a) la limite de la suite u est e (revu en 2. b))

b) u est la restriction de f à $\mathbb{N}^*$, et f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc, u est croissante et $\sum\limits_{k=1}^n u_k \leqslant nu_n$. Par conséquent $v_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n u_k\leqslant u_n$.
D'autre part, e est la limite de la suite croissante u. Finalement on a bien

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^*, v_n\leqslant u_n\leqslant \mathrm{e}.$$

c) On a vu que h est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ prolongeable par continuité en 0, donc pour tout k de $\mathbb{N}^*$: $k\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\geqslant \displaystyle\int_{k-1}^k x\ln(1+\frac{1}{x})\,dx$,
et par sommation :

$$\sum_{k=1}^n k\ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\geqslant\int_0^n x\ln\big(1+\frac{1}{x}\big)\,dx$$

d) Les réels u_k sont strictement positifs, ils peuvent donc jouer le rôle des x_k de la première question. On obtient alors : $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \ln(u_k)\leqslant\ln(v_n)$.

Or, $\ln(u_k)=k\ln(1+\frac{1}{k})$, et l'on vient de minorer $\sum\limits_{k=1}^n k\ln(1+\frac{1}{k})$ par l'intégrale $\displaystyle\int_0^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx$. On obtient ainsi, en se rappelant que v_n est majorée par e :

$$\frac{1}{n}\int_1^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx\leqslant\ln(v_n)\leqslant 1$$

e) En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_n&=\int_0^n x\ln(1+\frac{1}{x})dx=\Big[\frac{x^2}{2}\ln(\frac{x+1}{x})\Big]_{\to 0}^n+\frac{1}{2}\int_0^n\frac{x}{x+1}\,dx\\ &=\frac{n^2}{2}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\ln(n+1)\end{aligned}$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}I_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ et donc $\ln v_n\to 1$, *i.e.* $\lim v=\mathrm{e}$.

Exercice 1.14.

Une fonction f définie sur $[0,1]$ à valeurs réelles est dite *strictement convexe* si pour tout $(x,y)\in[0,1]^2$, avec $x<y$, et pour tout $t\in\,]0,1[$:

$$f(tx+(1-t)y)<tf(x)+(1-t)f(y).$$

Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$, de classe C^1, strictement convexe telle que $f(1)=1$. On note $f_n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et on suppose que la suite $(f_n(0))_{n\geq 1}$ est croissante.

1. a) Montrer que la suite $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite notée q.

b) Montrer que $f(q)=q$.

2. On suppose que $f'(1) \leqslant 1$.
Montrer que pour tout $s \in [0,1[$, on a $f(s) > s$. Quelle est la valeur de q ?

3. On suppose que $f'(1) > 1$.

a) Montrer qu'il existe $s_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $s \in [s_0, 1[$, $f(s) < s$.

b) On suppose qu'il existe deux solutions distinctes q_1, $q_2 \in [0,1[$ à l'équation $f(s)=s$. Montrer qu'il existe deux réels distincts $\xi_1, \xi_2 \in]0,1[$ tels que

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1.$$

c) En déduire que q est l'unique solution dans $[0,1[$ de l'équation $f(s)=s$.

Solution :

1. a) La suite $(f_n(0))_n$ est croissante bornée par 1, donc convergente.

b) On remarque ensuite en utilisant la définition que $f_{n+1}(0) = f \circ f_n(0)$. Ainsi, comme f est continue, on obtient $f(q)=q$.

2. On suppose que $f'(1) \leqslant 1$.
Soit $g : s \mapsto f(s)-s$. On a pour tout $s \in [0,1[$, $g'(s) = f'(s)-1 < f'(1)-1$.
Donc $g'(s) < 0$ et g est strictement décroissante.
Donc, pour tout $s \in [0,1[$, $f(s)-s > f(1)-1$, soit $f(s) > s$.

L'équation $f(s)=s$ ne possède pas de solution dans l'intervalle $[0,1[$, donc $q=1$.

3. On suppose que $f'(1) > 1$. Posons encore $g(s) = f(s)-s$, $s \in [0,1]$.

a) On remarque que $g'(1) > 0$. Ainsi, comme g' est continue, il existe un réel s_0 tel que pour tout $s \in [s_0,1]$, $g'(s) > 0$. g est strictement croissante sur $[s_0,1]$ et pour tout $s \in [s_0,1[$, $g(s) < g(1) = 0$, soit $f(s) < s$.

b) On remarque que que $g(q_1) = g(q_2) = g(1) = 0$.
Comme g est continue sur $[q_1,q_2]$ et dérivable sur $]q_1,q_2[$ et continue sur $[q_2,1]$ et dérivable sur $]q_2,1[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\xi_1 \in]q_1,q_2[$ et $\xi_2 \in]q_2,1[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. On obtient ainsi $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 1$

c) Comme f est strictement convexe, f' est strictement croissante (si f' est croissante sans être strictement croissante, il existe un intervalle sur lequel f' est constante et sur cet intervalle f est affine, donc n'est pas strictement

convexe). Ainsi, s'il existe deux solutions dans $]0,1[$, d'après la question précédente, on obtient une contradiction.
Enfin, si l'équation $f(s) = s$ n'avait pas de solution dans $[0,1[$, on aurait $q = 1$, et il existerait un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(0) \in [s_0, 1]$, soit $f_{n+1}(0) = f(f_n(0)) < f_n(0)$, ce qui est impossible.

Finalement, $q \in [0,1[$ et est bien l'unique solution de l'équation $f(s) = s$ dans l'intervalle $[0,1[$.

Exercice 1.15.

On considère la suite u définie par ses deux premiers termes u_0 et u_1 strictement positifs et la relation de récurrence :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est bien définie et à valeurs strictement positives.

2. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$$

En déduire la seule limite finie possible pour la suite $(u_n)_n$.

Dans toute la suite, l'entier p est fixé, tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$.

4. On pose pour tout entier naturel n, $w_n = \dfrac{\sqrt{u_n}}{2} - 1$, et on considère la suite $(x_n)_{n \geq p}$ définie par :

$$x_p = |w_p|,\ x_{p+1} = |w_{p+1}|, \text{ et pour tout } n \geqslant p : x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + x_n}{3}$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq p}$ converge vers 0.

5. Montrer, par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies x_n \geqslant |w_n|$.
En déduire que la suite $(w_n)_n$ est convergente.

6. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Solution :

1. Clair, par récurrence.

2. $\star$ *A priori* la suite u peut diverger vers $+\infty$, et si elle converge (dans $\mathbb{R}^+$), alors sa limite ℓ vérifie $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$, dont les solutions sont $\ell = 0$ et $\ell = 4$.
Conclusion : les limites possibles pour u sont : $0, 4, +\infty$.

$\star$ Supposons que pour tout entier naturel n, $0 < u_n \leqslant 1$. La suite u serait alors croissante à partir de u_1 car pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_{n-1}} + (\sqrt{u_n} - u_n)$ serait positif ou nul comme somme de deux positifs, puisque dans $[0,1]$, $\sqrt{x} \geqslant x$.

Donc u serait croissante à partir de u_1 et majorée par 1 donc convergente vers ℓ appartenant à $[u_1, 1]$, ce qui n'est pas possible.

On peut donc en conclure que u ne vérifie pas l'hypothèse prise : il y a donc au moins un entier p tel que $u_p > 1$ et la relation de définition montre que pour tout $n \geqslant p$, on a $u_n > 1$, car :

$\rightarrow$ Si $p \geqslant 1$, $u_{p+1} = \sqrt{u_p} + \sqrt{u_{p-1}} \geqslant \sqrt{u_p} > 1$, et ainsi de suite par une récurrence immédiate.

$\rightarrow$ Si $p = 0$, alors $u_2 = \sqrt{u_0} + \sqrt{u_1} > 1$ et on peut donc remplacer p par 2 et se ramener au cas précédent.

On a bien prouvé ce qui était demandé : il existe un entier naturel p tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \implies u_n > 1$$

Et finalement, la seule limite finie possible pour u est 4.

3. L'équation caractéristique associée à x est $3r^2 - r - 1 = 0$, dont les deux racines sont $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$. La suite x est donc de la forme :

$$\forall n \geqslant p, x_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n,$$

où les constantes α et β sont déterminées de façon unique par les conditions : $x_p = |w_p|, x_{p+1} = |w_{p+1}|$

Comme $\sqrt{13} \in [3,4]$, on a : $0 < r_1 < 1$, $-1 < r_2 < 0$, et la suite $(x_n)_n$ converge vers 0.

4. Pour $n \geqslant p$, soit la propriété $\mathcal{Q}(n)$ suivante :

« du rang p au rang n, on a : $x_k \geqslant |w_k|$ »

$\star$ $\mathcal{Q}(p+1)$ est banalement vraie.

$\star$ Supposons la propriété acquise à un certain rang $n+1$, avec $n \geqslant p$, alors :

$$\begin{aligned} x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{3} &\geqslant \frac{1}{3}(|w_n| + |w_{n+1}|) = \frac{1}{3}\Big(\Big|\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1\Big| + \Big|\frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 1\Big|\Big), \\ &\geqslant \frac{1}{3}\Big|\frac{\sqrt{u_n}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{u_{n+1}}}{2} - 1\Big| = \frac{1}{3}\Big|\frac{u_{n+2}}{2} - 2\Big| \end{aligned}$$

Ainsi : $x_{n+2} \geqslant \dfrac{1}{6}|u_{n+2} - 4| = \dfrac{1}{6}(\sqrt{u_{n+2}} + 2)|\sqrt{u_{n+2}} - 2| \geqslant \dfrac{1}{2}|\sqrt{u_{n+2}} - 2|$

(car $\sqrt{u_{n+2}} + 2 \geqslant 3$)

Ainsi, on a encore $x_{n+2} \geqslant |w_{n+2}|$ et la propriété est encore vraie au rang $n+2$. On conclut par le principe de récurrence.

On en déduit par le théorème d'encadrement que w converge aussi vers 0.

5. Ainsi w converge vers 0, donc $\Big(\dfrac{\sqrt{u_n}}{2}\Big)$ converge vers 1 et finalement u converge vers 4

Exercice 1.16.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre des involutions de $[\![1, n]\!]$.

On rappelle qu'une application $\sigma : [\![1, n]\!] \rightarrow [\![1, n]\!]$ *est une involution si et seulement si* $\sigma \circ \sigma = id$.

1. On pose $d_0 = 1$.

a) Calculer d_1, d_2 et d_3.

b) Montrer que : pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.

c) Écrire en Pascal une fonction dont l'en-tête est `Function D(n : integer) : integer ;` permettant de calculer d_n.

2. On pose pour tout réel x : $f(x) = \mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}}$.

a) Prouver l'existence d'un développement limité pour f à tout ordre n au voisinage de 0.

On peut donc définir une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que a_n soit le coefficient de x^n dans le développement limité, à un ordre au moins égal à n, de f. On a ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

b) Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\sum_{p,q\in\mathbb{N},p+2q=n} \frac{1}{p!}\times\frac{1}{2^q q!}$.

c) Montrer que la dérivée f' de f admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de 0 et le déterminer à l'aide des coefficients a_k

d) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n = a_n \times n!.$$

Solution :

1. a) $\star$ Pour $n = 1$, il n'y a qu'une application de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$: l'identité et elle est involutive : $d_1 = 1$.

$\star$ Pour $n = 2$, les deux applications id et la transposition $\tau_{1,2}$ sont involutives : $d_2 = 2$.

$\star$ Pour $n = 3$, id et les trois transpositions sont involutives : $d_3 = 4$.

b) Pour $n \geqslant 2$, les involutions de $[\![1, n]\!]$ sont de deux catégories qui s'excluent :

$\rightarrow$ celles pour lesquelles $f(n) = n$, qui sont obtenues en prolongeant les involutions de $[\![1, n-1]\!]$: il y en a d_{n-1} ;

$\rightarrow$ celles pour lesquelles $f(n) = p \in [\![1, n-1]\!]$, p peut alors se choisir de $n-1$ faons et à chaque fois, on a $f(p) = n$ et f est alors obtenue en prolongeant une involution d'un ensemble de cardinal $n-2$ (rien à faire si $n = 2$, et on ne fait rien d'une seule faon !) : il y en a $(n-1)d_{n-2}$ (le nombre d'involutions d'un ensemble de cardinal c ne dépend que de c).

Bref :

$$d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$$

c) On peut opter pour un traitement récursif :

```
Function D(n : integer) : integer ;
begin
If n=0 ou n=1 then d :=1 else D :=D(n-1)+(n-1)*D(n-2) ; end,
```

2. a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par composition), donc admet un développement limité à tout ordre et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

b) On a $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n)$, donc :

$$e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\frac{x^2}{2}\Big)^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k!}x^{2k} + o(x^n)$$

En effectuant le produit de ces développements limités, on a donc :
$f(x) = e^x e^{x^2/2} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, avec : $a_k = \sum_{p+2q=k} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q q!}$

c) La fonction f' est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$, avec

$$b_k = \frac{(f')^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k+1))}(0)}{k!} = (k+1)a_{k+1}$$
$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n} (k+1)a_{k+1}x^k + o(x^n)$$

d) On a $f'(x) = (1+x)e^{x+\frac{x^2}{2}} = (1+x)f(x)$. Ainsi

$$f'(x) = (1+x)\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k-1})x^k + o(x^n)$$

Par unicité du développement limité à tout ordre de f', il vient donc :

$$a_0 = a_1 \text{ et pour } k \geqslant 1,\ (k+1)a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$$

Posons $c_n = n! \times a_n$, on a $c_0 = a_0 = f(0) = 1, c_1 = a_1 = f'(0) = 1$ et comme pour $k \geqslant 1$, $(k+1)!a_{k+1} = k!a_k + k(k-1)!a_{k-1}$, on a : $c_{k+1} = c_k + kc_{k-1}$.

Les suites c et d vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2 et ont les mêmes deux premiers termes : elles sont égales, ce qui est le résultat attendu.

Exercice 1.17.

On considère une fonction φ continue sur $\mathbb{R}$ et on note E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout x réel : $f''(x)+\varphi(x)f(x) = 0$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On suppose que E contient une fonction u qui ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$, et on pose :

$$v(x) = u(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2}$$

2. Montrer que $v \in E$, puis que (u, v) est une famille libre de E. En déduire que la dimension de E est supérieure ou égale à 2.
On admettra que E est de dimension 2.

3. Pour f, g éléments de E, pour tout réel x, on pose :

$$\theta_{f,g}(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

a) Montrer que $\theta_{f,g}$ est une fonction constante. On pose alors $W(f, g) = \theta_{f,g}(0)$.

b) Montrer que W est une forme bilinéaire et que $W(u, v)$ n'est pas nul.

c) Montrer que $W(f, g) = 0$ si et seulement si f et g sont liés.

4. a) Montrer qu'un élément de E qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $f(x) = \varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et avec h de classe C^2 qui vérifie :

$$h''(x) + (h'(x))^2 + \varphi(x) = 0, \text{ pour tout } x \text{ réel.}$$

b) Déterminer tous les éléments de E vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = (1 + x^2)f(x)$
(on laissera le résultat sous forme intégrale).

Solution :

Soit $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)'(x) &= \lambda f'(x) + \mu g'(x) = -\lambda\varphi(x)f(x) - \mu\varphi(x)g(x)\\ &= -\varphi(x)(\lambda f + \mu g)(x))\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\lambda f + \mu g \in E$. Comme E contient la fonction nulle, il n'est pas vide et c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. On a $v'(x) = u'(x)\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + u(x)\frac{1}{(u(x))^2} = u'(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + \frac{1}{u(x)}$, d'où

$$v''(x) = u''(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2} + u'(x)\frac{1}{(u(x))^2} - \frac{u'(x)}{(u(x))^2} = u''(x)\int_0^x \frac{dt}{(u(t))^2}.$$

En remplaçant $u''(x)$ par $-\varphi(x)u(x)$, on obtient donc $v''(x) + \varphi(x)v(x) = 0$, ce qui prouve que $v \in E$.

On a $v(0) = 0$ et $u(0) \neq 0$, donc il ne peut exister de scalaire λ tel que $u = \lambda v$. D'autre part la fonction v n'est pas la fonction nulle (par exemple parceque $v'(0) \neq 0$), donc u n'est pas colinéaire à la fonction non nulle v et (u, v) est libre.

On en déduit que la dimension de E est supérieure ou égale à deux.

3. a) Posons $h(x) = \theta_{f,g}(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$. Alors h est dérivable et pour tout x :

$$h'(x) = f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

En écrivant que $f''(x) = -\varphi(x)f(x)$ et $g''(x) = -\varphi(x)g(x)$, on obtient $h'(x) = 0$. On en déduit que h est constante.

b) Clairement $W(\lambda f_1 + \mu f_2, g) = \lambda W(f_1, g) + \mu W(f_2, g)$; de plus $W(f, g) = -W(g, f)$ donc on obtient la linéarité par rapport au deuxième argument, ce qui montre le résultat.

On a : $W(u, v) = u(0)v'(0) - u'(0)v(0) = u(0) \times \dfrac{1}{u(0)} = 1 \neq 0$.

c) Si $g = \lambda f$ (ou l'inverse), il est clair que $W(f, g) = 0$.

Si (f, g) est libre, c'est une base de E. On écrit alors u, v en fonction de f et g. Par bilinéarité et antisymétrie :

$$1 = W(u, v) = W(\alpha f + \beta g, \gamma f + \delta g) = (\alpha\delta - \beta\gamma)W(f, g),$$

donc $W(f, g) \neq 0$.

4. a) Une solution f qui ne s'annule pas est de signe constant par le théorème des valeurs intermédiaires. On pose alors $h(x) = \ln(|f(t)|)$ et $\varepsilon = \pm 1$ selon le signe de f. On a bien $f(x) = \varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$.

On dérive deux fois $x \mapsto f(x) = \varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$ et on obtient $f'(x) = \varepsilon h'(x)\mathrm{e}^{h(x)}$ et $f''(x) = \varepsilon(h''(x) + (h'(x))^2)\mathrm{e}^{h(x)} = -\varphi(x)\varepsilon \mathrm{e}^{h(x)}$, d'où l'égalité souhaitée.

b) On pense à chercher h telle que $h''(x) = 1$ et $(h'(x))^2 = x^2$. La fonction $x \mapsto h(x) = x^2/2$ nous tend les bras. On vérifie alors que $u(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}$ est solution et on pose $v(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$.

Alors les solutions sont les combinaisons linéaires de u et v.

Exercice 1.18.

On considère l'espace vectoriel $C(\mathbb{R}^+)$ des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}^+$. Si $f \in C(\mathbb{R}^+)$, on définit la fonction $T(f)$ en posant :

$$T(f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$; pour $t \geqslant 0$, on pose $\varphi(t) = \sup\limits_{s \in [0,t]} |f(s) - f(0)|$.

a) Montrer que φ est bien définie et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b) Justifier le fait que $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = 0$.

c) Établir l'inégalité suivante : $\forall\, x \geqslant 0, |T(f)(x) - f(0)| \leqslant \varphi(x)$.

En déduire que la fonction $T(f)$ est continue en 0. Montrer que T est un endomorphisme de $C(\mathbb{R}^+)$.

2. Montrer que T est injectif. Est-il surjectif ? Déterminer l'ensemble des valeurs propres de T.

3. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$. On pose $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x)|$.

b) On définit ψ sur $\mathbb{R}^+$ en posant $\psi(t) = \sup\limits_{s\in[t,+\infty]} |f(s) - \ell|$. Montrer que ψ est une fonction décroissante telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \psi(t) = 0$.

c) Prouver que pour tout $x > 1$, on a $|T(f)(x)-\ell| \leqslant \dfrac{2M}{\sqrt{x}}+\psi(\sqrt{x})\dfrac{(x-\sqrt{x})}{x}$. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = \ell$.

4. Soit f une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ dont la représentation graphique admet une asymptote d'équation $y = ax + b$. Montrer que la représentation de $T(f)$ admet une asymptote que l'on déterminera.

Solution :

Notons F la primitive de f nulle en 0.

1. a) La fonction $s \mapsto |f(s) - f(0)|$ est continue sur l'intervalle $[0, t]$, elle y est donc bornée et par suite φ est bien définie. La croissance de φ sur $\mathbb{R}^+$ est une conséquence directe des propriétés des bornes supérieures.

b) La définition de la continuité de f au point 0 implique que $\lim\limits_{t\to0^+} \varphi(t) = 0$.

c) Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}|T(f)(x) - f(0)| &= \Big|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt - f(0)\Big| = \Big|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t) - f(0))dt\Big|\\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - f(0)|dt \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(x)dt = \varphi(x)\end{aligned}$$

Avec b), ceci implique que $\lim\limits_{x\to0^+} |T(f)(x) - f(0)| = 0$ et par conséquent que $T(f)$ est continue en 0. Comme la continuité en un point $x > 0$ provient d'une application directe du cours on a bien $T(f) \in C(\mathbb{R}^+)$.
La linéarité étant évidente, il en résulte que T est un endomorphisme de $C(\mathbb{R}^+)$.

2. $\star$ Soit $f \in \operatorname{Ker} T$, alors pour $x > 0$, $\dfrac{1}{x}F(x) = 0$ et F est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$. Par dérivation f est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}^+$, par continuité. T est bien injectif.
$\star$ Il n'est pas surjectif. Pour le voir, il suffit de remarquer que $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc l'application $t \mapsto |t - 1|$, (qui est dans $C(\mathbb{R}^+)$) n'est l'image par T de personne.

$\star$ Si λ est une valeur propre (non nulle puisque T est injectif) de T, il existe une fonction $f \in C(\mathbb{R}^+)\backslash\{0\}$, telle que $F(x) = \lambda x f(x)$ pour tout $x > 0$. D'où par dérivation $\forall\, x > 0, f(x) = \lambda(xf'(x) + f(x))$ ou encore $f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x} f(x)$.
Ceci s'intègre en $f(x) = Cx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, avec $C \neq 0$.
Mais on doit avoir $f \in C(\mathbb{R}^+)$, ce qui impose $\lambda \in]0,1]$ (sinon f a une limite infinie en 0). En résumé :

$$\mathrm{Spec}(T) =]0,1]$$

3. a) Il existe un réel $a > 0$ telle que $|f(x) - \ell| \leqslant 1$ dès que $x > a$. Comme f est continue sur l'intervalle $[0,a]$, elle y est bornée et il existe donc un réel strictement positif M_0 telle que $|f(x)| \leqslant M_0$ pour $x \in [0,a]$.
On voit donc que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par la constante $M_1 = |\ell| + 1 + M_0$.
La borne supérieure $M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f(x)|$ est donc bien définie.

b) Avec la question précédente, on voit que ψ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. La décroissance de ψ est une conséquence de la définition d'une borne supérieure et la convergence de ψ vers 0 en $+\infty$ résulte directement de la convergence de f vers ℓ en $+\infty$.

c) Soit $x > 1$, comme la majoration demandée fait intervenir $\psi(\sqrt{x})$, il est judicieux et possible de couper les intégrales en $\sqrt{x}$, il vient alors :

$$\begin{aligned}|T(f)(x) - \ell| = \Big|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-\ell)dt\Big| &\leqslant \frac{1}{x}\int_0^{\sqrt{x}} |f(t)-\ell|dt + \frac{1}{x}\int_{\sqrt{x}}^x |f(t)-\ell|dt\\ &\leqslant \frac{2M\sqrt{x}}{x} + \psi(\sqrt{x})\frac{(x-\sqrt{x})}{x} = \frac{2M}{\sqrt{x}} + \psi(\sqrt{x})\frac{(x-\sqrt{x})}{x}\end{aligned}$$

Une fois cette majoration établie, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(\sqrt{x}) = 0$, on en déduit que $T(f)(x)$ converge aussi vers ℓ lorsque $x \to +\infty$.

4. Si f est une fonction de $C(\mathbb{R}^+)$ qui admet une asymptote d'équation $y = ax + b$, on peut écrire par définition $f(x) = ax + b + g(x)$, où $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
Clairement $g \in C(\mathbb{R}^+)$ et par linéarité de T : $T(f)(x) = (a/2)x + b + T(g)(x)$.
En appliquant 3. c) à la fonction g, on voit que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(g)(x) = 0$ et par suite la courbe représentative de la fonction $T(f)$ admet la droite d'équation $y = (a/2)x + b$ comme asymptote.

Exercice 1.19.

1. On rappelle les deux formules suivantes : pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \sin p + \sin q = 2\sin\big(\frac{p+q}{2}\big)\cos\big(\frac{p-q}{2}\big) \\ \sin p - \sin q = 2\sin\big(\frac{p-q}{2}\big)\cos\big(\frac{p+q}{2}\big) \end{cases}$$

Montrer que $\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$.

2. Montrer que les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ convergent et qu'elles sont égales.

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. On pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt,\ A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt,\ \text{et}\ \ B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\tan^2 t} dt$$

Montrer que $B_n \leqslant I_n \leqslant A_n$.

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ puis $A_n - B_n$.

b) En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction de n.

5. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$, et donner la valeur de cette dernière intégrale.

Solution :

1. Les deux premières formules donnent :

$$\sin^2 p - \sin^2 q = (\sin p - \sin q)(\sin p + \sin q)$$
$$= 4\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

On conclut alors en appliquant deux fois la formule $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$.

$$\sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p+q)\sin(p-q)$$

2. Les problèmes sont dus uniquement à la borne infinie, car les fonctions à intégrer sont continues sur $]0, +\infty[$ et prolongeables par continuité en 0.

$\star$ On écrit, pour $x \geqslant 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

Lorque x tend vers l'infini le deuxième terme est de limite nulle et comme $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$, la règle de Riemann montre que $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ a une limite lorsque x tend vers l'infini (l'intégrale sur $[1, +\infty[$ est même absolument convergente).

$\star$ Pour la seconde intégrale, la convergence absolue s'obtient directement, et pour $a, b > 0$:

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin^2 t \times \frac{1}{t^2}\, dt &= \Big[-\frac{\sin^2 t}{t}\Big]_a^b + \int_a^b 2\sin t\cos t \times \frac{1}{t}\, dt\\ &= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_a^b \sin(2t) \times \frac{dt}{t}\\ &= \frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \int_{2a}^{2b} \sin(u) \times \frac{du}{u}\end{aligned}$$

Comme $\sin^2 a \underset{(0)}{\sim} a^2$, on peut passer à la limite lorsque a tend vers 0 et b vers l'infini, pour obtenir : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$

3. Une étude rapide de fonctions donne à l'économie :

$$\forall\, t \in\,]0, \pi/2[,\, 0 < \sin t \leqslant t \leqslant \tan t$$

Dans les mêmes conditions : $0 < \dfrac{1}{\tan^2 t} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sin^2 t}$, on multiplie alors par $\sin^2(nt) \geqslant 0$ et on intègre cet encadrement (les bornes sont dans l'ordre croissant) :

$$B_n \leqslant I_n \leqslant A_n$$

4. a) $\star$ En «cassant» $2A_{n+1}$ en deux, on écrit :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}\\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 t}(\sin^2(nt) - \sin^2((n+1)t) + \sin^2((n+2)t) - \sin^2((n+1)t))\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}(-\sin((2n+1)t) + \sin((2n+3)t))\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos((2n+2)t)\,dt\\ &= 0\end{aligned}$$

$\star$ D'autre part, pour $n \geqslant 1$ (on a $A_0 = B_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}A_n - B_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\Big(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\Big)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\,dt\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - \cos(2nt)\big)dt = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

b) On a $A_n - A_{n+1} = A_{n+1} - A_{n+2}$, donc la suite (A_n) est arihmétique. Avec $A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$A_n = \frac{n\pi}{2} \text{ et pour } n \geqslant 1,\ B_n = \frac{(2n-1)\pi}{4}$$

5. Finalement, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{(2n-1)\pi}{4} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{2n\pi}{4}$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$.

Comme $\displaystyle\frac{I_n}{n} = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\,dt = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$, par passage à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt = \lim_{n\to\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.20.

Dans cet exercice, on note $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, et $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

On considère l'application L définie sur $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall\, f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), \forall\, x \in \mathbb{R}, L(f)(x) = \int_0^x t f(t)\, dt$$

1. Montrer que $L(f)$ est un élément de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ qui admet une dérivée seconde en 0.

2. L'application L est-elle linéaire ? est-elle surjective ? est-elle injective ?

3. Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^*$. On considère l'application g définie par $g(x) = f(ax)$. Déterminer une relation entre $L(f)$ et $L(g)$. Qu'en déduit-on lorsque f est une fonction paire ? lorsque f est une fonction impaire ?

4. Soit $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ donnée . On souhaite résoudre l'équation

$$(E) : f - L(f) = h, \text{ d'inconnue } f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

a) Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) - xf(x) = h'(x), \text{ et } f(0) = h(0).$$

b) Pour toute fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $K(x) = f(x)\mathrm{e}^{-x^2/2}$. Montrer que f est solution de $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ si et seulement si K est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra.
Conclure.

Solution :

1. $L(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $L(f)'(x) = xf(x)$, donc $L(f)'$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi L_f est un élément de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

On a : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L(f)'(x) - L(f)'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x)}{x} = f(0)$, donc $L(f)'$ est dérivable en 0.

2. La linéarité de L est claire.

On vient de voir que $\mathrm{Im}(L) \subset C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \neq C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc L n'est pas surjective.

$f \in \mathrm{Ker}(L) \iff L(f) = 0 \implies \forall\, x \in \mathbb{R}, L(f)'(x) = x.f(x) = 0$
$\implies \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(x) = 0$ et comme f est continue en 0, f est la fonction nulle. Donc L est injective.

3. $L(g)(x) = \displaystyle\int_0^x t f(at)\, dt = \int_0^{ax} \frac{u}{a} f(u)\, \frac{du}{a} = \frac{1}{a^2} L(f)(ax)$

En particulier pour $a = -1$: $L(g)(x) = L(f)(-x)$

$\to$ Dans le cas d'une fonction f paire : $g = f$, donc $L(f)$ est paire.

$\to$ Dans le cas d'une fonction f impaire : $g = -f$, donc

$$L(f)(-x) = L(g)(x) = L(-f)(x) = -L(f)(x), \text{ donc } L(f) \text{ est impaire.}$$

4 .a) $\star$ Si f est solution de (E), f est dérivable et, en dérivant les 2 membres de (E) : $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ De plus, pour $x = 0$, on obtient bien, en remplaçant dans (E) : $f(0) = h(0)$.

$\star$ Réciproquement : $f'(x) - xf(x) = h'(x)$ prouve que les deux fonctions $f - L(f)$ et h ont même dérivée, elles diffèrent donc d'une constante laquelle est nulle car $f(0) = h(0)$.
Donc on a bien l'équivalence : f est solution de $(E) \iff f'(x) - xf(x) = h'(x)$, avec $f(0) = h(0)$

b) Puisque f est dérivable, il en est de même de la fonction K et comme $f(x) = K(x)\mathrm{e}^{x^2/2}$, on a :

$$f'(x) = K'(x)\mathrm{e}^{x^2/2} + K(x) \times x\mathrm{e}^{x^2/2} = K'(x)\mathrm{e}^{x^2/2} + xf(x)$$

En utilisant la question précédente et en remplaçant, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) - xf(x) = h'(x) &\iff \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.K'(x) = h'(x) \\ &\iff K(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt + C, \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &\iff f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left[\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt + C\right] \end{aligned}$$

et $f(0) = h(0) \implies C = h(0)$, d'où :

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left[h(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}.h'(t)dt\right]$$

Exercice 1.21.

Dans cet exercice, on pose :

$$\mathcal{S} = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \ / \ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, \lim_{x \to \pm\infty} x^p f^{(q)}(x) = 0\}$$

où $f^{(q)}$ désigne la dérivée $q^{\text{ème}}$ de f.

1. En considérant la fonction $\varphi : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$, montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
(On montrera que pour tout entier naturel q, $\varphi^{(q)}(x) = (-1)^q H_q(x)\varphi(x)$, où H_q est un polynôme dont on donnera le degré et le coefficient dominant.)

2. Montrer les propriétés suivantes :

a) si $f \in \mathcal{S}$, alors $f' \in \mathcal{S}$.

b) si $f \in \mathcal{S}$, pour toute fonction polynôme P, $Pf \in \mathcal{S}$

c) si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $fg \in \mathcal{S}$

d) si $f \in \mathcal{S}$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

e) l'application définie sur $\mathcal{S}^2$ par : $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}$ noté $\langle \ , \ \rangle$.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_k(x) = \varphi(x - k)$.

a) Montrer que tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in \mathcal{S}$.

b) En déduire que $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension finie.

4. Pour tout entier naturel q, on pose $\psi_q(x) = H_q(x)e^{-x^2/2}$. Calculer pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \neq q$, $\langle \psi_p, \psi_q \rangle$.

Solution :

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n.

• pour $n = 0$, $H_0 = 1$ et pour $n = 1$, $H_1(x) = -2x$.

• supposons que pour un certain rang n, $\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$, où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant 2^n ; alors en dérivant :

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2}(-1)^n(H_n'(x) - 2xH_n(x)).$$

On termine aisément la récurrence. On obtient ainsi que φ est un élément de $\mathcal{S}$, avec de plus H_n polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^n.

2. a) Quasiment évident puisque $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$.

b) Il suffit de remarquer, avec G. Leibniz, que $(Pf)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(n-k)} f^{(k)}$.

c) De la même façon $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$x^{2p} f^{(n-k)} g^{(k)} = x^p f^{(n-k)} \times x^p g^{(k)}$, et $x^{2p+1} f^{(n-k)} g^{(k)} = x^p f^{(n-k)} \times x^{p+1} g^{(k)}$.

Ce qui permet tous les passages à la limite exigés.

d) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{x \to \pm\infty} x^2 f(x) = 0$; deux applications de la règle de Riemann donnent la conclusion.

e) On vérifie sans problème que l'application est bien définie (car $fg \in \mathcal{S}$), est bilinéaire, symétrique et définie positive.

3. a) φ_k est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout entier p, on a : $\varphi_k^{(p)} = \varphi^{(p)}(x - k)$. On écrit alors pour tout n :

$$x^n = (x - k + k)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - k)^i k^{n-i}$$

ce qui montre que $\lim_{x \to \pm\infty} x^n \varphi_k^{(p)}(x) = 0$ et $\varphi_k \in \mathcal{S}$.

b) Choisissons $0 < k_1 < \cdots < k_p$ et supposons $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e^{-(x-k_i)^2} = 0$.

On a alors, en posant $u_j = (x-k_j)^2$: $\mathrm{e}^{-u_1^2}\big(\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^{u_2^2 - u_1^2} + \cdots + \lambda_p \mathrm{e}^{u_p^2 - u_1^2}\big) = 0$.

Après simplification par $\mathrm{e}^{-u_1^2}$, et en prenant la limite lorsque x tend vers l'infini, il vient $\lambda_1 = 0$. On recommence ensuite pour montrer que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Ainsi, on peut trouver dans $\mathcal{S}$ une famille libre de cardinal p aussi grand que l'on veut et $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension finie.

4. a) On a montré dans la première question que $\varphi^{(q)}(x) = (-1)^q H_q \mathrm{e}^{-x^2}$, avec H_q polynôme de degré q et de coefficient dominant 2^q.

b) On peut alors écrire, en supposant $p < q$ et avec plusieurs intégrations par parties :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_p \psi_q = \int_{\mathbb{R}} H_p(x) H_q(x) \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}} H_p \varphi^{(q)} = -\int_{\mathbb{R}} H_p' \varphi^{(q-1)} = \cdots$$
$$= (-1)^k \int_{\mathbb{R}} H_p^{(k)} \varphi^{(q-k)} = (-1)^p 2^p p! \int_{\mathbb{R}} \varphi^{(q-p)} = 0$$

Exercice 1.22.

On considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout n entier naturel non nul par :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} ; G_n = H_n - \ln(n) \text{ et } K_n = H_n - \ln(n+1)$$

On admet que pour tout couple (s, r) d'entiers naturels non nuls vérifiant $r < s$, on a $\sum\limits_{k=r}^{s} \frac{1}{k} \notin \mathbb{N}$.

Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 4, et pour tout $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, on note :

$$p_{n,r} = \frac{r}{n}\Big(\frac{1}{r} + \cdots + \frac{1}{n-1}\Big),$$

et pour tout $r \in \{1, \ldots, n-2\}$, on note : $\delta_{n,r} = n(p_{n,r+1} - p_{n,r})$.

1. Étudier la monotonie des suites $(G_n)_n$ et $(K_n)_n$. Montrer qu'elles convergent vers une même limite que l'on note γ.

2. On considère la suite $(S_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, r \in \mathbb{N}^*, S_r = \sum_{k=r+1}^{2r} \frac{1}{k}$$

a) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\frac{1}{2} \leqslant S_r < 1$, puis que $S_r + S_{2r} > 1$.

b) Pour tout $r \in \{1, \ldots, n-2\}$, montrer que : $\delta_{n,r} = H_{n-1} - H_r - 1$. Montrer que la suite finie $(\delta_{n,r})_{1\le r\le n-2}$ est strictement monotone ; préciser sa monotonie.

c) Montrer qu'il existe un unique q tel que $\delta_q < 0$ et $\delta_{q-1} > 0$. On le note $q = r(n)$. Montrer que le maximum de $p_{n,r}$ pour $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ et n fixé, vaut $p_{n,r(n)}$.

Solution :

1. Pour $n \geqslant 1$: $G_{n+1}-G_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1)+\ln(n) = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0$,
et de même $K_{n+1} - K_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} \frac{dt}{t} > 0$. De plus
$$\lim_{n\to\infty} (G_n - K_n) = \lim_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0.$$
Les deux suites sont adjacentes, donc convergentes de même limite.

2. a) On a : $\dfrac{1}{2} = r\times\dfrac{1}{2r} \leqslant S_r \leqslant r\times\dfrac{1}{r+1} < 1$.
D'autre part l'inégalité $\dfrac{1}{2} \leqslant S_r$ n'est une égalité que pour $r = 1$ et donc
$$S_r + S_{2r} > 2\times\frac{1}{2} = 1.$$

b) On a :
$\delta_{n,r} = n(p_{n,r+1} - p_{n,r}) = (r+1)\big(\dfrac{1}{r+1} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}\big) - r\big(\dfrac{1}{r} + \cdots + \dfrac{1}{n-1}\big)$,
soit :
$$\begin{aligned}\delta_{n,r} &= r\big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big) + \big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big) - r\big(\frac{1}{r}\big)\\ &\qquad -r\big(\frac{1}{r+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\big)\\ &= H_{n-1} - H_r - 1.\end{aligned}$$
La suite $(H_r)_r$ est clairement strictement croissante, donc la suite $(\delta_{n,r})_r$ (n est fixé) est strictement décroissante et il en est de même *a fortiori* de la séquence étudiée.

c) Comme $n \geqslant 5$, on a : $\delta_{n,1} = H_{n-1} - 2 \geqslant H_4 - 2 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - 2 = \dfrac{1}{12} > 0$.
De plus on a : $\delta_{n,n-2} = \dfrac{1}{n-1} - 1 < 0$.
On remarque que $\delta_{n,r} = H_{n-1} - H_r - 1 = \displaystyle\sum_{k=r+1}^{n-1} \frac{1}{k} - 1 \notin \mathbb{N}$.
Donc la séquence $(\delta_{n,r})_{1\leq r\leq n-2}$ décroît d'une valeur positive à une valeur négative sans s'annuler, donc elle change de signe entre deux entiers successifs $q-1$ et q.

D'après ce qui précède $\delta_{n,r} < 0$ si $r \geqslant q$ et $\delta_{n,r} > 0$ si $r < q$. Comme $p_{n,r+1} - p_{n,r}$ est du signe de $\delta_{n,r}$ on voit que la séquence $(p_{n,r})_{1\leq r\leq n-1}$ est croissante sur $\{1, \ldots, q\}$ et décroissante sur $\{q, \ldots, n-1\}$.
Elle atteint donc son maximum en q.