3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

On considère deux variables aléatoires réelles X et Y définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, X suivant la loi exponentielle de paramètre λ et Y la loi exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire λX ?

2. Soit u un réel strictement positif. Montrer que la variable aléatoire $S = Y - uX$ est à densité et qu'une densité de S est l'application h vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u}\, \mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu u}\, \mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

3. a) En déduire la fonction de répartition de la variable aléatoire $R = \dfrac{Y}{X}\cdot$

b) Montrer que la variable aléatoire R est à densité et préciser une densité de R.

c) La variable aléatoire R admet-elle une espérance ?

4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \dfrac{Y}{X+Y}\cdot$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, reconnaître la loi de U et préciser, s'il y a lieu, son espérance et sa variance.

Solution :

1. La variable aléatoire λX suit la loi exponentielle de paramètre 1.

2. Notons f_k la densité usuelle de la loi exponentielle de paramètre k.
Comme $u > 0$, la variable aléatoire $-uX$ est à densité et une densité est la fonction

$$g_u : t \mapsto \frac{1}{u} f_\lambda\big(-\frac{t}{u}\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u} & \text{si } t \leqslant 0 \end{cases}$$

Comme les variables aléatoires Y et $-uX$ sont indépendantes, leur somme S est une variable à densité, dont une densité est obtenue par convolution :

$$h = g_u \star f_\mu : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_u(t) f_\mu(x-t)dt$$

Pour tout x réel :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\min(0,x)} \frac{\lambda}{u}\,\mathrm{e}^{\lambda t/u}\mu.\mathrm{e}^{-\mu(x-t)}\,dt = \frac{\lambda\mu}{u}\,\mathrm{e}^{-\mu x}\int_{-\infty}^{\min(0,x)} \mathrm{e}^{(\mu+\frac{\lambda}{u})t}\,dt$$

$$h(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\mathrm{e}^{-\mu x+(\mu+\frac{\lambda}{u})\min(0,x)} = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{-\mu x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\,\mathrm{e}^{\lambda x/u} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

3. On a $[R \leqslant 0] = ([X < 0] \cap [Y \geqslant 0]) \cup ([X > 0] \cap [Y \leqslant 0])$.
Les événements en présence étant quasi-impossibles, l'événement $[R \leqslant 0]$ est donc de probabilité nulle. Donc pour tout $u \leqslant 0, P(R \leqslant u) = 0$.
Pour tout réel $u > 0, P(R \leqslant u) = P(Y - uX \leqslant 0)$ et en conséquence :

$$F_R(u) = P(S \leqslant 0) = \int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu u}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\lambda t/u}\,dt = \frac{\mu u}{\lambda+\mu u}$$

Comme F_R est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, une densité de R est la fonction

$$\rho : u \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu u)^2} & \text{si } u \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comme $u.\rho(u) \underset{(+\infty)}{\sim} \dfrac{\lambda}{\mu u}$, la variable aléatoire R n'admet pas d'espérance.

4. On montre comme précédemment que les événements $(U \leqslant 0)$ et $(U \geqslant 1)$ sont de probabilité nulle. Puis, pour $u \in]0,1[$:

$$P(U \leqslant u) = P((1-u)Y \leqslant uX) = F_R\big(\frac{u}{1-u}\big) = \frac{\mu u}{\lambda(1-u)+\mu u}.$$

Dans le cas particulier où $\lambda = \mu$, la variable U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, et admet pour espérance $\frac{1}{2}$ et pour variance $\frac{1}{12}$.

Exercice 3.2.

Une puce se déplace dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé (O, e_1, e_2, e_3).

À l'instant 0, elle se trouve en l'origine $O = (0,0,0)$; à tout instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle effectue un déplacement $D_n = (D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3})$.
On suppose que les trois variables aléatoires $D_{n,1}, D_{n,2}, D_{n,3}$ sont indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On suppose de plus que tous les différents déplacements sont indépendants.

Pour $i \in [\![1,3]\!]$, on note $S_{n,i} = \sum\limits_{k=1}^{n} D_{k,i}$ et $S_n = (S_{n,1}, S_{n,2}, S_{n,3})$.

On étudie l'événement $A_n = [S_n \in [-1,1]^3]$.

1. a) Déterminer la loi de $S_{n,1}$.

b) Exprimer la probabilité $P([|S_{n,1}| \leqslant 1])$ à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite, et en déduire un équivalent de $P([|S_{n,1}| \leqslant 1])$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Déterminer un équivalent de $P(A_n)$ lorsque n tend vers l'infini.

2. a) Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a : $P\big(\bigcup\limits_{k=n}^{n+m} A_k\big) \leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+m} P(A_k)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P\big(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k\big)$.

c) Déterminer $P\big(\bigcap\limits_{n \geq 1} \big(\bigcup\limits_{k \geq n} A_k\big)\big)$.

3. L'événement A_n se réalisera-t-il un nombre fini de fois ou une infinité de fois presque sûrement ?

Solution :

1. a) La variable aléatoire $S_{n,1}$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Aussi $S_{n,1}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,n)$.

b) On remarque que $\dfrac{S_{n,1}}{\sqrt{n}}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On a donc :

$$P(-1 \leqslant S_{n,1} \leqslant 1) = P\Big(\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_{n,1}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\Big) = 2\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - 1$$

Or $\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(0) + o(x) = \dfrac{1}{2} + x\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} + o(x)$ entraîne que, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$P(-1 \leqslant S_{n,1} \leqslant 1) = 2\Big(\Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big) - \frac{1}{2}\Big) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

c) Par indépendance :

$$P(A_n) = P([|S_{n,1}| \leqslant 1] \cap [|S_{n,2}| \leqslant 1] \cap [|S_{n,3}| \leqslant 1]) \sim \frac{C}{n^{3/2}}$$

Avec : $C = (2/\pi)^{3/2}$.

On remarque que la série $\sum_n P(A_n)$ est convergente.

2. a) Démonstration par récurrence sur m :

- pour $m = 1$:

$P(A_n \cup A_{n+1}) = P(A_n) + P(A_{n+1}) - P(A_n \cap A_{n+1}) \leqslant P(A_n) + P(A_{n+1})$.

- Supposons la relation vérifiée pour un certain rang m. Alors :

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k \cup A_{n+m+1}\Big) &\leqslant P\Big(\bigcup_{k=n}^{n+m} A_k\Big) + P(A_{n+m+1}) \\ &\leqslant \sum_{k=n}^{n+m} P(A_k) + P(A_{n+m+1}) \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

b) La série $\sum_n P(A_n)$ étant convergente, la question précédente montre que $\lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\Big) = 0$, par majoration par le reste d'une série numérique convergente.

c) La suite d'événements $\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big)_n$ est décroissante pour l'inclusion. Le théorème de la limite monotone montre que :

$$P\Big(\bigcap_{n\geq 1}\Big(\bigcup_{k\geq n} A_k\Big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0$$

3. La probabilité précédente est nulle. Avec la probabilité 1, la puce ne pourra se trouver qu'un nombre fini de fois dans le cube $[-1, 1]^3$.

Exercice 3.3.

Dans cet exercice, b est un réel strictement positif.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de fonction de répartition F définie pour tout x réel par :

$$F(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-bx}}$$

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire X_1. La variable aléatoire X_1 admet-elle une espérance ?

2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle strictement croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \sup(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Déterminer la loi de $M_n - a_n$

3. Etudier la convergence en loi de la suite $(M_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans chacun des cas suivants :

a) $a_n = \dfrac{\ln n}{b}$.

b) $a_n = c\ln n$, avec c réel positif.

4. Écrire un programme Pascal qui simule la loi limite obtenue en 3. a).

Solution :

1. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc prendre pour densite f_X de X la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_X(x) = \frac{b\mathrm{e}^{-bx}}{(1+\mathrm{e}^{-bx})^2}$$

La fonction $h : x \mapsto xf_X(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Comme $b > 0$:

- au voisinage de $+\infty$, $h(x) \sim x\mathrm{e}^{-bx} = o(1/x^2)$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge.
- au voisinage de $-\infty$, $h(x) \sim \dfrac{x\mathrm{e}^{-bx}}{(\mathrm{e}^{-bx})^2} = x\mathrm{e}^{bx} = o(1/x^2)$: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(x)dx$ converge.

Donc X_1 admet une espérance.

2. On sait calculer la loi du supremum de variables aléatoires indépendantes. Ainsi, pour x réel :

$$P(M_n - a_n \leqslant x) = P(M_n \leqslant x + a_n) = (F_X(x+a_n))^n = \frac{1}{(1+\mathrm{e}^{-b(x+a_n)})^n}$$

3. a) On suppose que $a_n = \dfrac{\ln n}{b}$. Ainsi :

$$\mathrm{e}^{-b(x+a_n)} = \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{n} \text{ et } \big(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}/n}\big)^n = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{\mathrm{e}^{-bx}}{n})}. \text{ D'où}$$

$$\lim_{n\to+\infty} P(M_n - a_,x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-bx}}.$$

Cette dernière fonction vérifie les propriétés d'une fonction de répartition (limites en $\pm\infty$, croissance) et il s'agit même d'une fonction de répartition d'une variable à densité.

b) On suppose que $a_n = c\ln n$. On a alors :

$$\mathrm{e}^{-b(x+a_n)} = \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{n^{bc}} \text{ et } \left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc}}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc})}$$

Enfin, en supposant $c \neq \dfrac{1}{b}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n\ln(1+\mathrm{e}^{-bx}/n^{bc})} = \begin{cases} 0 & \text{si } bc < 1 \\ 1 & \text{si } bc > 1 \end{cases}.$$

La fonction constante nulle et la fonction constante égale à 1 ne sont pas de fonctions de répartition : il n'y a pas convergence en loi.

4. On utilise la méthode de la fonction de répartition : si X est une variable aléatoire continue de fonction de répartition F, alors $F(X)$ suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ (à vérifier rapidement). La loi de X est donc $F^{-1}(\mathcal{U})$.

Or

$$y = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-bx}} \Longleftrightarrow x = -\frac{\ln(-\ln(y))}{b}$$

On peut donc proposer :

```
function EscpEurope(b : real) : real
Begin
randomize ;
EscpEurope := -ln(-ln(random))/b
End ;
```

Exercice 3.4.

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes et identiquement distribuées) de densité

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X_0.

2. Soit a un réel de $]0,1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose, sous réserve d'existence :

$$S_a(\omega) = \min\{i \in \mathbb{N} \ / \ X_i(\omega) \geqslant \sqrt{a}\}$$

Montrer que S_a est une variable aléatoire. Donner sa loi.

3. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $0 < a_n < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Déterminer la convergence en loi de la suite $((1 - a_n)S_{a_n})_n$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Déterminer :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \frac{2n}{3} + \varepsilon n\big)$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} P\big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \frac{2n}{3} + \sqrt{n}\big)$.

5. Soit α un réel. On pose $R_n = \inf(n^\alpha X_0, n^\alpha X_1, \dots, n^\alpha X_{n-1})$. Étudier en fonction de α la convergence en loi de la suite (R_n).

Solution :

1. Un calcul immédiat donne :

$$F_{X_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}, \quad E(X_0) = \frac{2}{3}, \quad V(X_0) = \frac{1}{18}$$

2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\{\omega / S_a(\omega) = i\} = \Big[\bigcap_{j=0}^{i-1} \{\omega / X_j(\omega) \leqslant \sqrt{a}\}\Big] \cap \{\omega / X_i(\omega) > \sqrt{a}\}$$

(Si $i = 0$, alors le premier terme de l'expression disparaît)

Or, pour tous i et j, les ensembles ci-dessus sont éléments de la tribu $\mathcal{A}$, ce qui montre que pour tout $i \in \mathbb{N}$: $\{\omega / S_a(\omega) = i\} \in \mathcal{A}$.

D'après ce que l'on vient de montrer, pour tout $i \in \mathbb{N}$ (même pour $i = 0$) :

$$P(S_a = i) = [F_X(\sqrt{a})]^i (1 - F_X(\sqrt{a})) = a^i(1-a)$$

et $\sum_{i=0}^{\infty} a^i(1-a) = 1$, ce qui prouve que S_n est définie presque partout, ce qui lui donne le statut de variable aléatoire.

3. Déterminons la loi de $(1-a_n)S_{a_n}$. Notons pour cela $\alpha_n = \lfloor \frac{x}{1-a_n} \rfloor$:

$$P((1-a_n)S_{a_n} \leqslant x) = P(S_{a_n} \leqslant \frac{x}{1-a_n}) = P(S_{a_n} \leqslant \alpha_n) = \sum_{k=0}^{\alpha_n} a_n^k (1-a_n)$$
$$= 1 - a_n^{\alpha_n}$$

Or $\lim_{n\to\infty} (1 - a_n^{\alpha_n}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \mathrm{e}^{\alpha_n \ln(a_n)} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

(Pour le démontrer on utilise le fait que, lorsque n tend vers l'infini : $\ln(a_n) \sim 1 - a_n$ et $\alpha_n \sim \frac{x}{1-a_n}$.)

Ainsi $((1-a_n)S_{a_n})_n$ converge en loi vers une variable suivant la loi $\mathcal{E}(1)$.

4. a) On remarque que $E\big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i\big) = \frac{2n}{3}$. Ainsi, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff, et en posant $\Sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i$, on a :

$$P\Big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \geqslant \frac{2n}{3} + \varepsilon n\Big) = P\Big(\frac{\Sigma_n - E(\Sigma_n)}{n} \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

b) En utilisant le théorème de la limite centrée, comme $V(\Sigma_n) = \frac{n}{18}$:

$$P\Big(\sum_{i=0}^{n-1} X_i \leqslant \frac{2n}{3} + \sqrt{n}\Big) = P\Big(\frac{\Sigma_n - E(\Sigma_n)}{\sqrt{n}} \leqslant 1\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Big(\frac{\pi}{9}\Big)^{-1/2} \int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^{-9t^2} dt = \Phi(3\sqrt{2})$$

5. Calculons la loi de R_n :

$$P(R_n > x) = (P(n^\alpha X_0 > x))^n = \Big(P\big(X_0 > \frac{x}{n^\alpha}\big)\Big)^n = \Big(1 - F_{X_0}\big(\frac{x}{n^\alpha}\big)\Big)^n$$

Donc :

$$F_{R_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \big(1 - \frac{x^2}{x^{2\alpha}}\big)^n & \text{si } x \in [0, n^\alpha] \\ 1 & \text{si } x > n^\alpha \end{cases}$$

Ainsi :

- si $\alpha \in]0, 1/2[$, $\lim_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,
- si $\alpha = 1/2$, $\lim_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$,

• si $\alpha > 1/2$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{R_n}(x) = 0$, qui n'est pas une fonction de répartition, il n'y a donc pas convergence en loi !

Exercice 3.5.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes la loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.

On pose $q = 1 - p$ et on note α un réel strictement positif et différent de 1.

L'objet de cet exercice est de calculer la probabilité que la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n}$ soit convergente, c'est-à-dire de calculer la probabilité de l'événement :

$$A = \Big\{\omega \in \Omega \ / \ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge}\Big\}$$

1. Calculer la probabilité de A lorsque $\alpha > 1$.

On suppose désormais que $\alpha \in\,]0, 1[$; on pose $\beta = 1 - \alpha$.

2. a) Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$P\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\Big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

b) Étudier la convergence de la série de terme général $q^{n^\beta-1}$.

c) En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} P\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\Big)$.

d) En déduire que $P\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} [X_n > n^\beta]\Big)\Big) = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on note :

$A_\beta = \{\omega \in \Omega \ / \ X_n(\omega) > n^\beta$ pour un nombre fini de valeurs de n uniquement$\}$.

3. a) Montrer que $A_\beta = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Big(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty} [X_n \leqslant n^\beta]\Big)$.

b) Montrer que $P(A_\beta) = 1$.

4. a) Montrer que pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.

b) En déduire la probabilité de l'événement A.

Solution :

1. Comme, pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $X_n(\omega) \geqslant 1$, il vient $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ et la série converge toujours : $P(A) = 1$.

2. a) Soit $k \in \mathbb{N}$; la probabilité d'une réunion étant majorée par la somme des probabilités constituantes :

$$P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} P(X_n > n^\beta) = \sum_{n=k}^{\infty} q^{\lfloor n^\beta \rfloor} \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta - 1}$$

La dernière inégalité étant justifiée par le fait que $n^\beta - 1\lfloor n^\beta \rfloor \implies q^{n^\beta-1} \geqslant q^{\lfloor n^\beta \rfloor}$ et l'égalité centrale par propriété d'une loi géométrique.

b) La série $\sum q^{n^\beta - 1}$ converge car

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 q^{n^\beta-1} = \lim_{n\to\infty} \exp((n^\beta - 1)\ln q + 2\ln n) = 0 \text{ (car } \ln q < 0).$$

c) Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{n=k}^{\infty} q^{n^\beta-1} = 0$, comme reste de série convergente, et

$$\lim_{k\to+\infty} P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big) = 0.$$

d) Par inclusion, il vient, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big)\big) \leqslant P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big)$$

Il reste à faire tendre k vers $+\infty$.

3. a) Dire que $\omega \in A_\beta$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ (dépendant de ω) tel que pour tout $n \geqslant k$, $X_n(\omega) \leqslant n^\beta$. Donc :

$$A_\beta = \big\{\omega \in \Omega \ / \ \exists\, k \in \mathbb{N}, \forall\, n \geqslant k : X_n(\omega) \leqslant n^\beta\big\}$$

et :

$$A_\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty}\big(\bigcap_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^\beta]\big)$$

b) Calculons la probabilité de l'événement complémentaire de A_β.

$$P(\overline{A_\beta}) = P\big(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}\big(\bigcap_{n=k}^{\infty}[X_n \leqslant n^\beta]\big)}\big) = P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\big(\bigcup_{n=k}^{\infty}[X_n > n^\beta]\big)\big) = 0 \text{ par la question 2. d)}$$

4. a) Soit $\omega \in A_\beta$. On a alors : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant k$, $\dfrac{X_n(\omega)}{n^\beta} \leqslant 1$.

Or :

$$\frac{X_n(\omega)}{n^\beta} \leqslant 1 \iff \frac{X_n(\omega)}{n^{1-\alpha}} \leqslant 1 \iff \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \geqslant \frac{1}{n}$$

Ainsi, pour tout $\omega \in A_\beta$, la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ est divergente.

b) La question précédente montre que

$$A_\beta \subset \big\{\omega \in \Omega / \sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ diverge}\big\} = \overline{A}.$$

Comme $P(A_\beta) = 1$, il vient que pour $\alpha \in \,]0,1[$, la probabilité de l'ensemble A est nulle et la série diverge presque sûrement.

Exercice 3.6.

On étudie dans cet exercice l'arrivée de clients à un guichet.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$, avec $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, on note $A(n, t_1, t_2)$, l'événement : «il est arrivé n clients entre les instants t_1 et t_2».

On fait les hypothèses suivantes :

• la probabilité de $A(n, t_1, t_2)$ ne dépend que de n et de $t = t_2 - t_1$; on la note $P_n(t)$. On suppose que $P_0(0) = 1$ et $P_n(0) = 0$ si $n \geqslant 1$.
• Pour tout couple (n, n') de $\mathbb{N}^2$ et tout triplet (t_1, t_2, t_3) de $(\mathbb{R}^+)^3$, avec $t_1 t_2 t_3$, les événements $A(n, t_1, t_2)$ et $A(n', t_2, t_3)$ sont indépendants.
• $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{1 - P_0(t) - P_1(t)}{P_1(t)} = 0$.
• Pour tout n de $\mathbb{N}$, $t \mapsto P_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que P_0 est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. a) Montrer que $\forall (s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2, P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t)$ et en déduire par l'absurde que $P_0(1) \neq 0$.

b) Montrer qu'il existe a réel strictement positif tel que pour $t \geqslant 0$, on a $P_0(t) = \mathrm{e}^{-at}$.

3. Montrer que $P_1'(0) = a$ et que $P_n'(0) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

4. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on considère l'événement

$$E_k = A(n-k, 0, t) \cap A(k, t, t+s).$$

a) Quel est l'événement $E_0 \cup E_1 \cup \cdots \cup E_n$?

b) Montrer que $P_n(t+s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t) P_k(s)$.

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $P_n'(t) = a(P_{n-1}(t) - P_n(t))$.

c) Pour $t \geqslant 0$, on pose $Q_n(t) = \mathrm{e}^{at} P_n(t)$. Trouver une relation entre Q_n' et Q_{n-1}. En déduire $Q_n(t)$ puis $P_n(t)$ pour $n \geqslant 1$.

5. Soit X_t la variable aléatoire égale au nombre de clients arrivant au guichet pendant un intervalle de temps d'amplitude t. Quelle est la loi de X_t ?

Solution :

1. Pour u et t positifs, $P_0(t) = P(A(0, u, u+t))$.
Soit $0 \leqslant t \leqslant s$. S'il n'arrive aucun client entre les instants 0 et s, il n'est arrivé aucun client entre les instants 0 et t ; donc :

$$A(0,0,s) \subset A(0,0,t) \implies P(A(0,0,s)) \leqslant P(A(0,0,t)).$$

Ainsi P_0 est-elle décroissante.

2. a) Pour s, t positifs, on a $P_0(s+t) = P(A(0, 0, s+t))$.

Or $A(0,0,s+t) = A(0,0,s) \cap A(0,s,t+s)$ qui sont deux événements indépendants. Ainsi, par les hypothèses, $P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t)$.

Supposons que $P_0(1) = 0$. Par le résultat précédent, $P_0(1/2)^2 = P_0(1) = 0$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 1, P_0(1/2^n) = 0$. Par continuité de P_0, il vient $P_0(0) = 0$ en contradiction avec $P_0(0) = 1$.

b) La fonction dérivable P_0 vérifie, pour tous s, t positifs : $P_0(s+t) = P_0(s)P_0(t)$. En dérivant par rapport à t, il vient :
$P_0'(s+t) = P_0(s)P_0'(t)$ et pour $t = 0$, $P_0'(s) = P_0(s)P_0'(0)$.

Notons $b = P_0'(0)$; la résolution de l'équation différentielle donne $P_0(s) = C\mathrm{e}^{bs}$, pour tout $s \geqslant 0$. Or $P_0(0) = 1 = C$. Donc $P_0(t) = \mathrm{e}^{bt}$, pour tout $t \geqslant 0$. la décroissance de P_0 entraîne que $b < 0$ et $a = -b > 0$.

3. Par définition $P_1'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P_1(t) - P_1(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{P_1(t)}{t}$. Or

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \mathrm{e}^{-at} - P_1(t)}{P_1(t)} = 0 \implies P_1(t) \underset{(0)}{\sim} 1 - \mathrm{e}^{-at}$$

Donc $P_1'(0) = a$.

Le nombre de clients arrivant au guichet entre 0 et t étant une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$. Donc, pour tout $t > 0$, $P_0(t) + P_1(t) + P_n(t) \leqslant 1$.

Ainsi : $0 \leqslant \dfrac{P_n(t)}{t} \leqslant \dfrac{P_0(t) + P_1(t) + P_n(t)}{t} = \dfrac{P_0(t) + P_1(t) + P_n(t)}{P_1(t)} \times \dfrac{P_1(t)}{t}$

dernière quantité qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

4. a) L'événement E_k est réalisé, signifie qu'il arrive $(n-k)$ clients entre 0 et t puis, k clients entre t et $t+s$. Aussi $\bigcup\limits_{k=0}^{n} E_k$ correspond à l'arrivée de n clients entre les instants 0 et $t+s$.

b) Par incompatibilité des événements $(E_k)_{0 \leq k \leq n}$, il vient

$$P_n(t+s) = P_n\big(\bigcup_{k=0}^{n} E_k\big) = \sum_{k=0}^{n} P(E_k) = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}(t)P_k(s)$$

On dérive par rapport à t : $P_n'(t+s) = \sum\limits_{k=0}^{n} P_{n-k}'(t)P_k(s)$, puis pour $t = 0$:

$$P_n'(s) = P_0'(0)P_n(s) + P_1'(0)P_{n-1}(s) = a(P_{n-1}(s) - P_n(s))$$

c) En dérivant Q_n, il vient $Q_n'(t) = aQ_{n-1}(t)$. Or $Q_0(t) = 1$ et $Q_1'(t) = a$ entraînent que $Q_1(t) = at$ (car $Q_1(0) = 0$). De même, $Q_2(t) = \dfrac{a^2t^2}{2}$ et par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, $Q_n(t) = \dfrac{a^nt^n}{n!}$ et $P_n(t) = \dfrac{a^nt^n}{n!}\mathrm{e}^{-at}$.

5. On a $X_t(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \geqslant 0$, $P(X_t = n) = P_n(t)$. Par la question précédente, X_t suit la loi de Poisson de paramètre at.

Exercice 3.7.

On note :

- $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes de limite nulle ;
- $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série de terme général u_n converge absolument ;
- $R_n(U)$ le reste d'ordre n de la série U de terme général u_n.

Ainsi $\forall\, n \in \mathbb{N}, R_n(U) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

1. Justifier qu'on peut définir une application $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{S}$ qui, à $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ associe la suite $\big(R_n(U)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que Φ est linéaire.

2. a) L'application Φ est-elle injective ?

b) Montrer que Φ n'est pas surjective (on pourra considérer une série convergente mais non absolument convergente).

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance. On admet qu'alors :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$$

3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, admettant une espérance strictement positive ; on note $u_n = P(X = n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Justifier que la suite $\dfrac{1}{E(X)}\Phi(U)$, notée $\Psi(U)$, définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. On notera Y une variable aléatoire suivant cette loi.

4. On suppose que la variable aléatoire X suit la loi G de paramètre $p \in]0, 1[$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$G = (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\ g_n = P(X = n) = p\, q^n \text{ où } q = 1 - p$$

Que peut-on dire de Y de loi $\Psi(G)$?

5. On suppose que Y est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = P(Y = n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \text{ ; on note alors } V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Déterminer deux réels a et b tels que $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{n+2}$.

b) Existe-t-il une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de probabilité U telle que Y soit de loi de probabilité $\Psi(U)$?

c) U est-elle unique ?

Solution :

1. La convergence absolue de la série prouve que les restes existent et forment une suite de limite nulle, et la linéarité de Φ est banale.

2. $\star$ $\Phi(U) = 0 \implies \forall\, n \geqslant 1, u_n = R_{n-1} - R_n = 0$, $\operatorname{Ker}\Phi$ est donc formé des suites nulles à partir du rang 1 et Φ n'est pas injective.

$\star$ Soit $\sum v_n$ une série semi-convergente (par exemple $v_n = (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$), on peut définir la suite de ses restes, qui appartient à $\mathcal{S}$, et s'il existait une suite (u_n) telle que la série $\sum u_n$ ait cette suite de restes, alors (u_n) et (v_n) coï ncideraient à partir du rang 1, donc (u_n) ne peut appartenir à $\mathcal{C}$ et Φ n'est pas surjective.

3. La série de terme général u_n est à termes positifs et est (absolument) convergente (de somme 1).

De plus, pour tout n, $R_n(U) = P(X > n) \geqslant 0$ et la somme de cette série vaut $E(X)$. Donc $\Psi(U)$ est bien une loi de probabilité.

4. Ici $R_n(X) = P(X > n) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} pq^k = q^{n+1}$ et

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) = \frac{q}{1-q} = \frac{q}{p}.$$

Donc $P(Y = n) = \dfrac{p}{q} R_n(X) = pq^n$: Y suit la même loi que X.

5. a) Facilement : $v_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$.

b) S'il existe X convenable d'espérance λ, on doit avoir :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n = R_{n-1}(U) - R_n(U) = \lambda(v_{n-1} - v_n) = \frac{2\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

Puis $u_0 = 1 - R_0(U) = 1 - \lambda v_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{2}$.

On peut donc prendre $\lambda = 2$ et alors X est même à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

c) λ peut prendre toute valeur de $]0, 2[$, il n'y a donc pas unicité.

Exercice 3.8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in\,]0, 1[$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $p_n = \prod\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1. a) Montrer que la suite $(p_n)_n$ est convergente et que sa limite ℓ appartient à $[0, 1[$.

b) Soit $k \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leqslant k$, alors $\ell = 0$.

Que peut-on dire de la suite $(p_n)_n$ si $(u_n)_n$ est décroissante ?

c) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ pour laquelle $\ell > 0$.

2. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ avec :

- X_0 est constante égale à 1,

• X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,

• pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=0 \text{ et } P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=u_{n+1}$$

a) Donner le paramètre de la loi de X_n et en déduire son espérance.

b) Les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$, sont-elles indépendantes ?

3. On suppose que $\ell = 0$.

a) Quelle est la probabilité de l'événement A défini par $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (X_n = 1)$?

b) On définit la variable aléatoire Y par :

$$\forall\, \omega \in \Omega, Y(\omega) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{N} / X_n(\omega) = 1\} & \text{s'il existe} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Comparer Y et $\sum\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. En déduire, si elle existe, l'espérance de Y.

Solution :

1. a) Si $p_n \neq 0$, on a $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$, donc on a toujours $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n$; la suite (u_n) est donc décroissante minorée : elle converge vers $\ell u_1 < 1$.

b) Si $u_n \leqslant k$ pour $n \geqslant N$, alors $u_n \leqslant k^{n-N} u_N \leqslant k^{n-N}$, qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $(u_n)_n$ est décroissante, alors $u_n \leqslant u_1 < 1$ pour $n \geqslant 1$ donc, par ce qui précède, $\ell = 0$.

c) On a $\ln p_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln u_k$. Il suffit donc de trouver une suite $(u_n)_n$ telle que la série de terme général $\ln u_n$ converge (avec $0 < u_n < 1$) et alors la limite de $p_n = \exp(\ln p_n)$ sera non nulle.

On peut proposer $u_n = \mathrm{e}^{-1/n^2}$, pour $n \geqslant 1$.

2. Montrons par récurrence que $P(X_n = 1) = p_n$. C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, puisque $u_0 = p_0 = 1$ et $u_1 = p_1$. Supposons le résultat démontré pour n et montrons-le pour $n + 1$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)P(X_n=1) \\ &\qquad + P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0)P(X_n=0) \\ &= u_{n+1}p_n + 0 = p_{n+1} \end{aligned}$$

On conclut par le principe de récurrence.

L'espérance de X_n vaut donc p_n.

b) Elles ne sont pas indépendantes ; en effet si $q > n > 0$,

$$P(X_q = 1)P(X_n = 1) = p_q p_n \neq P(X_q = 1 \cap X_n = 1) = P(X_q = 1) = p_q$$

3. a) On a $P(\bigcap_{k=0}^{n}(X_k = 1))P(X_n = 1) = p_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on conclut par le théorème de limite monotone.

b) $\star$ On vient de voir que la probabilité de l'événement $(Y = -1)$ est nulle.

On a donc quasi-certainement $Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$ (pour presque tous les ω la somme est en fait finie).

En effet, dire que $(Y = k)$ est réalisé, c'est dire que l'on réalise $(X_0 = 1)$, $\ldots$, $(X_k = 1)$ et enfin on réalise $(X_{k+1} = 0)$, $(X_{k+2} = 0)$, $\ldots$. L'événement $(X_0 = 1)$ est sûr et n'est pas à prendre en compte.

L'espérance de Y est donc, si elle existe, $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$.

Exercice 3.9.

Soit θ un paramètre strictement positif. Les élèves d'un établissement numérotés $1, 2, \ldots$ arrivent successivement à la cantine qui abrite un grand nombre de tables très grandes (ainsi tous les élèves pourraient se placer à une même table, ou pourraient tous occuper des tables différentes, $\ldots$).

Le premier élève s'assied à une table au hasard.
Pour $k \geqslant 1$, lorsque le $(k+1)^{\text{ème}}$ élève arrive, il choisit au hasard un des k élèves déjà attablés et s'assied à sa table avec la probabilité $\dfrac{k}{k+\theta}$ ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\dfrac{\theta}{k+\theta}$

Pour $n \geqslant 1$, on note T_n la variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, égale au nombre de tables occupées lorsque n élèves ont pris place et pour $i \in [\![1, n]\!], p_{n,i} = P(T_n = i)$.

1. a) Montrer que $p_{n+1,1} = \dfrac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)}$. Calculer également $p_{n+1,n+1}$.

b) Déterminer une relation de récurrence entre $p_{n+1,i}, p_{n,i}$ et $p_{n,i-1}$, pour $i \in [\![2, n]\!]$.

2. a) On pose $Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i}x^i$ et $R_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$. Montrer que

$$Q_n(x) = \frac{R_n(\theta x)}{R_n(\theta)}$$

b) En déduire que l'espérance de T_n est donnée par :

$$E(T_n) = \theta \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\theta + i}$$

On admet que la variance de T_n est donnée par : $V(T_n) = \theta \sum_{i=0}^{n-1} \dfrac{i}{(\theta+i)^2}$

3. a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta+x}\,dx \leqslant E(T_n) \leqslant 1+\int_0^{n-1}\frac{\theta}{\theta+x}\,dx$$

En déduire un équivalent simple de $E(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que $V(T_n) \leqslant E(T_n)$. En déduire que $\left(\frac{T_n}{\ln n}\right)_n$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à θ.

Solution :

1. a) Le $(k+1)^{\text{ème}}$ élève s'assied à une table déjà occupée avec la probabilité $\dfrac{k}{k+\theta}$. Donc, par indépendance supposée des choix des différents élèves :

$$\begin{aligned}p_{n+1,1} = P(T_{n+1}=1) &= \frac{1}{1+\theta}\times\frac{2}{2+\theta}\times\cdots\times\frac{n}{n+\theta}\\ &= \frac{n!}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)}\end{aligned}$$

De la même façon :

$$\begin{aligned}p_{n+1,n+1} = P(T_{n+1}=n+1) &= \frac{\theta}{1+\theta}\times\frac{\theta}{2+\theta}\times\cdots\times\frac{\theta}{n+\theta}\\ &= \frac{\theta^n}{(1+\theta)(2+\theta)\cdots(n+\theta)}\end{aligned}$$

b) La famille $(T_n=i)_{1\leq i\leq n}$ forme un système complet d'événements. De plus, pour tout $k\notin\{i,i-1\}$, la probabilité conditionnelle $P(T_{n+1}=i/T_n=k)$ est nulle. Ainsi il reste pour $i\geqslant 2$:

$$\begin{aligned}p_{n+1,i} = P(T_{n+1}=i) = P(T_{n+1}=i/T_n=i)P(T_n=i)&\\ +P(T_{n+1}=i/T_n=i-1)P(T_n=i-1)&\end{aligned}$$

Soit :

$$p_{n+1,i} = \frac{n}{n+\theta}p_{n,i}+\frac{\theta}{n+\theta}p_{n,i-1}$$

2. a) On a : $Q_{n+1}(x)=\sum\limits_{i=1}^{n+1}p_{n+1,i}x^i = p_{n+1,1}x+\sum\limits_{i=2}^{n}p_{n+1,i}x^i+p_{n+1,n+1}x^{n+1}$.

Soit :

$$\begin{aligned}Q_{n+1}(x) &= \frac{n!}{(1+\theta)\dots(n+\theta)}x+\sum_2^n\Big[\frac{n}{n+\theta}p_{n,i}x^i+\frac{\theta}{n+\theta}p_{n,i-1}x^i\Big]\\ &\qquad +\frac{\theta^n}{(1+\theta)\dots(n+\theta)}x^{n+1}\\ &= \frac{n}{n+\theta}\Big[\frac{(n-1)!}{(1+\theta)\dots(n-1+\theta)}x+\sum_2^n p_{n,i}x^i\Big]\\ &\qquad +\frac{\theta}{n+\theta}\Big[\sum_2^n p_{n,i-1}x^i+\frac{\theta^{n-1}}{(1+\theta)\dots(n-1+\theta)}x^{n+1}\Big]\end{aligned}$$

Un changement d'indice dans la deuxième somme et la réintégration des termes extrêmes donnent alors :

$$Q_{n+1}(x)=\frac{n+\theta x}{n+\theta}\,Q_n(x)$$

Enfin, comme $Q_1(x) = x$, il vient $Q_n(x) = \dfrac{R_n(\theta x)}{R_n(\theta)}$.

b) On vérifie que $Q_n(1) = 1$, et on voit que $E(T_n) = Q_n'(1)$ (fonction génératrice). On a $Q_n'(x) = \dfrac{\theta}{R_n(\theta)} R_n'(\theta x)$, donc $E(T_n) = \theta \dfrac{R_n'(\theta)}{R_n(\theta)}$.

Or $\dfrac{R_n'(x)}{R_n(x)} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{1}{x+i}$ (dérivée logarithmique), d'où :

$$E(T_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta + i}$$

3. a) La fonction $x \mapsto \dfrac{\theta}{\theta + x}$ est monotone décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi :

$$\frac{\theta}{\theta + i} \leqslant \int_{i-1}^{i} \frac{\theta}{\theta + x}\, dx \leqslant \frac{\theta}{\theta + i - 1}$$

Par la procédure de sommation habituelle :

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta + x} dx \leqslant E(T_n) \leqslant 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta + x} dx$$

Soit : $\theta \ln(n + \theta) - \theta \ln \theta E(T_n) \theta \ln(n - 1 + \theta) - \theta \ln \theta$

On en déduit, par encadrement que $E(T_n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} \theta \ln n$.

b) Comme $0 < \dfrac{i}{\theta + i} < 1$, il vient $V(T_n) \leqslant E(T_n)$. Par l'inégalité de Bienaymé–Tchebicheff, pour $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{T_n}{\ln n} - \theta\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(T_n)}{(\varepsilon \ln n)^2} \leqslant \frac{\theta}{\varepsilon^2 \ln n}$$

Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et $\left(\dfrac{T_n}{\ln n}\right)$ converge vers θ.

Exercice 3.10.

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A une matrice symétrique réelle d'ordre n. On rappelle que A est positive ($A \in S_n^+(\mathbb{R})$) si pour toute matrice $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : ${}^tUAU \geqslant 0$.

Dans cet exercice on confond tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice **ligne** canoniquement associée à ce vecteur.

Si $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ sont des variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé, toutes d'espérance nulle, et admettant toutes un moment d'ordre 2, on pose :

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \text{ et } Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$$

et on appelle matrice de covariance du couple de variables aléatoires vectorielles X et Y, la matrice notée $\Sigma_{X,Y}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme d'indice de ligne i et d'indice de colonne j est $\text{Cov}(X_i, Y_j)$. La matrice $\Sigma_{X,X}$ sera notée plus simplement Σ_X.

1. a) Montrer que $\Sigma_{X,Y} = E({}^tXY)$, où pour toute matrice aléatoire $M = (m_{i,j})$ dont les coefficients admettent une espérance, $E(M)$ est la matrice de terme générique l'espérance $E(m_{i,j})$.

b) Montrer que si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixées, et si X, Y sont deux vecteurs aléatoires définis comme dans le préambule, alors :

$$\Sigma_{X^tA, YB} = A\Sigma_{X,Y}B$$

c) Montrer que pour tout vecteur aléatoire $X = (X_1, \ldots, X_n)$, formé de variables réduites ayant un moment d'ordre 2, la matrice Σ_X est symétrique réelle, positive.

2. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe une matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

3. a) Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire formé de n variables aléatoires indépendantes, centrées réduites. Quelle est la matrice Σ_X ?

b) Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. En utilisant les questions précédentes, montrer qu'il existe un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ tel que $A = \Sigma_Y$.

4. Soit $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ deux matrices symétriques réelles positives d'ordre n. On pose $C = (c_{i,j})$, avec pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$: $c_{i,j} = a_{i,j}b_{i,j}$.

On admet que l'on peut trouver deux vecteurs aléatoires X et Y **indépendants**, tels que $A = \Sigma_X$ et $B = \Sigma_Y$.

Montrer que C est une matrice symétrique réelle positive.

Solution :

1. a) Il suffit de faire le calcul : les matrices X et Y étant des matrices ligne, ${}^tXY$ est une matrice carrée d'ordre n, dont le terme d'indice (i,j) est X_iY_j.

Ainsi $E({}^tXY) = (E(X_iY_j))_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.
Or les variables étant centrées :

$$\text{Cov}(X_i, Y_j) = E(X_iY_j) - E(X_i)E(Y_j) = E(X_iY_j).$$

On a donc bien :

$$\Sigma_{X,Y} = E({}^tXY)$$

b) $\Sigma_{X^tA, YB} = E({}^t(X^tA)(YB)) = E(A({}^tXY)B)$

Les matrices A et B étant fixées, il suffit de revenir à la formule du produit matriciel, en notant $M = {}^tXY$ (qui est une matrice carrée) et d'appliquer la linéarité de l'opérateur espérance, pour obtenir $E(AMB) = AE(M)B$; et donc :

$$\Sigma_{X^tA, YB} = AE({}^tXY)B = A\Sigma_{X,Y}B$$

c) Soit $U = {}^t\begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} {}^tU\Sigma_X U &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \operatorname{Cov}(X_i, X_j) u_j = \operatorname{Cov}\big(\sum_{i=1}^n u_i X_i, \sum_{j=1}^n u_j X_j\big) \\ &= V\big(\sum_{i=1}^n u_i X_i\big) \geqslant 0 \end{aligned}$$

2. La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée ; elle est positive : ses valeurs propres sont positives ou nulles. Ainsi, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ positifs ou nuls et une matrice P orthogonale telle que $A = PD^tP$, où $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Soit $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ et $B = P\Delta^t P$.

Cette dernière matrice est symétrique réelle, positive (ses valeurs propres sont positives) et $B^2 = A$.

3. a) Les variables aléatoires étant indépendantes et réduites, les variances valent 1 et les autres covariances sont nulles : $\Sigma_X = I_n$.

b) X ayant les propriétes de la question a), posons $Y = XB$, on a :

$$\Sigma_Y = \Sigma_{XB} = E(B^t XXB) = BE({}^tXX)B = B^2 = A.$$

4. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $Y = (Y_i, \ldots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires indépendants centrés tels que $A = \Sigma_X$ et $B = \Sigma_Y$.

Soit $Z = (Z_1, \ldots, Z_n) = (X_1Y_1, \ldots, X_nY_n)$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(Z_i, Z_j) &= E(X_iY_iX_jY_j) = E(X_iX_jY_iY_j) = E(X_iX_j)E(Y_iY_j) \\ &= \operatorname{Cov}(X_i, X_j)\operatorname{Cov}(Y_i, Y_j) = a_{i,j}b_{i,j} = c_{i,j} \end{aligned}$$

La matrice C est la matrice Σ_Z donc est symétrique positive.

Exercice 3.11.

Soit α un réel strictement positif et $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose de plus que, pour tout $i \geqslant 1$, la variable Y_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\alpha$.

Pour $n \geqslant 1$, on pose $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ et on note g_n la densité de Z_n nulle sur $\mathbb{R}_-$ et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. a) Rappeler l'expression de g_1 et calculer g_2.

b) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a : $g_n(x) = n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha x}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x})^{n-1}$.

c) Calculer l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et en donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini (on rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$).

d) Exprimer la variance $V(Z_n)$ de Z_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

2. a) Calculer la fonction de répartition G_n de Z_n.

b) On définit $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de U_n.

c) Étudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$. Quelle est la limite en loi de la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(U_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(U_n)$.

Solution :

1. a) $\star$ Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$, avec les conditions imposées par l'énoncé :

$$g_1 \text{ est nulle sur } \mathbb{R}^- \text{ et pour } x > 0, g_1(x) = \alpha e^{-\alpha x}.$$

Par convolution (Y_1 et Y_2 sont indépendantes et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(2\alpha)$), on a $g_2(x) = 0$ pour $x0$ et pour tout $x > 0$:

$$g_2(x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} \times 2\alpha e^{-2\alpha(x-t)}\,dt = 2\alpha^2 e^{-2\alpha x}\int_0^x e^{\alpha t}\,dt = 2\alpha e^{-2\alpha x}(e^{\alpha x}-1)$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$x > 0 \implies g_2(x) = 2\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})$$

b) On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ est traité par la question a). Supposons alors le résultat vrai au rang n.

Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_{n+1}$ on obtient par convolution (Z_n et Y_{n+1} sont indépendantes), pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^x n\alpha e^{-\alpha y}(1-e^{-\alpha y})^{n-1}(n+1)\alpha e^{-(n+1)\alpha(x-y)}\,dy \\ &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x}\int_0^x e^{-\alpha y}(1-e^{-\alpha y})^{n-1}e^{(n+1)\alpha y}\,dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x}\int_0^x e^{\alpha y}(e^{\alpha y}-1)^{n-1}\,dy \\ &= n(n+1)\alpha^2 e^{-(n+1)\alpha x}\left[\frac{1}{n\alpha}(e^{\alpha y}-1)^n\right]_0^x = (n+1)\alpha e^{-(n+1)\alpha x}(e^{\alpha x}-1)^n \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit aussi :

$$x > 0 \implies g_{n+1}(x) = (n+1)\alpha e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^n,$$

ce qui conclut la preuve.

c) Grâce à la linéarité de l'espérance on $E(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^n E(Y_k) = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{\alpha k}$.

Par ailleurs, comme $\sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{k} \underset{(\infty)}{\sim} \ln n$, on obtient : $E(Z_n) \underset{(\infty)}{\sim} \dfrac{1}{\alpha}\ln n$

d) Comme les Y_k sont indépendantes, on a $V(Z_n) = \sum\limits_{k=1}^n V(Y_k) = \sum\limits_{k=1}^n \dfrac{1}{\alpha^2 k^2}$.

Par ailleurs, on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente , donc on en déduit que la suite $(V(Z_n))_n$ admet une limite.

2. a) Pour $x0$, on a $G_n(x) = 0$ et pour $x > 0$

$$G_n(x) = \int_0^x n\alpha \mathrm{e}^{-\alpha y}(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})^{n-1}\,dy = \Big[(1-\mathrm{e}^{-\alpha y})^n\Big]_0^x = (1-\mathrm{e}^{-\alpha x})^n$$

b) $U_n = \dfrac{Z_n}{n}$ est encore à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $H_n(x) = 0$ pour tout $x0$. De plus pour tout $x > 0$ on a :

$$H_n(x) = P(Z_n nx) = G_n(nx) = (1-\mathrm{e}^{-\alpha nx})^n$$

c) $\star$ Pour $x \leqslant 0$, on a $H_n(x) = 0$ pour tout n, donc $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 0$.

$\star$ Pour $x > 0$, écrivons : $\ln H_n(x) = n\ln(1-\mathrm{e}^{-\alpha nx}) \underset{(n\to\infty)}{\sim} -n\mathrm{e}^{-\alpha nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

On en déduit : $\forall\, x > 0, \lim_{n\to\infty} H_n(x) = 1$.
Par conséquent, la fonction H_n converge en tout point de $\mathbb{R}^*$ vers la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0 (dont 0 est le seul point de discontinuité). On en déduit que la suite de variables aléatoires $(U_n)_n$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

d) On a $E(U_n) = E(Z_n)/n \sim \dfrac{\ln n}{n\alpha}$ et $V(U_n) = V(Z_n)/n^2$, donc d'après les questions précédentes, on conclut que ces expressions sont de limite nulle.

Exercice 3.12.

Dans tout l'exercice $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $[0,1]$, qui sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. On note pour n entier naturel non nul, f_n une densité de S_n et F_n sa fonction de répartition.

a) Indiquer une relation entre f_{n+1} et f_n.

b) En déduire l'expression de $F_n(x)$ pour $x \in [0,1]$.

c) Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier k tel que F_n soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

2. Si $\omega \in \Omega$ on pose $N(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \,/\, S_n(\omega) > 1\}$, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n(\omega) > 1$ et sinon, on pose $N(\omega) = 0$.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire N.

b) Montrer que N possède une espérance et une variance et les calculer.

3. Donner la valeur de $P\big(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n \geqslant n-1)\big)$.

Solution :

1. a) On a $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et X_{n+1} est indépendante de S_n (car S_n ne dépend que de $X_1, \dots, X_n$). Une densité f_{n+1} de S_{n+1} s'obtient donc par convolution de f_n et d'une densité de X_{n+1} :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathbf{1}_{[0,1]}(x-t)\, dt = \int_{x-1}^{x} f_n(t)\, dt$$

b) S_n prend ses valeurs entre 0 et n, donc pour $x \in [0,1]$, l'intervalle utile d'intégration est $[0,x]$:

$$\forall\, x \in [0,1], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt = F_n(x) - F_n(0) = F_n(x)$$

Ainsi, $\forall\, x \in [0,1], F_{n+1}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x f_{n+1}(t)\, dt = \int_0^x F_n(t)\, dt$

Comme $\forall\, x \in [0,1], F_1(x) = x$, une récurrence simple donne :

$$\forall\, x \in [0,1], \forall\, n \in \mathbb{N}^*, F_n(x) = \frac{x^n}{n!}$$

c) $\forall\, x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = F_n(x) - F_n(x-1)$.

Ainsi si F_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$, alors f_{n+1} aussi et F_{n+1}, qui est une primitive de f_{n+1}, est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme F_1 est seulement continue sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas dérivable en 0 et en 1), une récurrence simple montre que F_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$, sans être de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$.

2. a) Par construction, N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$\star$ L'événement $(N=0)$ est l'événement $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} (S_n 1)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N=0) P(S_n 1) = F_n(1) = \frac{1}{n!}$$

Donc $P(N=0) = 0$ et $(N=0)$ est donc quasi-impossible.

$\star$ Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}, P(N > n) = P(S_n 1) = \dfrac{1}{n!}$ (ceci vaut même pour $n = 0$) et donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, P(N=n) = P(N > n-1) - P(N > n) = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$$

b) Pour $n \geqslant 2$, $n.P(N=n) = n\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-2)!}$, qui est le terme général d'une série convergente. Donc N admet une espérance et comme $P(N=1) = 0$:

$$E(N) = \sum_{n=2}^{\infty} n.P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = \mathrm{e}$$

De même, les convergences étant évidentes :

$$E(N^2) = \sum_{n=2}^{\infty} n^2 P(N=n) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-2)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-2)!}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-3)!} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 3.\mathrm{e}$$

et :

$$V(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \mathrm{e}(3-\mathrm{e})$$

3. On a $(S_n \geqslant n-1) = (n - S_n 1)$, or $n - S_n = (1-X_1) + \cdots + (1-X_n)$ et chaque X_i ayant même loi que $(1-X_i)$, et les variables $(1-X_i)$ étant indépendantes, $(n-S_n)$ a même loi que S_n, donc $P(S_n \geqslant n-1) = \dfrac{1}{n!}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a donc $P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big)P(S_k \geqslant k-1) = \dfrac{1}{k!}$, soit :

$$P\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}(S_n \geqslant n-1)\big) = 0$$

Exercice 3.13.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, les boules numérotées de 1 à M sont rouges et les autres blanches..

1. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne ($1 \leqslant n \leqslant N$). Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer le nombre d'éléments de Ω, noté $\mathrm{card}(\Omega)$.

2. Désormais, on suppose que les résultats possibles sont équiprobables. On introduit les événements :

pour $k \in [\![1, n]\!]$, $A_k =$ « la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge ».

a) Calculer la probabilité $P(A_k)$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

b) Calculer, pour $k \neq \ell$ ($(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$), la probabilité $P(A_k \cap A_\ell)$.

3. On introduit les variables aléatoires Z_k, ($1 \leqslant k \leqslant n$), définies par $Z_k = 1$ si la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge, $Z_k = 0$ sinon.
On pose $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. On note p le rapport $\dfrac{M}{N}$.

a) Calculer la variance $V(S_n)$ en fonction de n et p.

b) Calculer la limite de $V(S_n)$, pour n fixé, quand M et N tendent vers l'infini de telle sorte que p tende vers un réel p_0 tel que $0 < p_0 < 1$.

Solution :

1. L'espace associé à cette expérience peut être décrit par

$$\Omega = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n); a_i \in \{1, \cdots, N\}, a_i \neq a_j \ \text{ si } i \neq j\}.$$

On a $\mathrm{card}(\Omega) = A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$.

2. L'espace Ω étant muni de la probabilité uniforme on a, pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$P(A) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \frac{\mathrm{card}(A)}{\mathrm{card}(\Omega)}.$$

a) On a $A_k = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega : \ a_k \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$, d'où :
$\mathrm{card}\, A_k = M(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)$, et donc $P(A_k) = M/N$.

Remarquons que la probabilité de l'événement A_k ne dépend pas de k et est égale à la proportion de boules rouges dans l'urne.

b) Pour $k \neq \ell$, on a :

$A_k \cap A_\ell = \{(a_1, \cdots, a_n) \in \Omega;\ a_k \in \{1, 2, \cdots, M\} \text{ et } a_\ell \in \{1, 2, \cdots, M\}\}$, d'où $\text{card}(A_k \cap A_l) = M(M-1)(N-2)(N-3)\cdots(N-n+1)$, et donc :

$$P(A_k \cap A_\ell) = M(M-1)/(N(N-1)).$$

3. a) Remarquons d'abord que $V(S_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} V(Z_k) + 2 \sum\limits_{1\leq k<\ell\leq n} \text{Cov}(Z_k, Z_\ell)$.

D'après a) et b) de la question 2. on a $P(Z_k = 1) = M/N = p$, et pour $k \neq \ell$

$$P(Z_k = 1, Z_\ell = 1) = \frac{M}{N} \times \frac{M-1}{N-1} = p\frac{Np-1}{N-1}.$$

Comme les Z_k sont à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a aussi

$$V(Z_k) = E(Z_k^2) - [E(Z_k)]^2 = p - p^2 = p(1-p),$$

et pour $k \neq \ell$

$$\text{Cov}(Z_k, Z_\ell) = E(Z_k Z_\ell) - E(Z_k)E(Z_\ell) = p\frac{Np-1}{N-1} - p^2.$$

Par suite

$$V(S_n) = np(1-p) + 2\frac{n(n-1)}{2}\big(p\frac{Np-1}{N-1} - p^2\big)$$

$$= np\big(1 - p + (n-1)\big(\frac{Np-1}{N-1} - p\big)\big) = np(1-p)\big(1 - \frac{n-1}{N-1}\big).$$

b) On a : $\lim\limits_{N\to\infty} V(S_n) \to np_0(1-p_0)$.

On reconnaît la variance d'une loi binomiale $B(n, p_0)$.

Exercice 3.14.

1. On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-t^2/2}\,dt$ converge et est égale à $\sqrt{2\pi}$.

Donner deux éléments de E.

2. Pour $f \in E$, on note $F_f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)e^{-t^2/2}$.

Montrer que F_f est une fonction de classe C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $J =]0, 1[$, puis montrer que $G_f = F_f^{-1}$ est aussi de classe C^1.

3. Montrer qu'il existe une unique fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(t)e^{-t^2/2}\,dt = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$$

et montrer que φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4. Pour $f \in E$, on définit g_f sur $\mathbb{R}$, par : $g_f(t) = \dfrac{f(t)e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$.

a) Montrer que g_f est une densité de probabilité.

b) On considère une variable aléatoire X_f de densité g_f. On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, paire et que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f'(t)\mathrm{e}^{-t^2/2} = 0$.
Montrer que X_f possède une espérance et que celle-ci est nulle.

Solution :

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. On connaît une densité de X qui prouve que la fonction constante égale à 1 convient.

Comme $V(X) = E(X^2) = 1$, on pourrait penser à prendre comme deuxième exemple la fonction $t \mapsto t^2$, mais cette fonction s'annule ... on peut alors prendre $t \mapsto \dfrac{1}{2}(t^2+1)$.

2. F_f est de classe C^1 et sa dérivée est $F_f'(t) = \dfrac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} > 0$, ce qui montre la croissance stricte de F_f.

De plus les limites respectives de F_f en $-\infty$ et $+\infty$ étant 0 et 1, le résultat en découle.

Par théorème d'inversion des fonctions de classe C^1 à dérivée jamais nulle, G_f est aussi de classe C^1.

3. Notons F_1 la fonction F_f pour f constante égale à 1. On a : $F_f(\varphi(x)) = F_1(x)$, donc φ est définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = G_f \circ F_1(x)$$

et, par composition φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Par une intégration par parties, mais que l'on peut d'abord faire sur un segment avant de passer à la limite, on obtient :

$$E(X_f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \Big[-\frac{f(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\Big]_{\to-\infty}^{\to+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'(t)\mathrm{e}^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$

Le crochet disparaît et l'intégrale résiduelle est convergente, de par les hypothèses faites sur f. L'imparité donne alors sa nullité.

$$E(X_f) = 0$$

Exercice 3.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Pour tout entier naturel k, on pose : $a_k = 1 - \big(1 - \dfrac{1}{2^k}\big)^{n-1}$.

Montrer que l'application qui à tout entier naturel k non nul associe le nombre $(a_{k-1} - a_k)$, définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. Montrer que la série de terme général a_k est convergente.

3. Soit X_n une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui prend la valeur k avec la probabilité $a_{k-1} - a_k$. Montrer que X_n admet une espérance et que :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

4. Pour p entier naturel non nul et t réel, on pose : $f_p(t) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-t})^p$.

a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_p(t)dt$ est convergente. On note sa valeur I_p.

b) Calculer la valeur de $I_{p+1} - I_p$, pour $p \geqslant 1$.

c) En déduire que : $I_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.

d) Montrer que : $\ln n I_{n-1} 1 + \ln(n-1)$.

e) Soit g_n la fonction définie sur $[0,\ +\infty[$ par : $g_n(u) = 1 - \big(1 - \dfrac{1}{2^u}\big)^{n-1}$

Montrer que pour tout entier naturel $q \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{q} a_k \leqslant \int_0^q g_n(u)du \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} a_k$$

En déduire que $E(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln 2} \leqslant E(X_n)$, et donner un équivalent simple au voisinage de l'infini de $E(X_n)$.

Solution :

1. Si on pose $p_k = a_{k-1} - a_k$, on a clairement $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 p_k 1$ et $\sum\limits_{k=1}^{m} p_k = a_0 - a_m = \big(1 - \dfrac{1}{2^m}\big)^{n-1}$, dont la limite est 1 quand m tend vers $+\infty$. Cela montre que la donnée des p_k définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

2. L'entier n est fixé, comme $(1-u)^{n-1} = 1 - (n-1)u + o(u)$ et $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, il vient :

$$a_k = (n-1)\frac{1}{2^k} + o\big(\frac{1}{2^k}\big) \sim (n-1)\big(\frac{1}{2}\big)^k$$

La convergence de la série en résulte.

3. Pour tout entier positif m, on a en développant et par télescopage partiel :

$$\sum_{k=1}^{m} k(a_{k-1} - a_k) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k - m a_m.$$

Comme $\lim\limits_{m\to+\infty} m a_m = 0$ et comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$ est convergente, on en déduit que X_n admet une espérance donnée par :

$$E(X_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k.$$

4. a) On a : $1-(1-\mathrm{e}^{-t})^p \underset{(t\to+\infty)}{\sim} p\mathrm{e}^{-t}$, et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge. Par application de la règle d'équivalence pour les fonctions positives, on en déduit que I_p est convergente.

b) $\displaystyle I_{p+1} - I_p = \int_0^{+\infty} [(1-\mathrm{e}^{-t})^p - (1-\mathrm{e}^{-t})^{p+1}]\,dt = \int_0^{+\infty} (1-\mathrm{e}^{-t})^p \mathrm{e}^{-t}\,dt$

On a donc, en abrégé :

$$I_{p+1} - I_p = \left[\frac{1}{p+1}(1-\mathrm{e}^{-t})^{p+1}\right]_0^{\to+\infty} = \frac{1}{p+1}$$

c) En convenant de poser $I_0 = 0$ (avec la même formule on a $f_0 = 0$), on déduit du résultat précédent que :

$$I_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (I_k - I_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

d) On a par décroissance de la fonction à intégrer :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$$

Ce qui donne :

$$\ln n \leqslant I_{n-1} \leqslant 1 + \ln(n-1).$$

e) On a, toujours par monotonie : $\displaystyle\forall k \in \mathbb{N}^*, a_k \leqslant \int_{k-1}^{k} g_n(u)\,du \leqslant a_{k-1}$,

d'où : $\displaystyle\forall q \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{q} a_k \leqslant \int_0^q g_n(u)\,du \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} a_k.$

Comme $2^u = \mathrm{e}^{u\ln 2}$, le changement de variable $t = u\ln 2$ donne

$$\int_0^q g_n(u)du = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\frac{q}{\ln 2}} f_{n-1}(t)dt.$$

D'où, par passage à la limite dans l'encadrement précédent, lorsque q tend vers l'infini :

$$E(X_n) - 1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{\ln 2} \leq E(X_n).$$

Le résultat d) donnant $I_{n-1} \sim \ln n$, finalement : $E(X_n) \sim \dfrac{\ln n}{\ln 2} = \log_2(n)$.

Exercice 3.16.

Soient s, N deux entiers naturels non nuls. Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. Un individu dispose de s euros (avec $s \in \mathbb{N}^*$) et souhaite acheter un bien qui en coûte N (avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $N \geqslant s$). Pour tenter de gagner de l'argent, il propose le jeu suivant à une personne très fortunée : il sort de sa poche une pièce de monnaie (non nécessairement équilibrée) et joue selon la règle suivante :

• si la pièce tombe sur face (ce qui se produit avec la probabilité p), il gagne 1 euro ;
• si la pièce tombe sur pile, il perd 1 euro.

Le jeu s'arrête soit lorsque l'individu est en possession des N euros lui permettant d'acheter le bien, soit lorsqu'il est ruiné (si au départ le joueur possède N euros, alors il ne prend même pas part au jeu) ...

Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on note p_k la probabilité de pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros. Le nombre N étant fixé, on admet que la variable aléatoire égale à la durée du jeu, lorsque l'individu possède au départ k euros, admet une espérance notée D_k.

1. a) Calculer p_0, p_N puis D_0, D_N.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.

c) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$.

2. Lorsque $p = q = 1/2$, calculer p_s, c'est-à-dire calculer la probabilité de pouvoir acheter le bien à l'issue du jeu avec un avoir initial de s euros.

3. On suppose dans cette question que $p = q = 1/2$. On cherche à calculer D_s, c'est-à-dire à calculer le temps moyen au bout duquel l'individu pourra acheter le bien ou sera ruiné, avec un avoir initial de s euros.

a) Montrer que la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $u_k = -k^2$ satisfait à la relation de récurrence :

$$\frac{1}{2}u_{k+1} - u_k + \frac{1}{2}u_{k-1} = -1$$

b) Montrer que la suite finie $(v_k)_{k \in [\![0,N]\!]}$ définie par $v_k = D_k - u_k$ satisfait une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

c) En déduire la valeur de D_s.

4. Calculer p_s, lorsque $p \neq q$.

Solution :

1. a) $p_0 = 0$, $p_N = 1$ et $D_0 = D_N = 0$.

b) Notons P_1 l'événement « le premier lancer amène pile » et F_1 l'événement contraire. Notons aussi G_k l'événement « l'individu finit par pouvoir acheter le bien avec un avoir initial de k euros ».
On a :

$$P(G_k) = P(G_k/P_1)P(P_1) + P(G_k/F_1)P(F_1)$$

Or si P_1 est réalisé, l'individu se trouve avoir **maintenant** une fortune **initiale** de $(k-1)$ euros et s'il obtient face, il a une nouvelle fortune initiale de $(k+1)$ euros. Comme $P(P_1) = q$ et $P(F_1) = p$, il vient, pour $k \in [\![1, N-1]\!]$:

$$p_k = p_{k-1} \times q + p_{k+1} \times p$$

c) En raisonnant comme précédemment, après un premier lancer de pièce :
$\rightarrow$ soit, c'est comme si on partait avec une fortune initiale de $(k+1)$ euros et on a déjà franchi une étape, ceci se produisant avec la probabilité p,
$\rightarrow$ soit, c'est comme si on partait avec une fortune initiale de $(k-1)$ euros et on a déjà franchi une étape, ceci se produisant avec la probabilité $q = 1-p$,
D'où la mise en équation :

$$D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$$

2. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence linéaire double de la question b) est :

$$pr^2 - r + q = 0, \text{ soit ici } (r-1)^2 = 0.$$

Ainsi, il existe deux réels α, β tels que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $p_k = (\alpha k + \beta)$.
(On pouvait aussi remarquer que la relation : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$ caractérise les suites arithmétiques.)
Avec $p_0 = 0$ et $p_N = 1$, il vient : $p_k = \dfrac{k}{N}$.

3. On suppose que le jeu est équilibré.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On vérifie que $-\dfrac{(k+1)^2}{2} + k^2 - \dfrac{(k-1)^2}{2} = -1$.

b) On a : $\begin{cases} \dfrac{1}{2}D_{k+1} + \dfrac{1}{2}D_{k-1} - D_k = -1 \\ \dfrac{1}{2}u_{k+1} + \dfrac{1}{2}u_{k-1} - u_k = -1 \end{cases}$

Par différence, en posant $v_k = D_k + k^2$: $v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1} = 0$

c) Ainsi, il existe deux constantes réelles α, β telles que $D_k = -k^2 + \alpha + \beta k$, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$.
Avec $D_0 = D_N = 0$, il vient $\alpha = 0$, $\beta N - N^2 = 0$, soit :

$$D_s = s(N-s)$$

(il est normal de trouver une expression symétrique par rapport à $N/2$)

4. L'équation caractéristique associée à la suite récurrente double est $pr^2 - r + q = 0$.
1 est racine évidente et l'autre vaut donc $\dfrac{q}{p}$
Il existe α et β tels que $\forall\, k \in [\![0, N]\!], p_k = \alpha\left(\dfrac{q}{p}\right)^k + \beta$. Les conditions initiales donnent :
$0 = \alpha + \beta$ et $1 = \alpha\left(\dfrac{q}{p}\right)^N + \beta$, soit $p_s = \dfrac{1 - (\frac{q}{p})^s}{1 - (\frac{q}{p})^N}$

Exercice 3.17.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $u_0 = 0$ et qui vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k) = P(X = 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k)$$

Que peut-on dire de la suite $(u_n)_n$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$?

2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

3. Soit $p \in]0, 1[$, on pose $q = 1 - p$ et on suppose que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p.

a) Expliciter la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.

b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ (on sera amené à distinguer les deux cas $p < \dfrac{1}{2}$ et $p \geqslant \dfrac{1}{2}$).

c) On suppose que l'on a $p > \dfrac{1}{2}$.

i) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$, calculer v_{n+1} en fonction de v_n et en déduire la valeur de u_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

ii) Montrer qu'il existe une variable aléatoire G à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ P(Gn) = u_n$$

Montrer que G admet une espérance.

Solution :

1. Supposons u_n défini avec $u_n \in [0, 1]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant (u_n)^k P(X = k) \leqslant P(X = k).$$

Comme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$, par théorème de comparaison, la série

$$\sum_k (u_n)^k P(X = k)$$

converge, donc u_{n+1} existe et l'encadrement précédent donne alors :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (u_n)^k P(X = k) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1,$$

donc $u_{n+1} \in [0, 1]$. Par récurrence, la suite existe et est à valeurs dans $[0, 1]$.

Si $X(\Omega) \in \mathbb{N}^*$, alors $P(X = 0) = 0$, et $u_0 = 0$ donne $u_1 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0^k P(X = k) = 0$, puis $u_2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 0^k P(X = k) = 0, \ldots u$ est la suite nulle.

2. On a $u_1 \geqslant u_0$ et si pour un certain rang n on a $u_n \geqslant u_{n-1}$, alors

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_n)^k P(X = k) \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} (u_{n-1})^k P(X = k) = u_n$$

Par le principe de récurrence, on en conclut que la suite u est croissante et comme elle est majorée elle converge.

3. a) On a : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = P(X + 1 = k + 1) = q^k p$ et donc :

$u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (u_n)^k q^k p = p \sum\limits_{k=0}^{\infty} (qu_n)^k = \dfrac{p}{1 - qu_n}$ (car on a $\ 0 < qu_n q < 1$)

b) Notons ℓ la limite de la suite u. On a $0\ell 1$ et $\ell = \dfrac{p}{1 - q\ell}$, soit $q\ell^2 - \ell + p = 0$, *i.e.*

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = 0$$

$\rightarrow$ Si $p \geqslant \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{p}{q} \geqslant 1$ et la seule limite possible est 1, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

$\rightarrow$ Si $p < \dfrac{1}{2}$, alors $0 < \dfrac{p}{q} < 1$ et il reste un doute ...

Posons $f : x \mapsto \dfrac{p}{1 - qx}$, la fonction f est croissante sur $[0, 1]$ et $u_0 \dfrac{p}{q}$ implique $u_1 = f(u_0) f(\dfrac{p}{q}) = \dfrac{p}{q}, \ldots$ et par l'argument de récurrence habituel, la suite u est majorée par $\dfrac{p}{q}$. Ainsi la valeur $\ell = 1$ est à exclure et donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{p}{q}$.

c) i) Pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{\frac{p}{q} - u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{p}{1 - qu_n}}{\frac{p}{q} - \frac{p}{1 - qu_n}} = \frac{q}{p} \times \frac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n} = \frac{q}{p} v_n$$

Par conséquent $v_n = \left(\dfrac{q}{p}\right)^n v_0 = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1}$ et comme $(\dfrac{p}{q} - u_n) v_n = 1 - u_n$, il vient :

$$u_n = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - v_n} = \frac{1 - (\frac{q}{p})^n}{1 - (\frac{q}{p})^{n+1}}$$

ii) Comme $u_0 = 0$ et u est croissante de limite 1, l'existence de G est claire, et en posant $x = \dfrac{q}{p} \in]0, 1[$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$P(G = n) = u_n - u_{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x^{n+1}} - \frac{1 - x^{n-1}}{1 - x^n} = \frac{x^{n-1}(1 - 2x + x^2)}{(1 - x^n)(1 - x^{n+1})}$$

Ainsi

$$P(G = n) \underset{(n\to\infty)}{\sim} x^{n-1}(1 - x)^2$$

Comme $0 < x < 1$, la convergence de la série de terme général $nP(G = n)$ est acquise (règle d'équivalence et série géométrique dérivée de référence) et G admet une espérance.

Exercice 3.18.

Pour tout $(p, N) \in \mathbb{N}^2$, on définit la fonction $f_{p,N}$ sur $]-1, 1[$ par :

$$f_{0,N}(x) = \frac{x^N}{1 - x} \text{ et } f_{p+1,N}(x) = \int_0^x f_{p,N}(t)\, dt$$

1. a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_p de degré inférieur ou égal à $(p - 1)$ tel que pour tout x de $]-1, 1[$:

$$f_{p,0}(x) = -\frac{(x-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-x) + P_p(x)$$

b) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a :
$|f_{p,N}(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{p+N}}{1-|x|}$.

c) Montrer que, pour tous p et N de $\mathbb{N}$ et tout $x \in]-1,1[$, on a :
$\sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{n!x^{n+p}}{(n+p)!} = f_{p,0}(x) - f_{p,N+1}(x)$.

d) Pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $p \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n!x^{n+p}}{(n+p)!}$ et exprimer sa somme en fonction $f_{p,0}(x)$.

2. On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche, d'un stock infini de boules rouges et on joue indéfiniment avec une pièce de monnaie non truquée selon le protocole suivant .
→ Si on obtient «face» au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on ajoute u_n boules rouges au contenu de l'urne avant le lancer suivant de la pièce.
→ La première fois que l'on obtient «pile», on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.
Calculer la probabilité r d'obtenir la boule blanche dans les cas suivants :

a) La suite $(u_n)_n$ est la suite nulle.
b) La suite $(u_n)_n$ est la suite constante égale à 1.
c) La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n + 1$.

3. On procède de même mais la règle est maintenant la suivante :
→ Si on obtient «face» au $n^{\text{ème}}$ lancer ($n \geqslant 1$), on lance une boule rouge en direction de l'urne et on a à chaque fois une chance sur deux pour que cette boule tombe dans l'urne, indépendamment de ce qui a pu se produire avant, puis on effectue le lancer suivant de la pièce.
→ La première fois que l'on obtient «pile», on tire au hasard une boule de l'urne et le jeu s'arrête alors.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité que l'on obtienne n «pile» avant le premier «face» et que l'on obtienne alors la boule blanche.

b) En déduire la probabilité r d'obtenir la boule blanche.

Solution :

1. a) Par récurrence sur $p \geqslant 1$, le résultat étant clair pour $p = 1$, avec $P_1 = 0$. Si la propriété est vraie à un certain ordre $p \geqslant 1$, alors par intégration par parties on a :

$$f_{p+1,0}(x) = \int_0^x -\frac{(t-1)^{p-1}}{(p-1)!}\ln(1-t)\,dt + \int_0^x P_p(t)\,dt$$

$$= \Big[-\frac{(t-1)^p}{p!}\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{(t-1)^p}{p!}\frac{1}{1-t}\,dt + \int_0^x P_p(t)\,dt$$
$$= -\frac{(x-1)^p}{p!}\ln(1-x) + P_{p+1}(x)$$

où la fonction P_{p+1} est clairement polynomiale et si $\deg P_p p-1$, alors $\deg P_{p+1} < p$. On conclut ...et on remarque que $P_2 = X$.

b) Par récurrence sur $p \geqslant 0$.

⋆ On a : $|f_{0,N}(x)| = \dfrac{|x|^N}{|1-x|} \leqslant \dfrac{|x|^N}{1-|x|}$, car $|1-x| \geqslant 1-|x| > 0$.

⋆ Si la propriété est vraie à l'ordre p, alors en prenant garde au fait que le signe de x est inconnu :

$$\big|f_{p+1,N}(x)\big| \leqslant \Big|\int_0^x |f_{p,N}(t)|\,dt\Big| \leqslant \Big|\int_0^x \frac{|x|^{p+N}}{1-|x|}\,dt\Big| = |x|\frac{|x|^{p+N}}{1-|x|} = \frac{|x|^{p+1+N}}{1-|x|}.$$

c) En intégrant p fois successivement entre 0 et x la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = f_{0,0}(x) - f_{0,N+1}(x),$$

on obtient le résultat demandé.

d) D'après 1. b) on a $\lim\limits_{N\to+\infty} |f_{p,N+1}(x)| = 0$. Donc 1. c) donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!x^{n+p}}{(n+p)!} = f_{p,0}(x).$$

2. Soit B l'événement «la boule tirée est blanche». Soit A_n l'événement «la pièce donne n fois face avant de faire pile». Les $(A_n)_{n\geq 0}$ forment un système complet, avec $P(A_n) = \big(\frac{1}{2}\big)^n\frac{1}{2} = \big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}$, donc :

$$r = P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+u_1+\cdots+u_n}\big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+1}$$

a) Ici : $r = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \big(\frac{1}{2}\big)^{n+1} = 1$.

b) D'après la question 1. d) pour $p=1$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} = f_{1,0}(x) = -\ln(1-x)$, donc :

$$r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+1} = -\ln(1-\tfrac{1}{2}) = \ln 2$$

c) D'après la question 1. d) pour $p=2$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} = f_{2,0}(x) = -(x-1)\ln(1-x) + x.$$

Or on a ici $1+u_1+\cdots+u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc

$$r = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+2} = 4f_{2,0}(\tfrac{1}{2}) = 2(1-\ln 2)$$

3. a) Notons S le nombre de boules rouges ajoutées dans l'urne. On a, avec les notations précédentes :

$$P(A_n\cap B)=\sum_{j=0}^{\infty}P(A_n\cap B\cap(S=j))=\sum_{j=0}^{\infty}P(A_n)P_{A_n}(S=j)P_{A_n\cap(S=j)}(B).$$

La loi conditionnelle de S sachant que A_n est réalisé est la loi $\mathcal{B}(n,1/2)$ et à la fin on tire une boule dans une urne qui contient j boules rouges et 1 blanche. Ainsi, il reste :

$$P(A_n\cap B)=\sum_{j=0}^{n}\big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}\binom{n}{j}\big(\frac{1}{2}\big)^{n}\frac{1}{j+1}=\big(\frac{1}{2}\big)^{2n+1}\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j+1}$$
$$=\big(\frac{1}{2}\big)^{2n+1}\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

b) $r=P(B)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P(A_n\cap B)=2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}-2\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\big(\frac{1}{4}\big)^{n+1}$
$=-2\ln\frac{1}{2}+2\ln\frac{3}{4}$

$$r=2\ln\frac{3}{2}.$$

Exercice 3.19.

Dans une urne, il y a n boules dont $m\geqslant 1$ sont noires et gagnantes et les autres blanches et perdantes, avec $n\geqslant 3m$.

1. Un joueur tire au hasard successivement et sans remise m boules de l'urne. Pour $k\in\{1,\dots,m\}$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la $k^{\text{ème}}$ boule tirée est noire et à 0 sinon. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

a) Exprimer X à l'aide des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$.

b) Déterminer la loi de X et donner la valeur de son espérance.

c) En déduire les égalités suivantes

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}=\binom{n}{m}\ \text{et}\ \sum_{k=1}^{m}k\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}=\frac{m^2}{n}\binom{n}{m}.$$

2. Après cette première série de tirages, l'organisateur de ce jeu enlève m boules blanches de l'urne et propose au joueur le choix suivant :
soit il garde le résultat obtenu, soit il tire à nouveau successivement et au hasard et toujours sanx remise m boules parmi les $n-2m$ boules restant alors dans l'urne.

Le joueur choisit la deuxième option. Pour ce deuxième tirage, on note Y_i ($i\in\{1,\dots,m\}$) la variable aléatoire égale à 1 si la $i^{\text{ème}}$ boule obtenue est noire et à 0 sinon, et par Y la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

a) Montrer que l'on a :

$$P(Y_i = 1) = \frac{1}{(n-2m)\dbinom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} (m-k)\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}.$$

En déduire une expression simple de $P(Y_i = 1)$.

b) Calculer l'espérance de Y. Le joueur a-t-il fait le bon choix ?

Solution :

1. a) On a $X = X_1 + \cdots + X_m$.

b) On reconnaît une loi hypergéométrique, et on a $X(\Omega) = \{0, \ldots, m\}$ et :

$$\forall\, k \in [\![0, m]\!], P(X = k) = \frac{\dbinom{m}{k}\dbinom{n-m}{m-k}}{\dbinom{n}{m}}$$

Avec

$$E(X) = m \times \frac{m}{n}$$

c) On a donc $1 = \sum_{k=0}^{m} P(X = k) = \frac{1}{\dbinom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}$, d'où la première égalité.

On remarque ensuite que :

$$\frac{m^2}{n} = \frac{1}{\dbinom{n}{m}} \sum_{k=1}^{m} k\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}$$

2. On se place désormais dans la seconde phase lorsque le joueur décide de continuer.

a) Avec 1. b) et 1. c), on obtient par la formule des probabilités totales avec le système complet associé à la variable X :

$$\begin{aligned} P(Y_k = 1) &= \sum_{k=0}^{m} P(Y_k = 1/X = k)P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{m-k}{n-2m} \times \frac{\dbinom{m}{k}\dbinom{n-m}{m-k}}{\dbinom{n}{m}} \\ &= \frac{1}{(n-2m)\dbinom{n}{m}} \sum_{k=0}^{m} (m-k)\binom{m}{k}\binom{n-m}{m-k}. \end{aligned}$$

En séparant la somme en deux, les deux formules obtenues en 1. c) permettent alors d'écrire :

$$P(Y_k = 1) = \frac{1}{n-2m}\left(m - \frac{m^2}{n}\right) = \frac{(n-m)m}{(n-2m)n}$$

b) Comme $Y = Y_1 + \cdots + Y_m$, on obtient par linéarité de l'espérance :

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{m} E(Y_k) = \sum_{k=1}^{m} P(Y_k = 1) = \frac{(n-m)\,m^2}{(n-2m)\,n}.$$

Comme $n - m > n - 2m$, on remarque que $E\,(Y) > E\,(X)$, le joueur a donc fait le bon choix.