2

ALGÈBRE

Exercice 2.1.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 1)$ est dite *à diagonale propre* si ses valeurs propres (la matrice M étant considérée comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) sont toutes réelles, et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres. On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre. Une matrice A est antisymétrique si ${}^tA = -A$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ n'est pas vide.

2. La matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle à diagonale propre ?

3. Soit A une matrice antisymétrique à diagonale propre.
   a) Quelles sont ses valeurs propres ?
   b) Montrer qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$.
   c) Calculer $({}^tAA)^p$. En remarquant que ${}^tAA$ est une matrice symétrique, montrer que $A = 0$.

4. Soit $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques. Déterminer la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

5. a) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{E}_n$. Montrer que $\dim F \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$ (on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.
   b) Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

Solution :

1. L'ensemble $\mathcal{E}_n$ contient les matrices diagonales et les matrices triangulaires.

2. Si la matrice A était à diagonale propre, comme elle est de diagonale nulle, son unique valeur propre serait 0. Or $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice A^2 admet comme valeurs propres 0 et -1, et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2 + I = (A - iI)(A + iI)$ n'est pas inversible. Une des deux matrices $(A - iI)$ ou $(A + iI)$ n'est pas inversible et A possède au moins une valeur propre complexe non nulle : elle n'est pas à diagonale propre.

3. a) La diagonale d'une matrice antisymétrique n'est formée que de 0. La seule valeur propre de A est donc 0.
   b) La matrice A admet un polynôme annulateur (pour p assez grand, la famille $(I, A, \dots, A^p)$ est liée). Sur $\mathbb{C}$, ce polynôme se factorise sous la forme

$$P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}.$$

Si λ_i n'est pas valeur propre de A, la matrice $A-\lambda_i I$ est inversible et le polynôme $\dfrac{P(X)}{(X-\lambda_i)^{m_i}}$ reste annulateur de A. En choisissant P de degré minimal, toute racine de P est donc valeur propre de A, Comme 0 est l'unique valeur propre de A, le polynôme P est de la forme X^p.

c) On a ${}^tAA=-A^2$; donc $({}^tAA)^p=0$. La matrice $B={}^tAA$ est symétrique réelle, donc diagonalisable. Comme $B^p=0$, sa seule valeur propre est 0 : elle est semblable donc égale à la matrice nulle. Ainsi $A^2=0$ et ${}^tAA=0$.

Or $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker}({}^tAA)$. En effet $\operatorname{Ker} A\subseteq \operatorname{Ker}({}^tAA)$ est banal et si ${}^tAAX=0$, alors $||AX||^2={}^tX{}^tAAX=0$, donc $X\in\operatorname{Ker} A$. Comme $\operatorname{Ker}{}^tAA=E$, on a $\operatorname{Ker} A=E$ et $A=0$.

4. On sait que $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R})=\dfrac{n(n-1)}{2}$

5. a) On a $F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\subset\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim(F+\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))\leqslant n^2$, soit, par le résultat de la question 3. :

$$n^2\geqslant \dim F+\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})-\dim(F\cap\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))=\dim F+\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Donc,

$$\dim F\leqslant n^2-\dim\mathcal{A}_n(\mathbb{R})=n^2-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

b) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un espace vectoriel de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$. Ses éléments sont tous à diagonale propre et comme on ne peut pas faire mieux (résultat a) :

la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F\subset\mathcal{E}_n$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2.2.

On désigne par $E=C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. À tout f de E, on associe l'application $g=\Phi(f)$ définie par : $g(0)=f(0)$ et pour tout réel x non nul,

$$g(x)=\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}f(t)dt$$

1. a) Vérifier que la fonction g ainsi définie est un élément de E, ce qui permet d'envisager Φ comme une application de E dans E.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, justifier l'égalité : $g(x)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}f(xu)du$. Montrer que g est une fonction paire et simplifier l'expression de g lorsque f est une fonction paire ou lorsque f est une fonction impaire.

2. a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que Φ n'est pas injective et préciser son noyau.

c) Soit $f\in E$ et $g=\Phi(f)$. Montrer que g est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}^*$ et préciser $g'(x)$.

d) Montrer que Φ n'est pas surjective.

3. Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$. On souhaite déterminer $E_\lambda=\operatorname{Ker}(\Phi-\lambda Id_E)$.

a) Soit $f\in E$ vérifiant $\Phi(f)=\lambda f$. Montrer que f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et telle que : $\forall\, x\in\mathbb{R}^*, \lambda x f'(x)=(1-\lambda)f(x)$.

b) En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $x\in\mathbb{R}_-^*$.

c) En déduire la forme possible de f selon $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

d) Conclure en précisant E_λ selon $\lambda\in\mathbb{R}^*$.

Solution :

1. a) La continuité de f prouve la dérivabilité, donc la continuité, de g sur $\mathbb{R}^*$. En zéro :

$$|g(x)-g(0)|=\Big|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(f(t)-f(0))dt\Big|\leqslant\frac{1}{2|x|}|2x|\sup_{t\in[-x;x]}|f(t)-f(0)|$$

$$|g(x) - g(0)| \leqslant \sup_{t \in [-x;x]} |f(t) - f(0)|.$$

Cette dernière expression, du fait de la continuité de f en zéro, a pour limite zéro lorsque x tend vers zéro. Cela prouve la continuité de g en zéro. Ainsi g est continue sur $\mathbb{R}$ et elle appartient bien à E.

b) On vérifie tout d'abord le résultat pour $x = 0$. Si x est non nul, le changement de variable $t = xu$ permet de répondre à la question.

La parité de g est évidente sur sa définition.

Quand f est paire, la relation de Chasles permet d'obtenir : $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xu)du$, et, lorsque f est impaire, g est la fonction nulle.

2. a) On a déjà vu que Φ allait de E dans E. Sa linéarité provient de celle de l'intégration.

b) On a vu dans la première question que toute fonction f impaire appartenait au noyau de Φ, donc cette dernière n'est pas injective. En outre :

$f \in \operatorname{Ker}\Phi \iff g = 0 \iff [\forall\, x \in \mathbb{R}, g(x) = 0]$

$$\iff [f(0) = 0, \text{ et } \forall\, x \in \mathbb{R}^*, \int_{-x}^{x} f(t)dt = 0]$$

En dérivant la dernière relation, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) - (-1)f(-x) = 0$, ce qui prouve que f est impaire (on a aussi $f(0) = 0$). On a donc la réciproque de la remarque précédente. Ainsi, $\operatorname{Ker}\Phi$ est l'ensemble des fonctions impaires.

c) La dérivabilité de g a déjà été évoquée. Si x est non nul :

$$g'(x) = -\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} f(t)dt + \frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

d) Nous venons de voir que $\operatorname{Im}\Phi$ était incluse dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Comme toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ne sont pas dans ce cas (par exemple $x \mapsto |x-1|$ n'est pas dérivable en 1), Φ n'est pas surjective.

3. a) Soit $f \in E$ vérifiant $\Phi(f) = \lambda f$. Avec les notations précédentes, λ n'étant pas nul, on a : $f = \dfrac{1}{\lambda}g$. Ainsi, de la parité et de la dérivabilité de g, découlent celles de f. En dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{1}{\lambda}g'(x) = -\frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{2x^2}\int_{-x}^{x} f(t)dt + \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{2x}(f(x) + f(-x))$$

Ce qui donne, en multipliant par λx et en utilisant la parité de f :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \lambda x f'(x) = -g(x) + f(x) = -\lambda f(x) + f(x) = (1-\lambda)f(x)$$

b) Ce qui précède s'écrit encore : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{1-\lambda}{\lambda x}f(x)$.

Comme $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$, sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$ les solutions sont de la forme :

$$f(x) = \alpha \exp\big(\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln|x|\big)$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est quelconque. Bilan :

$$\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_-^*, f(x) = \beta(-x)^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

et :

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \gamma x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

c) Comme on a vu que f se devait d'être paire, on a nécessairement $\beta = \gamma$. On doit donc avoir : $\exists\, \beta \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \beta|x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Pour que f soit continue en zéro, il faut, en outre, qu'elle admette une limite à droite (finie) en ce point (étant paire, elle aura la même à gauche).

C'est le cas si $\beta = 0$ ou $\lambda = 1$ car f est constante égale à β.

Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ (dont le signe dépend du signe de β), enfin, si $0 < \lambda < 1$, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, donc en posant $f(0) = 0$, f est continue en zéro.

d) Faisons la synthèse de ces différents résultats.

→ Si $\lambda = 1$, on a E_1 égal à l'ensemble des fonctions constantes, donc 1 est valeur propre de Φ.
→ Si $\lambda < 0$ ou $\lambda > 1$, nous avons vu que $E_\lambda = \{0\}$, donc λ n'est pas valeur propre de Φ.
→ Supposons $0 < \lambda < 1$. Considérons la fonction f définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = |x|^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

En remplaçant dans l'expression initiale, on constate que $\Phi(f) = \lambda f$, ce qui prouve que f appartient à E_λ, de même que toutes les fonctions qui lui sont colinéaires. Ainsi, E_λ est la droite vectorielle de base f et λ est valeur propre de Φ.

Exercice 2.3.

Pour n entier naturel, on note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On identifiera polynômes et fonctions polynomiales associées.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes :

$$U_n(X) = (X^2 - 1)^n \text{ et } L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \times U_n^{(n)}(X)$$

où $P^{(n)}$ désigne la dérivée $n^{\text{ème}}$ du polynôme P, (pour $n = 1$, on notera aussi $P^{(1)} = P'$).
Pour tout polynôme P, on pose :

$$\mathcal{L}(P)(X) = ((X^2 - 1)P')'$$

1. a) Calculer L_0, L_1 et L_2.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n.
   c) En déduire que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.

2. Montrer que $\langle ., .\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

3. a) Montrer que $\mathcal{L}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   b) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \langle P, \mathcal{L}(Q)\rangle$.

4. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(L_n) = n(n+1)L_n$.
   a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $(L_n)_{n\in[\![0,m]\!]}$ est une famille de polynômes orthogonaux.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$.

5. Montrer que L_{n+1} possède exactement $n + 1$ racines réelles distinctes, toutes dans l'intervalle $]-1, 1[$ (on pourra supposer que L_{n+1} change de signe seulement en $a_1, \ldots, a_r$ de $]-1, 1[$ et que $r < n + 1$ pour obtenir une contradiction).

Solution :

1. a) On remarque que $L_0 = 1, L_1 = X$ et $L_2 = \frac{1}{2}(3X^2 - 1)$.
   b) Comme $\deg(U_n) = 2n$, $\deg(L_n) = 2n - n = n$.

Le coefficient dominant de L_n est obtenu par dérivations successives du terme X^{2n}. Ainsi, il vaut $\dfrac{1}{2^n n!} \times \dfrac{(2n!)}{n!} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$.

c) La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ à degrés échelonnés du degré 0 au degré n. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Il s'agit bien d'une forme bilinéaire définie positive, les fonctions polynomiales étant des fonctions continues sur $[-1, 1]$, ce qui assure que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(x)\, dx = 0$ entraîne que P admet une infinité de racines, donc est le polynôme nul.

3. a) $\mathcal{L}$ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ par linéarité de l'opérateur de dérivation.

b) Soient P, $Q \in \mathbb{R}[X]$.

D'après la formule d'intégration par parties, $(x^2-1)\dfrac{dP}{dx}(x)$ étant nul en -1 et 1 :

$\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}[(x^2-1)\frac{dP}{dx}(x)]Q(x)dx = \int_{-1}^{1}[(x^2-1)\frac{dP}{dx}(x)]\frac{dQ}{dx}(x)dx$

Sous cette forme, la symétrie des rôles de P et Q est claire et ainsi :

$$\langle \mathcal{L}(P), Q\rangle = \langle \mathcal{L}(Q), P\rangle$$

4. a) Soient $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \neq n$. Alors supposons sans restriction que $n \neq 0$:

$$\begin{aligned}\langle L_n, L_m\rangle &= \frac{1}{n(n+1)}\langle \mathcal{L}(L_n), L_m\rangle = \frac{1}{n(n+1)}\langle L_n, \mathcal{L}(L_m)\rangle \\ &= \frac{m(m+1)}{n(n+1)}\langle L_n, L_m\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, $(n(n+1)-m(m+1))\langle L_n, L_m\rangle = 0$. Or, $n(n+1)-m(m+1) \neq 0$, car la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est injective sur $\mathbb{N}$. D'où $\langle L_n, L_m\rangle = 0$.

b) Comme $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout Q polynôme de degré inférieur ou égal à n, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X^k$. Ainsi,

$$\langle Q, L_{n+1}\rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle L_k, L_{n+1}\rangle = 0$$

c) On a déjà montré que $(L_0, \ldots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$.

d) Posons $Q(X) = \prod\limits_{i=1}^{r}(X-a_i)$. Comme $\deg(L_{n+1}) = n+1$, on a $r \leqslant n+1$. De plus, le polynôme QL_{n+1} garde un signe constant sur $[-1,1]$.

Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q(x)L_{n+1}(x)\,dx \neq 0$. Comme $L_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]^{\perp}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$, on en déduit que Q est de degré $n+1$.

Ainsi, $r = n+1$ et L change exactement $n+1$ fois de signe sur $]-1,1[$.

Exercice 2.4.

Étude matricielle de la lettre C.

On considère la matrice $C \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On note $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$ la base canonique de $\mathbb{R}^7$ et c l'endomorphisme de $\mathbb{R}^7$ dont la matrice dans la base canonique est C. Selon l'usage, on identifie les matrices colonnes (à 7 lignes à coefficients réels) à des vecteurs de $\mathbb{R}^7$. On note $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ les vecteurs colonnes de la matrice C.

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de c, ainsi que le rang de c.

2. On note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^7$ engendré par les trois premiers vecteurs colonnes f_1, f_2, f_3 de la matrice C.

a) Montrer que F est stable par c.

b) Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de F et déterminer la matrice Φ dans cette base de l'endomorphisme φ de F induit par c.

c) Pourquoi 1 est-il valeur propre de Φ ?

d) Montrer que Φ admet 3 valeurs propres réelles distinctes que l'on déterminera.

e) La matrice Φ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3. Déduire des questions précédentes le spectre de C et les dimensions des sous-espaces propres associés. Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice diagonale semblable à C.

Solution :

1. Comme $f_2 = f_5$, $f_3 = f_4$ et $f_6 = f_7 = 0$, le rang de c est le même que celui de la famille (f_1, f_2, f_3) qui est égal à trois. Comme cette famille engendre l'image de c, elle en constitue une base. En outre, d'après le théorème du rang, le noyau de c est de dimension 4. D'après les remarques liminaires, il a pour base la famille $(e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_6, e_7)$.

2. a) On a : $F = \operatorname{Im} c = \operatorname{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
On a également : $c(f_1) = (2, 1, 0, 0, 0, 1, 2) = f_2 + 2f_3 \in F$ et $c(f_2) = f_2 \in F$ et $c(f_3) = f_1 \in F$. Ainsi, F est stable par c.

b) Le fait que (f_1, f_2, f_3) est une base de F a déjà été remarqué. On note $\varphi = c_{|F}$. Les calculs précédents permettent d'écrire la matrice associée à Φ dans la base proposée :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On a $c(f_2) = f_2$, donc 1 est élément du spectre de Φ.

d) On cherche les réels λ tels qu'il existe un triplet $u = (x, y, z)$ non nul appartenant à F tel que $\varphi(u) = \lambda u$. Comme φ est bijective (d'après le rang de c), nous savons déjà que zéro ne sera pas valeur propre de φ. Supposons $\lambda \neq 1$. Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} z = \lambda x \\ x + y = \lambda y \\ 2x = \lambda z \end{cases}, \text{ qui équivaut à : } \begin{cases} z = \dfrac{\lambda^2}{2} z \\ x = (\lambda - 1) y \\ 2x = \dfrac{\lambda}{2} z \end{cases}$$

Il est clair que si λ est différent de $\sqrt{2}$ et de $-\sqrt{2}$, la seule solution est $u = 0$ et λ n'est pas valeur propre.
Si $\lambda = \sqrt{2}$, le système devient : $z = \sqrt{2}x, y = (\sqrt{2} + 1)x$. Donc $\sqrt{2}$ est valeur propre de φ et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle de base $(1, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$. De façon analogue, $-\sqrt{2}$ est valeur propre de φ associée au sous-espace propre de base $(1, 1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

e) La matrice Φ, étant d'ordre trois et possédant trois valeurs propres, est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

3. D'après ce qui précède, les valeurs propres de C sont $0, 1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. Les dimensions des sous-espaces propres associés sont : 4 pour la valeur propre zéro (le sous-espace propre est le noyau), 1 pour chacune des trois autres valeurs propres. La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à 7, la matrice C est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Une matrice diagonale semblable à C sera, par exemple, de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2.5.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note id l'endomorphisme identité de E.

1. On suppose dans cette question que u est diagonalisable. On note $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ l'ensemble de ses valeurs propres.
Montrer que le polynôme $m(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u.

2. Soit f et g deux endomorphismes de E. En considérant la restriction de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$, montrer que :

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$$

On suppose dans la suite de l'exercice qu'il existe un polynôme

$$P(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$$

annulateur de u, où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont des réels distincts.

3. a) Montrer que $n \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id)$.

b) En déduire que l'endomorphisme u est diagonalisable.

4. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $A^3 + A^2 + A + I = 0$, où I est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution :

1. L'endomorphisme u étant diagonalisable, on note $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Supposons que e_l soit associé à la valeur propre λ_l. Par commutation, on a :

$$m(u)(e_l) = \big[\prod_{j \neq l} (u - \lambda_j id)\big] \circ (u - \lambda_l id)(e_l) = 0$$

Ainsi l'endomorphisme $m(u)$ s'annule sur une base de E : il est identiquement nul.

2. Notons $\widetilde{f}$ la restriction de f à $\operatorname{Ker}(g \circ f)$. Ainsi $\widetilde{f} : \operatorname{Ker}(g \circ f) \to E$, et

$$\operatorname{Ker} \widetilde{f} = \{x \in \operatorname{Ker}(g \circ f) / f(x) = 0\} \subset \operatorname{Ker} f$$

$$\operatorname{Im} \widetilde{f} = \{f(x) / g(f(x)) = 0\} \subset \operatorname{Ker} g$$

Le théorème du rang permet d'affirmer que

$$\dim \operatorname{Ker}(g \circ f) = \dim \operatorname{Ker} \widetilde{f} + \dim \operatorname{Im} \widetilde{f} \leqslant \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Ker} g$$

3. a) La relation précédente se généralise par récurrence à un nombre quelconque d'endomorphismes.
Le polynôme P étant annulateur de u, il vient

$$n = \dim E = \dim \operatorname{Ker} P(u) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id)$$

b) Des sous-espaces propres associés a un même endomorphisme étant toujours en somme directe, on a :

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id) = \bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id)$$

Donc :

$$n \leqslant \sum_{j=1}^{k} \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id) = \dim \big(\bigoplus_{j=1}^{k} \operatorname{Ker}(u - \lambda_j id)\big) \leqslant n$$

On a donc égalité, ce qui montre que u est diagonalisable.

4. Le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$ est annulateur de A. Sur $\mathbb{C}$, on peut écrire $P(X) = (X+1)(X+i)(X-i)$. Ainsi la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Or la matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\pm i$ ne sont pas valeurs propres de A ce qui entraîne que $A + iI$ et $A - iI$ sont inversibles. Donc $A + I = 0$, *i.e.* $A = -I$.

Exercice 2.6.

Soit n un entier supérieur ou égal à Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Pour tout x de E on pose : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. a) L'application f est-elle un endomorphisme de E ?

b) L'application f est-elle injective, surjective ?

c) L'application f est-elle un endomorphisme symétrique de E ?

d) Caractériser les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telles que f soit un projecteur.

2. a) Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$.

c) Montrer que $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Solution :

1. a) La linéarité de f résulte de la linéarité à gauche du produit scalaire et des propriétés du calcul vectoriel. D'autre part f est clairement à valeurs dans E, donc f est un endomorphisme de E.

b) Si $f(x) = 0$, on a : $\forall\, k, \langle x, e_k\rangle = 0$ (car $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E), ce qui prouve que x est orthogonal à une base de E, donc à tout vecteur de E, et en particulier à x. Ainsi $\|x\|^2 = 0$ et $x = 0$.
Ceci prouve que f est injective, donc est bijective, puisque f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

c) Pour tous vecteurs x et y, on a :

$$\langle f(x), y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle\langle e_k, x\rangle = \langle f(y), x\rangle$$

Ainsi, f est un automorphisme symétrique.

d) Comme f est un automorphisme, f est un projecteur si, et seulement si, $f = id$.

$\star$ Si $f = id$, alors $\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$.

En particulier, pour tout indice j, $e_j = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k\rangle e_k$ et l'unicité de l'écriture dans une base donne $\langle e_j, e_k\rangle = \delta_{j,k}$, ce qui prouve que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée.

$\star$ Réciproquement si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors :

$\forall\, x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$ et $f = id$.

$$f \text{ projecteur} \iff (e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}$$

2. a) Si λ est une valeur propre de f et x un vecteur propre associé, on a :

$$\lambda\|x\|^2 = \langle f(x), x\rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2 > 0 \text{ (car } x \neq 0)$$

Donc $\lambda > 0$.

b) $s = (s \circ f)^{-1}$ équivaut à $s \circ s = f^{-1}$. Puisque f est un endomorphisme symétrique, soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée telle que $M_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
On a : $M_{\mathcal{B}}(f^{-1}) = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$ et on peut donc considérer l'endomorphisme s tel que $M_{\mathcal{B}}(s) = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \dots, \lambda_n^{-1/2})$.
Par construction même, $s \circ s = f^{-1}$, s est un automorphisme et s est symétrique, donc s convient.

c) Pour tout couple (i, j), on a : $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \langle e_i, s \circ s(e_j)\rangle = \langle e_i, f^{-1}(e_j)\rangle$.

Or : $e_j = f(f^{-1}(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} \langle f^{-1}(e_j), e_i\rangle e_i$, d'où : $\langle f^{-1}(e_j), e_i\rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker).

Ainsi $\langle s(e_i), s(e_j)\rangle = \delta_{i,j}$ et donc $\big(s(e_1), s(e_2), \dots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 2.7.

1. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E et l'application linéaire f ayant pour matrice, dans la base $\mathcal{B}$:

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est un projecteur dont on déterminera les éléments caractéristiques.

2. Dans cette question, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de E. La droite vectorielle engendrée par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ est notée $\mathcal{D}$ et le plan engendré par les vecteurs $\varepsilon_2 = e_1 - e_3$ et $\varepsilon_3 = 2e_1 - e_2$ est noté $\mathcal{P}$.

a) Montrer que $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = E$.

b) Déterminer la matrice, dans la base $\mathcal{B}$, du projecteur sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

3. Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et p est un projecteur de E.

a) Montrer que si p est un projecteur orthogonal, alors : $\forall\, x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

i) Soit $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \in \operatorname{Ker} p$, avec $y \neq 0$. En considérant le vecteur $x + \lambda y$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), montrer que x et y sont orthogonaux.

ii) En déduire que p est un projecteur orthogonal.

Solution :

1. Le calcul prouve que $M^2 = M$, ce qui établit que f est un projecteur. Ses éléments caractéristiques sont son noyau et son image, c'est-à-dire :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(e_1 + e_2) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1 - 2e_2)$$

2. a) Comme la somme des dimensions de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ vaut celle de E, il suffit de montrer que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est libre, ce qui se vérifie facilement. On la notera $\mathcal{B}'$. C'est donc une base de E.

b) Utilisons la base $\mathcal{B}'$.

On commence par donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, ce qui est immédiat :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis on utilise la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d'où l'on déduit : $P^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -7 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

et la matrice cherchée $M_{\mathcal{B}}(f) = PDP^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

3. a) On suppose que p est le projecteur orthogonal sur F, sous-espace vectoriel de E. On a alors, pour tout x de E :

$$x = p(x) + (x - p(x)) \qquad \text{donc} \qquad \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$

en raison de l'orthogonalité de $p(x)$ à $x - p(x)$. Cela prouve bien que : $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

b) Réciproquement, on suppose que : $\forall\, x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

i) Soit $x \in \operatorname{Im} p$ et $y \neq 0 \in \operatorname{Ker} p$. On a :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \|p(x + \lambda y)\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

ou encore :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \|x\| \leqslant \|x + \lambda y\|$$

soit, en élevant au carré :

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda\big(\|y\|^2\lambda + 2(x|y)\big) \geqslant 0$$

Ce trinôme du second degré en λ ne peut être de signe constant que si ses deux racines 0 et $-2\dfrac{(x|y)}{\|y\|^2}$ sont égales, ce qui donne l'orthogonalité de y à x.

Ayant montré que tout vecteur de $\operatorname{Ker} p$ est orthogonal à tout vecteur de $\operatorname{Im} p$, on en déduit que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 2.8.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

Ces matrices sont dites stochastiques.

1. a) $\mathcal{S}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

b) Montrer que le produit de deux éléments de $\mathcal{S}$ est un élément de $\mathcal{S}$.

c) Soit $A \in \mathcal{S}$ inversible. Son inverse A^{-1} est-il élément de $\mathcal{S}$?

2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour σ permutation de $[\![1,n]\!]$, on définit l'endomorphisme f_σ de E par : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.
On note A_σ la matrice de f_σ dans la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer que A_σ appartient à $\mathcal{S}$.

b) Montrer que A_σ est inversible et que A_σ^{-1} est élément de $\mathcal{S}$.

c) Que peut-on dire des valeurs propres (*a priori* complexes) de A_σ ?

3. Dans cette question, soit A un élément de $\mathcal{S}$ inversible tel que son inverse appartiennent à $\mathcal{S}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de $[\![1,n]\!]$ telle que $A = A_\sigma$.

Solution :

1. a) $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

b) Soit $A, B \in \mathcal{S}$. Alors, avec les notations habituelles :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} \geqslant 0, \text{ et } AB(U) = AU = U$$

D'où la conclusion.

c) La réponse est en général négative. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est stochastique inversible et son inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique.

2. a) La matrice A_σ s'appelle matrice de permutation : chaque ligne et chaque colonne ne contient qu'un seul 1, les autres éléments étant nuls et deux 1 ne peuvent se trouver sur une même colonne. On a alors clairement $A_\sigma \in \mathcal{S}$

b) On remarque que $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma\circ\sigma'}$, ce qui montre que le produit de deux matrices de permutation est une matrice de permutation. Ainsi $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}} \in \mathcal{S}$.

c) Le groupe des permutations étant fini (de cardinal $n!$), il existe $p > q$ tels que $\sigma^p = \sigma^q$, soit $\sigma^{p-q} = Id$. Donc, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $A_\sigma^r = I$.
Ainsi, si λ est valeur propre de A_σ, $\lambda^r = 1$ et λ est une racine r-ième de l'unité, donc un nombre complexe de module 1.

3. Soient A, B deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $BA = I$. On note $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$. On a alors :

$$\text{pour } i \neq j, \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j} = 0, \text{ et } \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,i} = 1$$

$\to$ Les éléments de A et B étant positifs, la première relation donne pour tout $i \neq j$, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $b_{i,k}a_{k,j} = 0$.
$\to$ Soit k fixé. Il existe $i_k \in [\![1, n]\!]$ tel que $b_{i_k,k} \neq 0$ (autrement B ne serait pas inversible). Ainsi, pour tout $j \neq i_k$, on a : $a_{k,j} = 0$.

Comme $\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} = 1$, il vient $a_{k,i_k} = 1$. Cet indice i_k est unique (autrement A possèderait deux 1 sur sa ligne k et ne serait pas stochastique).

On définit ainsi une application $i \to i_k$ injective de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même, donc bijective, c'est-à-dire une permutation.

Ainsi, la matrice A est une matrice de permutation tout comme son inverse.

Exercice 2.9.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note respectivement a et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices A et J.

1. a) Calculer J^n pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) En déduire que $A^n = I + \dfrac{4^n - 1}{3} J$, où I désigne la matrice identité d'ordre 3.

2. Montrer que a admet deux valeurs propres réelles λ et μ avec $\lambda < \mu$.

3. a) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$, tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $a^n = \lambda^n p + \mu^n q$.

b) Montrer que p et q sont deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

4. Déterminer les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$, combinaisons linéaires de p et q tels que $h^2 = h \circ h = a$.

5. Montrer qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q et qui est tel que $h^2 = a$.

Solution :

1. a) Par calcul, $J^2 = 3J$ et par récurrence, $J^n = 3^{n-1}J$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) On remarque que $A = I + J$. Comme I et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I + J \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = I + \frac{4^n - 1}{3} J$$

2. a) Comme $J^2 = 3J$, les valeurs propres possibles de J sont 0 et 3 ; de plus $\operatorname{rg}(j) = 1$, donc $\dim \operatorname{Ker}(j) = 2$. Ce noyau est engendré par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3.

La matrice J symétrique réelle est diagonalisable, tout comme la matrice A. La matrice $A = I + J$ admet comme valeurs propres 1 et 4, des vecteurs propres associés à $\lambda = 1$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et un vecteur propre associé à $\mu = 4$ étant $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. a) On sait que $A^n = I + \dfrac{4^n - 1}{3} J = I - \dfrac{1}{3} J + \dfrac{4^n}{3} J$. On pose donc p l'endomorphisme canoniquement associé à $I - \dfrac{1}{3} J$ et q celui canoniquement associé à $\dfrac{4^n}{3} J$.

D'autre part la résolution du système $\begin{cases} id = p + q \\ a = \lambda p + \mu q \end{cases}$ montre qu'il n'y avait qu'un choix possible.

b) La relation $J^3 = 3J$ donne $q^2 = q$ et $p^2 = p$. Enfin on vérifie aisément que $p \circ q = q \circ p = 0$. Remarquons que p est la projection sur le sous-espace propre E_1 (de dimension 2) parallèlement à E_4 et q la projection sur le sous-espace propre E_4 (de dimension 1) parallèlement à E_1.

4. Montrons que la famille (p, q) est une famille libre. En effet si $\alpha p + \beta q = 0$, en composant par p, il vient $\alpha p = 0$, donc $\alpha = 0$, puis en remplaçant il vient $\beta = 0$.

On écrit alors $h = \alpha p + \beta q$. La question précédente donne $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q$. Par la remarque précédente, il vient $\alpha^2 = 1, \beta^2 = 4$, donc $\alpha = \pm 1, \beta = \pm 2$. La réciproque est immédiate.

5. Soit (e_1, e_2) une base de E_1 et e_3 une base de E_4. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $h(e_1) = e_2, h(e_2) = e_1, h(e_3) = 2e_3$.
On a alors $h^2(e_1) = e_2, h^2(e_2) = e_2, h^2(e_3) = 4e_3$, donc $h^2 = a$. Mais on ne peut écrire $h = \alpha p + \beta q$, puisque $(\alpha p + \beta q)(e_1) = \alpha e_1$ jamais égal à e_2.

Exercice 2.10.

Soit n entier tel que $n \geqslant 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Donner la valeur du rang de M, suivant les valeurs des $a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

2. Montrer que $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si le polynôme
$$P(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - a_2 X^{n-1} - \cdots - a_n$$
admet λ pour racine. Préciser alors une base du sous-espace propre associé et la dimension de celui-ci.

3. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P admet n racines complexes distinctes.

4. Montrer que si $a_n > 0$, alors M admet au moins une valeur propre réelle strictement positive.

5. Dans cette question on suppose que $n = 4$ et $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (0, -3, 0, -2)$. Déterminer les valeurs propres de M. Est-elle diagonalisable ?

Solution :

1. Les $n - 1$ premières colonnes de M forment une famille echelonnée, donc libre. Ainsi le rang de M est au moins égal à $n - 1$.
Effectuons alors une permutation circulaire des colonnes de M, afin d'amener la dernière colonne en tête en repoussant toutes les autres d'un cran ...
On obtient ainsi une matrice M' trigonale de coefficients diagonaux $a_n, 1, \dots, 1$. Donc M' est inversible si et seulement si $a_n \neq 0$. Ainsi :

$$\mathrm{rg}(M) = \begin{cases} n & \text{si } a_n \neq 0 \\ n - 1 & \text{si } a_n = 0 \end{cases}$$

2. Soit $C = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$MC = \lambda C \iff \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$$

En remontant les équations de ce sytème, il vient :

$$MC = \lambda C \Longleftrightarrow \begin{cases} x_{n-1} = \lambda x_n \\ x_{n-2} = \lambda^2 x_n \\ \vdots \\ x_1 = \lambda^{n-1} x_n \\ x_n(\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \cdots - a_{n-1}\lambda - a_n) = 0 \end{cases}$$

$\star$ Si $P(\lambda) \neq 0$, la dernière équation donne $x_n = 0$ et on en déduit la nullité de tous les x_k, donc le système n'admet que la solution triviale et $\lambda \notin \operatorname{Spec} M$.

$\star$ Si λ est racine de P, alors x_n est quelconque et les autres x_k s'en déduisent. Donc λ est alors valeur propre de M, le sous-espace propre associé étant la droite engendrée par la colonne

$$C_\lambda = {}^t \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \dots & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

3. Tous les sous-espaces propres étant de dimension 1, M est diagonalisable si et seulement si ils sont au nombre de n, donc si et seulement si P admet n racines (distinctes).

4. Si $a_n > 0$, la fonction polynôme réelle P vérifie $P(0) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, donc P admet au moins une racine strictement positive.

5. Ici $P = X^4 + 3X^2 + 2 = (X^2+1)(X^2+2)$, donc :

$$\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}}(M) = \{-i, i, -i\sqrt{2}, i\sqrt{2}\}$$

Donc M est $\mathbb{C}$-diagonalisable, mais pas $\mathbb{R}$-diagonalisable.

Exercice 2.11.

Soit E l'ensemble des fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2 \mathrm{e}^{-x} dx$ converge.

On rappelle les formules de Leibniz (que l'on ne demande pas de redémontrer) pour des fonctions C^∞ sur un intervalle I :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

$$\int_a^b u^{(n)}(t)v(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[u^{(n-k-1)}(t)v^{(k)}(t)\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b u(t)v^{(n)}(t)dt,$$

où $n \geqslant 1$ et $(a,b) \in I^2$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel (pour a, b réels, on pourra utiliser l'inégalité $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ en la justifiant).

2. Montrer que les fonctions polynomiales appartiennent à E.

3. Prouver que l'application $\langle\ ,\ \rangle$ définie sur $E \times E$ par $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t} dt$ est un produit scalaire sur E.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions définies pour tout x réel par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x} \text{ et } L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} f_n^{(n)}(x).$$

Prouver que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}.$$

Soit $n \geqslant 1$; vérifier que $f_n^{(p)}(0) = 0$ pour $0 \leqslant p < n$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$.

5. Soit $f \in E$; montrer que l'on a : $\langle f, L_n\rangle = \dfrac{1}{n!}\langle f^{(n)}, X^n\rangle$.

En déduire que $(L_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormale.

6. Montrer que pour $n \geqslant 1$:

$$XL_n(X) = (n+1)\, L_{n+1}(X) + (2n+1)\, L_n(X) + nL_{n-1}(X).$$

Solution :

1. Seule la somme pose un problème. On va utiliser l'inégalité proposée qui résulte de la relation $(|a|-|b|)^2 = a^2+b^2-2|ab| \geqslant 0$.
Si $f, g \in E$, il vient :

$$(f(t)+g(t))^2 \mathrm{e}^{-t} = [f(t)^2+g(t)^2+2f(t)g(t)]\mathrm{e}^{-t} \leqslant 2[f(t)^2+g(t)^2]\mathrm{e}^{-t}.$$

On conclut avec le critère de comparaison.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (|x|^n(1+x^2))\mathrm{e}^{-x} = 0$, on en déduit qu'il existe $A > 0$ tel que $|x^n|\mathrm{e}^{-x} \leqslant (1+x^2)^{-1}$ pour tout $x \geqslant A$. On applique ensuite le critère de comparaison.

3. Il est clair que cette application est bilinéaire et positive. Montrons qu'elle est définie positive. Soit $f \in E$ telle que $0 = \langle f, f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 e^{-t} dt$. L'intégrante est positive, sa continuité entraine sa nullité, et par suite $f = 0$ (on peut se ramener à la nullité de l'intégrale sur un intervalle borné si l'on veut).

4. En appliquant la première formule de Leibniz, et en regroupant les cas $p \leqslant n$ et $p > n$, on obtient :

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{\min(p,n)} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-\min(p,n)+k)!} x^{n-\min(p,n)+k}(-1)^k \mathrm{e}^{-x}$$

On en tire immédiatement que $f_n^{(p)}(0) = 0$ lorsque $0 \leqslant p < n$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n^{(p)}(x) = 0$. En faisant $p = n$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{x^k}{k!}$$

5. Avec la seconde formule de Leibniz et en tenant compte de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^b f_n^{(n)}(x) f(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \big[f_n^{(n-k-1)}(x) f^{(k)}(x)\big]_0^b + (-1)^n \int_0^b f_n(x) f^{(n)}(x) dx \Big\} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \Big\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_n^{(n-k-1)}(b) f^{(k)}(b) + (-1)^n \int_0^b x^n \mathrm{e}^{-x} f^{(n)}(x) dx \Big\}\end{aligned}$$

et par suite en faisant tendre b vers $+\infty$:

$$\langle f, L_n\rangle = \frac{1}{n!} \int_0^b x^n \mathrm{e}^{-x} f^{(n)}(x) dx = \frac{1}{n!} \langle f^{(n)}, X^n\rangle.$$

Si $m < n$, on voit facilement avec la formule précédente que $\langle L_m, L_n\rangle = 0$ puisque $\deg L_m = m < n$.
De plus, on a : $\langle L_n, L_n\rangle = \dfrac{1}{n!}\langle 1, X^n\rangle = \dfrac{1}{n!}\Gamma(n+1) = 1$

6. Soit $n \geqslant 1$; comme $(L_k)_{0\leq k\leq n+1}$ est une famille échelonnée de polynômes avec $\deg L_k = k$, il existe des scalaires tels que

$$XL_n = a_n L_{n+1} + b_n L_n + c_n L_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} u_k L_k$$

Or, pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$, $u_k = \langle XL_n, L_k\rangle = \langle L_n, XL_k\rangle = 0$, car $\deg XL_k < n$. On a donc bien :

$$XL_n(X) = a_n L_{n+1}(X) + b_n L_n(X) + c_n L_{n-1}(X)$$

où a_n, b_n, c_n sont trois réels.
En utilisant la formule explicite donnant $L_n(X)$, on trouve :

$$\begin{aligned}b_n &= \langle XL_n, L_n\rangle = \frac{1}{n!}\langle [XL_n]^{(n)}, X^n\rangle = \frac{1}{n!}\langle -n^2 + (n+1)X, X^n\rangle \\ &= \frac{1}{n!}[-n^2\Gamma(n+1) + (n+1)\Gamma(n+2)] = -n^2 + (n+1)^2 = 2n+1\end{aligned}$$

On a également :
$a_n = \langle XL_n, L_{n+1}\rangle = \dfrac{1}{(n+1)!}\langle [XL_n]^{(n+1)}, X^{n+1}\rangle = \dfrac{1}{(n+1)!}\langle n+1, X^{n+1}\rangle$
$= \dfrac{n+1}{(n+1)!}\Gamma(n+2) = n+1$
et $c_n = \langle XL_n, L_{n-1}\rangle = \langle XL_{n-1}, L_n\rangle = a_{n-1} = n$.
Finalement, on a trouvé :

$$XL_n = (n+1)\,L_{n+1} + (2n+1)\,L_n + nL_{n-1}$$

Exercice 2.12.

Soit les ensembles de matrices

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

1. a) Vérifier que le produit de deux éléments de $\mathcal{G}$ appartient à $\mathcal{G}$.

b) Justifier que toute matrice de $\mathcal{G}$ est inversible, et que son inverse appartient à $\mathcal{G}$.

c) Montrer que, pour toute matrice $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$, il existe une matrice $H \in \mathcal{H}$ telle que $H^{-1}\,G\,H$ soit une matrice diagonale.

Pour toute matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$, *on définit l'application* Φ_G *qui, à tout polynôme* $P \in \mathbb{R}[X]$ *associe le polynôme* $\Phi_G(P)$ *défini par*

$$\big[\Phi_G(P)\big](X) = P(\alpha X + \beta).$$

2. a) Justifier que Φ_G est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Pour deux matrices G et G' de $\mathcal{G}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, comparer $\Phi_{GG'}(P)$ et $\Phi_G\big(\Phi_{G'}(P)\big)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *fixé.*

3. a) Soit $G \in \mathcal{G}$. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est stable par Φ_G.

On note Ψ_G *la restriction de* Φ_G *à* $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Soit $M_n(G) = (m_{p,q})_{0\le p,q\le n}$ la matrice de Ψ_G dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Expliciter le coefficient générique $m_{p,q}$. (**On prendra garde au fait que les indices commencent à** 0.)

c) Déterminer les valeurs propres de $M_n(G)$.

d) Expliciter $M_n(G)$ lorsque G est une matrice diagonale.

4. a) Soit $G \in \mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$. Justifier que Ψ_G est diagonalisable.

b) Écrire la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ à une base de vecteurs propres de Ψ_G. Expliciter une base de vecteurs propres de Ψ_G.

Solution :

1. a) On a : $GG' = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & \alpha' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta' + \beta\alpha' \\ 0 & \alpha\alpha' \end{pmatrix} \in G$.

b) De même $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta/\alpha \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix} \in G$.

c) Si $H = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où :

$$H^{-1}\,G\,H = \begin{pmatrix} 1 & b+\beta-b\alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

qui est diagonale si et seulement si $b = \dfrac{\beta}{\alpha - 1}$ ($\alpha \neq 1$ car $G \notin \mathcal{H}$), soit pour

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. a) α et β étant fixés, la linéarité de Φ_G est banale.

b) On a $\Phi_{GG'}(P) = P\big[(\alpha\alpha')X + (\beta' + \beta\alpha')\big]$ et d'autre part :

$$\Phi_G\big(\Phi_{G'}(P)\big) = \Phi_G\big[P(\alpha' X + \beta')\big] = P\big[\alpha'(\alpha X + \beta) + \beta'\big] = \Phi_{GG'}(P)$$

3. a) Il suffit de s'assurer que $\deg\big(P(\alpha X + \beta)\big) = \deg\big(P(X)\big)$, ce qui est clair.

b) Pour $q \in [\![0, n]\!]$, $\Psi_G(X^q) = (\alpha X + \beta)^q = \sum\limits_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \alpha^p X^p \beta^{q-p}$, d'où :

$$m_{p,q} = \begin{cases} \binom{q}{p}\alpha^p\, \beta^{q-p} & \text{si } p \leqslant q \\ 0 & \text{si } p > q \end{cases}$$

c) La matrice $M_n(G)$ est triangulaire, donc ses valeurs propres sont α^p pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

d) Si $G = D$ diagonale, on a $\beta = 0$ et $M_n(D) = \operatorname{diag}\big(1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\big)$ est aussi diagonale.

4. a) D'après les questions 1.c) et 2.b), la matrice G est semblable à une matrice diagonale D, et

$$M_n(D) = M_n(H^{-1}GH) = M_n(H)^{-1}\, M_n(G)\, M_n(H)$$

montre que $M_n(G)$ est semblable à la matrice diagonale $M_n(D)$, donc diagonalisable.

b) La matrice de passage est, avec la convention usuelle $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$,

$$M_n(H) = M_n\Big(\begin{pmatrix} 1 & \beta/(\alpha-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big) = \Big(\binom{q}{p} \big(\frac{\beta}{\alpha - 1}\big)^{q-p} \Big)_{0 \leq p,q \leq n}$$

Les vecteurs propres correspondants ont pour coordonnées les colonnes de $M_n(H)$, soit :

$$V_q(X) = \sum_{p=0}^{q} \binom{q}{p} \big(\frac{\beta}{\alpha-1}\big)^{q-p} X^p = \big(X + \frac{\beta}{\alpha - 1}\big)^q, (0 \leqslant q \leqslant n)$$

Exercice 2.13.

Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que l'on peut définir deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a, b_0 = 1$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, a_{k+1} = \frac{1}{2}\big(a_k + \frac{1}{b_k}\big), b_{k+1} = \frac{1}{2}\big(b_k + \frac{1}{a_k}\big)$$

2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = a_k b_k$. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

3. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles et qu'elles convergent. Préciser leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsqu'elle est symétrique vérifiant
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0$.

4.a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.

b) En déduire que, si A est une matrice symétrique définie positive donnée , on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $A(0) = A, B(0) = I_n$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ A(k+1) = \frac{1}{2}\big(A(k) + B(k)^{-1}\big),\ B(k+1) = \frac{1}{2}\big(B(k) + A(k)^{-1}\big)$$

5. Montrer que les suites $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
NB : On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la i-ème ligne et de la j-ème colonne converge.

Solution :

1. La relation de récurrence voulue est :

$$X_{k+1} = F(X_k) \text{ avec } X_k = (a_k, b_k) \text{ et } F(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right)$$

Or la fonction F est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et vérifie clairement $F\left((\mathbb{R}_+^*)^2\right) \subset (\mathbb{R}_+^*)^2$. On montre ainsi de manière évidente par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation :

« X_k est défini et appartient à $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ».

2. On a :

$$u_{k+1} = a_{k+1}b_{k+1} = \frac{1}{4}\big(a_kb_k + 1 + 1 + \frac{1}{a_kb_k}\big) = \frac{1}{4}\big(u_k + 2 + \frac{1}{u_k}\big)$$

Pour tout k, on a donc :

$$u_{k+1} - u_k = \frac{-3u_k^2 + 2u_k + 1}{4u_k} = \frac{(u_k-1)(-3u_k-1)}{4u_k}$$

Or l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{4}\big(x + 2 + \frac{1}{x}\big)$ (on a : $f'(x) = \frac{x^2-1}{4x^2}$) montre que f est minimale en 1, donc $\forall\, x > 0, f(x) \geqslant f(1) = 1$; donc $u_k \geqslant 1$ pour tout $k \geqslant 1$.
Par conséquent $u_{k-1} - u_k \leqslant 0$, donc la suite (u_k) est décroissante et minorée, et elle converge.
Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$, soit $\ell - 1 = 0$ ou $-3\ell - 1 = 0$; par ailleurs $\ell \geqslant 1$ car $u_k \geqslant 1$. Donc $\ell = 1$.

3. On a : $\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \dfrac{\frac{1}{2}(a_k + \frac{1}{b_k})}{\frac{1}{2}(b_k + \frac{1}{a_k})} = \dfrac{a_kb_k + 1}{b_k} \times \dfrac{a_k}{a_kb_k + 1} = \dfrac{a_k}{b_k}$

La suite de terme général $\dfrac{a_k}{b_k}$ est donc constante et vaut $\dfrac{a_0}{b_0} = a$, soit $a_k = a\, b_k$. Comme $a_k \geqslant 0$, on a, lorsque k tend vers $+\infty$:

$$a_k = \sqrt{a_k^2} = \sqrt{\frac{a_k}{b_k}u_k} = \sqrt{au_k} \to \sqrt{a}\,; \quad b_k = \frac{1}{a}a_k \to \frac{1}{a}\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

4. Pour toute matrice S symétrique définie positive, si (λ, X) est un couple (valeur propre, vecteur propre) de S, alors :

$$0 < {}^tXSX = {}^tX\lambda X = \lambda\|X\|^2 \text{ d'où } \lambda > 0$$

On a, par le théorème spectral, également la réciproque : si une matrice symétrique réelle n'a que des valeurs propres positives, elle est définie positive.
Donc 0 n'est pas valeur propre de S et S est inversible. En transposant $SS^{-1} = I$, on montre que S^{-1} est symétrique puis définie positive, puisque ses valeurs propres sont les inverses de celles de S.

On montre facilement que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est stable par somme et par produit par un scalaire strictement positif. On montre alors de manière évidente par récurrence sur $k \geqslant 0$ la relation : « $A(k)$ et $B(k)$ sont bien définies et sont symétriques définies positives ».

5. Par le théorème spectral, la matrice symétrique $A(0) = A$ se diagonalise en $A(0) = PD{}^tP$ avec P orthogonale et D diagonale à valeurs propres strictement positives. Comme $B(0) = I = PI{}^tP$, une récurrence évidente montre que $A(k) = PD(k){}^tP$ et $B(k) = P\Delta(k){}^tP$, où les matrices $D(k)$ et $\Delta(k)$ sont diagonales et vérifient :

$$D_0 = D,\ \Delta_0 = I_n, D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + \Delta_k^{-1}), \Delta_{k+1} = \frac{1}{2}(\Delta_k + D_k^{-1})$$

Si, pour tout k, on note : $D_k = \mathrm{diag}(a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)})$ et $\Delta_k = \mathrm{diag}(b_k^{(1)}, \ldots, b_k^{(n)})$, alors, d'après la question 3, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \sqrt{a_0^{(i)}}, \lim_{k\to+\infty} b_k^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{a_0^{(i)}}}$$

Or d'après la relation $A(k) = PD(k)P^{-1}$, les coefficients de $A(k)$ sont des combinaisons linéaires de $a_k^{(1)}, \ldots, a_k^{(n)}$ donc convergent quand k tend vers $+\infty$ et de même avec $B(k)$.

Exercice 2.14.

Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On considère une famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de p vecteurs de E, où p est un entier tel que $p \geqslant 2$. On dit que cette famille est obtusangle si pour tout couple $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j$ entraîne que $\langle u_i, u_j \rangle < 0$ (ce qui impose aux vecteurs d'être tous non nuls).

1. On veut montrer par récurrence que si une famille de p vecteurs de E est obtusangle, alors toute sous-famille de $p-1$ vecteurs est libre.

a) Montrer que cette propriété est vérifiée pour $p=2$.

b) On suppose que la propriété est vérifiée à un rang $p+1 \geqslant 2$, et on envisage une famille $(u_1,\dots,u_{p+2})$ obtusangle telle que la famille $(u_1,\dots,u_{p+1})$ soit liée.

i) Montrer qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k\rangle > 0$.

ii) En déduire qu'il existe $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $\lambda_k < 0$ et montrer que l'on peut supposer $k=p$.

iii) En considérant la famille $(y_1,\dots,y_{p+1})$ définie par :

$$\forall\, i \in [\![1,p-1]\!],\ y_i = u_i,\ y_p = u_{p+1} - \lambda_p u_p,\ y_{p+1} = u_{p+2},$$

montrer qu'il y a une contradiction.

iv) Conclure.

2. Soit $(e_1,\dots,e_{n+1})$ une famille obtusangle de vecteurs unitaires de E et v le vecteur de E défini par $v = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$.

On veut montrer que $[\forall\, k \in [\![1,n]\!], \langle v, e_k\rangle \geqslant 0] \Longrightarrow [\forall\, k \in [\![1,n]\!], \lambda_k \geqslant 0]$.

a) Soit p la projection orthogonale de E sur $(\mathrm{Vect}(e_{n+1}))^{\perp}$. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\langle p(e_i), p(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle$$

b) Montrer la propriété par récurrence sur n.

Solution :

1. a) Clair puisque qu'une famille réduite à un vecteur non nul est toujours libre.

b) Supposons le résultat acquis à un rang $p+1$ et soit $(u_1,\dots,u_{p+1},u_{p+2})$ une famille obtuse. Supposons $(u_1,\dots,u_p,u_{p+1})$ liée. La famille $(u_1,\dots,u_{p+1})$ étant obtuse, l'hypothèse de récurrence montre que $(u_1,\dots,u_p)$ est libre. Dans ce cas, u_{p+1} est combinaison linéaire de $(u_1,\dots,u_p)$:

$$\text{il existe } (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \text{ telle que } u_{p+1} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k.$$

i) On a : $||u_{p+1}||^2 = \langle u_{p+1}, \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k u_k\rangle = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k \langle u_{p+1}, u_k\rangle > 0$.

ii) La famille étant obtusangle, et la somme précédente strictement positive, il existe k tel que $\lambda_k < 0$. Quitte à modifier l'ordre des vecteurs, on peut supposer que $k=p$, donc $\lambda_p < 0$.

iii) On montre facilement que la famille $(y_1,\dots,y_{p+1})$ est obtusangle. En effet :

⋆ Si i et j sont dans $[\![1,p-1]\!]$ et distincts, on a $\langle y_i, y_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle < 0$.

⋆ Pour $i \in [\![1,p-1]\!]$, $\langle y_i, y_p\rangle = \langle u_i, u_{p+1} - \lambda_p u_p\rangle = \langle u_i, u_{p+1}\rangle - \lambda_p \langle u_i, u_p\rangle < 0$

$\langle y_i, y_{p+1}\rangle = \langle u_i, u_{p+2}\rangle < 0$

⋆ Enfin $\langle y_p, y_{p+1}\rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2} - \lambda_p u_p\rangle = \langle u_{p+1}, u_{p+2}\rangle - \lambda_p \langle u_{p+1}, u_p\rangle < 0$.

Par hypothèse de récurrence, la famille $(y_1,\dots,y_p)$ est donc libre. Or :

$$u_{p+1} - \lambda_p u_p = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k - \lambda_p u_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k u_k \implies y_p = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k y_k$$

ce qui est contradictoire.

iv) En conclusion, si la propriété est vérifiée au rang $p+1$, elle reste vérifiée au rang $p+2$ (car on peut toujours ranger les $p+2$ vecteurs de la famille obtuse de sorte que les $p+1$ vecteurs considérés soient les $p+1$ premiers de cette famille) : elle est donc vérifiée pour tout $p \geqslant 2$.

2. a) D'après le cours : $p(e_i) = e_i - \langle e_i, e_{n+1}\rangle e_{n+1}$ pour tout i. Donc :

$$\langle p(e_i), p(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle$$

b) La propriété est vérifiée pour $n = 1$.
Supposons-la vérifiée pour un certain $n \geqslant 1$ et soit $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ une famille obtusangle de vecteurs unitaires . Soit v défini dans l'énoncé tel que $\langle v, e_i\rangle \geqslant 0$.

On a $p(v) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k p(e_k)$ (car $p(e_{n+1}) = 0$). Un calcul analogue au précédent donne :

$$\langle p(v), p(e_j)\rangle = \langle v, e_j\rangle - \langle v, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle \geqslant 0$$

D'autre part :

$$\langle p(e_i), p(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle - \langle e_i, e_{n+1}\rangle \times \langle e_j, e_{n+1}\rangle < 0$$

On applique alors l'hypothèse de récurrence au vecteur $p(v)$ et à la famille obtusangle $(p(e_1), \ldots, p(e_n))$.
Il vient, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$: $\lambda_j \geqslant 0$.
Enfin :

$$0 \leqslant \langle v, e_{n+1}\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_k, e_{n+1}\rangle + \lambda_{n+1} ||e_{n+1}||^2$$

Comme $\lambda_k \langle e_k, e_{n+1}\rangle \leqslant 0$, on obtient : $\lambda_{n+1} \geqslant 0$.

Exercice 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et E un espace vectoriel réel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E. On note I l'endomorphisme identité de E.
On suppose qu'il existe k endomorphismes non nuls de E, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ et k réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tels que pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$u^m = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^m p_i$$

1. a) Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, on a : $P(u) = \sum\limits_{i=1}^{k} P(\lambda_i) p_i$.

b) En déduire que le polynôme $M(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_k)$ est annulateur de u. Qu'en déduit-on sur les valeurs propres de u ?

2. Pour tout ℓ de $[\![1, k]\!]$, on pose : $L_\ell(X) = \prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i \neq \ell}} \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_\ell - \lambda_i}\right)$.

a) Montrer que pour tout ℓ de $[\![1, k]\!]$: $p_\ell = L_\ell(u)$.

b) En déduire que $\operatorname{Im} p_\ell \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, puis que les valeurs propres de u sont exactement les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

3. Montrer que pour tout (i, j) de $[\![1, k]\!]^2$, on a : $p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } j = i \end{cases}$.

4. Montrer que u est diagonalisable.

Solution :

1. a) La relation proposée est vérifiée pour tout monôme X^k, $k \in \mathbb{N}$. Elle est donc vérifiée pour tout polynôme, par un argument de linéarité.

b) Pour le polynôme M dont les racines sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, il vient :

$$M(u) = \sum_{i=1}^{k} M(\lambda_i) p_i = 0.$$

Ainsi le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de M donc dans $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$.

2. a) On remarque que les polynômes proposés sont les polynômes de Lagrange aux points $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, c'est-à-dire que l'on a $L_\ell(\lambda_i) = \delta_{i,\ell}$ (symbole de Kronecker).
Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question 1.a) au polynôme L_ℓ, et :

$$L_\ell(u) = p_\ell$$

b) On a $(u - \lambda_\ell I) \circ L_\ell(u) = M(u) = 0$, donc $(u - \lambda_\ell I) \circ p_\ell = 0$, ce qui entraîne que $\operatorname{Im} p_\ell \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I)$. Comme $\dim(\operatorname{Im} p_\ell) \neq 0$, il en résulte que $\operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I) \neq \{0\}$ et λ_ℓ est valeur propre de u.

3. On a pour $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$, car $p_i \circ p_j = L_i(u) \circ L_j(u) = L_i L_j(u) = 0$, puisque $L_i L_j$ est divisible par M.

Pour $m = 0$, l'hypothèse de l'exercice donne $I = \sum_{i=1}^{k} p_i$. Donc

$$p_j = I \circ p_j = \sum_{i=1}^{k} p_i \circ p_j = p_j^2.$$

4. La relation $I = \sum_{i=1}^{k} p_i$ permet d'obtenir, pour tout vecteur s de E : $x = \sum_{i=1}^{k} p_i(x)$, ce qui montre que

$$E = \operatorname{Im}(p_1) + \operatorname{Im}(p_2) + \cdots + \operatorname{Im}(p_k)$$

Cette somme est directe. En effet, si $0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, avec $x_i \in \operatorname{Im}(p_i)$, c'est-à-dire $x_i = p_i(x_i)$, alors, par la question 3. :

$$0 = p_j(0) = p_j^2(x_j) = p_j(x_j) = x_j.$$

Donc :

$$E = \operatorname{Im}(p_1) \oplus \operatorname{Im}(p_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im}(p_k)$$

Enfin, comme $\operatorname{Im} p_\ell \subseteq \operatorname{Ker}(u - \lambda_\ell I)$, il vient, car les sous-espaces propres sont toujours en somme directe :

$$E \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda_1 I)) \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_2 I) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(u - \lambda_k I)$$

D'où en fait l'égalité et u est diagonalisable.

Exercice 2.16.

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On note S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de S_n dont les valeurs propres sont strictement positives : on note S_n^{++}, l'ensemble de ces matrices.

Soit A une matrice de S_n^{++}.

1. Justifier qu'il existe une matrice P de $GL_n(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de A, et telles que $A = PD^tP$.

2. Montrer qu'il existe R de S_n^{++} telle que $A = R^2$. On dit que R est une racine carrée de A.

3. Soient B et C deux racines carrées de A, toutes deux strictement positives.

Montrer que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres. En déduire que la matrice A admet une unique racine carrée dans S_n^{++} que l'on note $A^{1/2}$.

4. On cherche dans cette question à exprimer $A^{1/2}$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout j de $[\![1, p]\!]$, on pose :

$$L_j(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq p \\ i \neq j}} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

a) Montrer que $(L_1, \ldots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme T de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que, pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $T(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) En déduire une expression de $A^{1/2}$ en fonction de A.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} n & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n \end{pmatrix}$. Montrer que A est dans S_n^{++} et déterminer $A^{1/2}$.

Solution :

1. La matrice A est symétrique réelle : elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Il existe donc une matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont strictement positifs et une matrice orthogonale P telles que $A = PD^tP$.

2. En notant Δ la matrice diagonale dont les éléments sont les racines carrées positives des éléments de D, il vient :

$$R = P\Delta^tP \implies R^2 = P\Delta^{2t}P = A$$

3. Montrons que B et C ont les mêmes valeurs propres et les mêmes vecteurs propres.

Soit λ réel, et X matrice colonne tels que $BX = \lambda X$. Alors $B^2X = \lambda^2 X = AX = C^2X$. Ainsi $(C^2 - \lambda^2 I)X = 0$. Or $0 = (C^2 - \lambda^2 I)X = (C + \lambda I)(C - \lambda I)X$. La matrice C n'ayant que des valeurs propres strictement positives, la matrice $C + \lambda I$ est inversible et $(C - \lambda I)X = 0$. Ceci montre que λ est valeur propre de C de vecteur propre associé X. En échangeant les rôles de B et C, on obtient le résultat escompté.

4. a) Ces polynômes sont de degré $p-1$ et si $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i(X) = 0$, alors, pour tout indice j, $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i L_i(\lambda_j) = \alpha_j = 0$, ce qui montre que la famille donnée est libre, donc est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

b) L'écriture de tout polynôme P de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ dans cette base est :

$$P = \sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i) L_i$$

Il suffit donc de choisir $P(X) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} L_i$. L'unicité provient du fait que $(L_1, \dots, L_p)$ est une base de $\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

c) On pose $B = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i} L_i(A)$ qui est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si λ est une valeur propre de A de vecteur propre associé X, alors pour tout polynôme P : $P(A)(X) = P(\lambda)X$. Ainsi $L_i(A)(X) = L_i(\lambda)X$.

Or $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j}$ montre que si X_j est vecteur propre associé à la valeur propre λ_j, $P(A)(X_j) = \sqrt{\lambda_j} X_j$.

On en déduit que $B^2 = A$. La matrice B est symétrique (car A l'est) et dans S_n^{++} puisque ses valeurs propres sont $(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p})$. On conclut par l'unicité de la racine carrée.

5. La matrice A est symétrique réelle. On peut l'écrire $A = (n+1)I - J$, où la matrice J n'est formée que de 1. Les valeurs propres de J sont 0 et n ; les valeurs propres de A sont $n+1$ et 1. Elle est donc dans S_n^{++}.

Par les questions précédentes, $A^{1/2} = L_1(A) + \sqrt{n+1} L_{n+1}(A)$, avec

$$L_1(X) = \frac{X - n - 1}{-n} \text{ et } L_{n+1}(X) = \frac{X-1}{n}$$

Après calculs :

$$A^{1/2} = \frac{1}{n}\left((\sqrt{n+1} - 1)A - (\sqrt{n+1} - (n+1))I\right)$$

Exercice 2.17.

1. a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $x \neq 1$: $Q(x) = \dfrac{1}{x-1} \displaystyle\int_1^x P(t)\, dt$.

b) Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P \mapsto Q$ ainsi définie est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

3. Écrire la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son inverse A^{-1}. Les matrices A et A^{-1} sont-elles diagonalisables ?

4. a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$. Le complexe α est-il racine de $f^{-1}(Q)$? Avec quel ordre de multiplicité ?

b) En déduire les sous-espaces propres de l'endomorphisme f^{-1} puis montrer qu'ils sont aussi les sous-espaces propres de f.

Solution :

1. a) Une primitive F du polynôme P est un polynôme de degré $n+1$; ainsi :

$$\frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)dt = \frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$

Comme 1 est racine du polynôme $F(X)-F(1)$, on peut simplifier par $(x-1)$ et le quotient est bien une fonction polynôme de degré n.

De plus Q est parfaitement définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, donc en une infinité de points et le polynôme associé encore noté Q est parfaitement défini.

b) La linéarité de f résulte de la linéarité de l'intégration et donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

2. On a montré : $\forall\, P, \deg f(P) = \deg P$. Donc f est une application linéaire conservant le degré, l'image par f de la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ est une famille graduée en degré qui est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Ainsi, f transforme une base en une base : elle est donc bijective.

On a : $\forall\, x \in \mathbb{R}, (x-1)Q(x) = (x-1)f(P)(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)dt$, d'où en dérivant les deux membres et en revenant à la notation polynomiale : $(X-1)Q' + Q = P$ et

$$f^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]; Q \mapsto (X-1)Q' + Q$$

3. En écrivant l'image par f de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:
$f(X^k) = \dfrac{1+X+\cdots+X^k}{k+1}$, soit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

et A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement à la même base.
Comme $f^{-1}(X^k) = (k+1)X^k - kX^{k-1}$, il vient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}$$

Ces deux matrices sont triangulaires. Elles possèdent chacune $n+1$ valeurs propres distinctes (qui se lisent sur leurs diagonales) , ce qui est une condition suffisante de diagonalisabilité.

4. a) On écrit $Q = (X-\alpha)^k Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors :
$f^{-1}(Q) = P = (X-1)Q' + Q$, donc :

$$\begin{aligned} f^{-1}(Q) &= (X-1)[k(X-\alpha)^{k-1}Q_1 + (X-\alpha)^k.Q_1'] + (X-\alpha)^k Q_1 \\ &= (X-\alpha)^{k-1}[k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1')] \\ &= (X-\alpha)^{k-1}R(X) \end{aligned}$$

en notant R la quantité $k(X-1)Q_1 + (X-\alpha)(Q_1 + (X-1)Q_1'$. De plus $R(\alpha) = k(\alpha-1)Q_1(\alpha)$. On a : $k \neq 0$ et $Q_1(\alpha) \neq 0$ d'où :

- Si $\alpha \neq 1$: α est racine d'ordre $k-1$ de $f^{-1}(Q)$.
- Si $\alpha = 1$: $R = (X-1)[(k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'] = (X-1)S$ en posant $S = (k+1)Q_1 - (X-1)Q_1'$. On a : $S(1) = (k+1)Q_1(1) \neq 0$ car $k+1 \neq 0$ et $Q_1(1) = Q_1(\alpha) \neq 0$ et 1 est racine d'ordre k de P.

b) Soit Q un vecteur propre de f^{-1} ; $f^{-1}(Q) = \lambda.Q$, avec $\lambda \neq 0$ car f^{-1} est inversible. Donc toute racine complexe de Q a le même ordre de multiplicité dans Q et dans $f^{-1}(Q)$. D'après la question précédente, 1 est la seule racine possible de Q, d'où :

$$Q(X) = \alpha(X-1)^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n,\ \alpha \in \mathbb{R}^*$$

On a alors : $f^{-1}(Q) = (X-1)Q' + Q = (k+1)Q$. Ainsi Q est associé à la valeur propre $k+1$.
Les sous-espaces propres de f^{-1} sont : $E_0, E_1, \dots, E_n$ avec $E_k = \mathrm{Vect}((X-1)^k)$.
Si Q est vecteur propre de f^{-1} alors $f^{-1}(Q) = \lambda.Q$, donc $Q = \lambda f(Q)$ et $f(Q) = \frac{1}{\lambda}Q$. Donc les vecteurs propres de f^{-1} sont vecteurs propres de f et il n'y en a pas d'autres car f et f^{-1} sont diagonalisables.

Exercice 2.18.

Soit n un entier $\geqslant 2$. On considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices A vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) si $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, alors $a_{i,j} \geqslant 0$, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$;

ii) si on note $U = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $AU = U$.

1. $\mathcal{S}$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. a) Soit $A \in \mathcal{S}$. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b) Soit λ une valeur propre (réelle ou complexe) de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. En considérant une coordonnée de module maximal de X, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

3. Soit $z_1, \dots, z_p$, p nombres complexes non nuls ($p \geqslant 2$) vérifiant :

$$\Big|\sum_{i=1}^{p} z_i\Big| = \sum_{i=1}^{p} |z_i|$$

Montrer qu'il existe des réels positifs $\rho_1, \dots, \rho_p$ et $i_0 \in [\![1,p]\!]$, tels que pour tout j de $[\![1,p]\!]$, on a : $z_j = \rho_j z_{i_0}$.

4. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. On pose : $|x_k| = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$

a) Montrer qu'il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_j = \lambda x_k$.

b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul q tel que $\lambda^q = 1$.

Solution :

1. a) $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il ne contient pas la matrice nulle.

2. a) Le réel $\lambda = 1$ est valeur propre, puisque le vecteur U est un vecteur propre associé.

b) Soit k un indice tel que $|x_k| = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. En considérant la $k^{\text{ème}}$ équation du système $AX = \lambda X$, il vient : $\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$.

Donc : $|\lambda||x_k| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}|x_j| \leqslant 1 \times |x_k|$.

Comme $x_k \neq 0$ (autrement on aurait $X = 0$), il vient : $|\lambda| \leqslant 1$.

3. On effectue une démonstration par récurrence sur p.

• si $p = 1$, alors $z_1 = 1 \times z_1$.

• supposons la propriété vérifiée pour $(p-1)$ nombres complexes. Soit $z_1, \dots, z_p$, p nombres complexes qui vérifient : $\Big|\sum_{i=1}^{p} z_i\Big| = \sum_{i=1}^{p} |z_i|$.

On pose : $u = z_1 + \cdots + z_{p-1}$ et $v = z_p$. On a alors, par l'inégalité triangulaire :

$$\sum_{i=1}^{p} |z_i| = \Big|\sum_{i=1}^{p} z_i\Big| = |u+v| \leqslant |u| + |v| \leqslant \sum_{i=1}^{p-1} |z_i| + |z_p|$$

On a donc en fait égalité dans ces inégalités et $|u+v| = |u| + |v|$ ainsi que $\Big|\sum_{i=1}^{p-1} z_i\Big| = \sum_{i=1}^{p-1} |z_i|$. Par hypothèse de récurrence, il existe un réel $\rho \geqslant 0$ tel que $v = \rho u$ et il existe $\rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$ réels positifs tels que $z_i = \rho_i z_1$ (par exemple). La relation $v = \rho u$ donne enfin

$$z_p = \rho\Big(\sum_{i=1}^{p-1} z_i\Big) = \rho\Big(\sum_{i=1}^{p-1} \rho_i\Big) z_1$$

On conclut par le principe de récurrence.

4. On suppose dans cette question que $|\lambda| = 1$. En reprenant la méthode développée dans la question 2, il vient :

$$|x_k| = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |x_j| \leqslant |x_k|$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et :

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} |a_{k,j} x_j|$$

Par la question 3, il existe i_0, des réels positifs $\rho_1, \ldots, \rho_n$ tels que pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $a_{k,j} x_j = \rho_j a_{k,i_0} x_{i_0}$.
Notons $J = \{j \in [\![1, n]\!] / a_{k,j} \neq 0\}$. Ainsi : $\lambda x_k = \sum_{j \in J} a_{k,j} x_j = a_{k,i_0} x_{i_0} \sum_{j \in J} \rho_j$.
Soit : $|x_k| \leqslant \big(a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j\big) |x_{i_0}| \leqslant \big(a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j\big) |x_k|$, ce qui montre que $a_{k,i_0} \sum_{j \in J} \rho_j = 1$ et $\lambda x_k = x_{i_0}$.

Donc $|x_k| = |x_{i_0}|$, et x_{i_0} est également une coordonnée de module maximal. On recommence ce processus, et comme le vecteur X n'a qu'un nombre fini de coordonnées, on finira par retrouver une coordonnée déjà obtenue, il existe donc $q \in \mathbb{N}^*$ et k_1 tels que $x_{k_1} = \lambda^q x_{k_1}$.
Donc $\lambda^q = 1$.

Exercice 2.19.

On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n ($n \geqslant 1$) à coefficients réels.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit le produit de Schur $A \otimes B$ des matrices A et B en posant :

$$A \otimes B = (a_{i,j} b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} & a_{1,2}b_{1,2} & \ldots & a_{1,n}b_{1,n} \\ a_{2,1}b_{2,1} & a_{2,2}b_{2,2} & \ldots & a_{2,n}b_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1}b_{n,1} & \ldots & \ldots & a_{n,n}b_{n,n} \end{pmatrix}$$

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et on confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée. On dit qu'une matrice A est positive (notation $A \geqslant 0$) si elle est symétrique et a toutes ses valeurs propres positives ou nulles. Lorsque A et B sont symétriques, on écrit $A \leqslant B$ si $B - A \geqslant 0$.

1. Montrer qu'une matrice A est positive si et seulement si elle est symétrique et vérifie $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. En déduire que la somme de deux matrices positives est encore une matrice positive.

2. Soit V un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice $B = V\,{}^tV$ est positive.

3. Soit R une matrice positive non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un entier $m \in \{1, \ldots, n\}$ et une famille $(V_1, \ldots, V_m)$ de vecteurs (colonnes) orthogonaux non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que :

$$R = \sum_{k=1}^{m} V_k\,{}^tV_k$$

4. Soit A une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et V un vecteur colonne. Montrer que $A \otimes V\,{}^tV$ est une matrice positive. En déduire que le produit de Schur $A \otimes B$ de deux matrices positives A et B est encore une matrice positive.

Solution :

1. Soit A une matrice positive. La matrice A est symétrique réelle, il existe donc P orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonale telles que $A = PD^tP$. Comme A est positive, ses valeurs propres sont positives et donc les coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs ou nuls.
Alors, pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle Ax, x\rangle = {}^tx^tAx = {}^txAx = {}^txPD^tPx = {}^tyDy$$

avec $y = {}^tPx = (y_1, \dots, y_n)$. Ainsi :

$$\langle Ax, x\rangle = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geqslant 0$$

Réciproquement, si A est une matrice symétrique telle que $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, alors pour $\lambda \in \operatorname{Spec} A$, en notant x un vecteur propre associé, on a :

$$0 \leqslant \langle Ax, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

et donc $\lambda \geqslant 0$.

Si A et B sont positives, alors $A + B$ est symétrique réelle et pour tout vecteur x, on a : $\langle (A+B)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle + \langle Bx, x\rangle \geqslant 0$ et $A + B$ est encore positive.

2. Comme ${}^tB = {}^t(V^tV) = {}^t({}^tV)^tV = V^tV = B$, on voit déjà que B est symétrique (et réelle).
De plus, pour tout vecteur x, on a :
$\langle Bx, x\rangle = {}^txBx = {}^txV^tVx = {}^t({}^tVx)({}^tVx) = ({}^tVx)^2 \geqslant 0$
(la matrice ${}^tVx$ est produit d'une matrice ligne par une matrice colonne, donc est une matrice carrée d'ordre 1, identifiée à son unique terme)
Ainsi B est une matrice positive.

3. On peut écrire $R = PD^tP$, avec P orthogonale et D diagonale. Quitte à permuter les colonnes de P, on peut supposer que D est de la forme

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0)$$

où les nombres λ_1, λ_m , qui sont positifs ou nuls puisque R est positive, sont en fait strictement positifs.

Notons $P = (p_{i,j})$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $V_k = \sqrt{\lambda_k} \begin{pmatrix} p_{1,k} \\ \vdots \\ p_{n,k} \end{pmatrix}$.

Les colonnes $V_1, \dots, V_m$ sont non nulles et deux à deux orthogonales, tandis que les colonnes $V_{m+1}, \dots, V_n$ (si $m < n$) sont nulles.
On a : $(V_k{}^tV_k)_{i,j} = \lambda_k p_{i,k} p_{j,k}$, donc pour tout couple (i, j) :

$$(\sum_{k=1}^{m} V_k{}^tV_k)_{i,j} = (\sum_{k=1}^{n} V_k{}^tV_k)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\lambda_k p_{j,k} = (PD^tP)_{i,j}$$

Ainsi :

$$R = PD^tP = \sum_{k=1}^{m} V_k{}^tV_k$$

4. Posons : $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $C = A \oplus V^tV = (c_{i,j})$.

On a : $c_{i,j} = a_{i,j} v_i v_j$, et comme A est symétrique, il en est de même de C. De plus, on a pour tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\langle Cx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_i v_j x_i x_j = \langle Ay, y\rangle \geqslant 0$$

avec $y = (v_1x_1, \dots, v_nx_n)$.
Par conséquent, la matrice C est bien positive.

En utilisant la question précédente et la question 1, on écrit $B = \sum_{k=1}^{m} V_k {}^tV_k$ et on en déduit immédiatement que $A \otimes B = \sum_{k=1}^{m} A \otimes \big(V_k\, {}^tV_k\big) \geqslant 0$ comme somme de matrices positives.

Exercice 2.20.

Dans tout l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note U la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, I la matrice identité d'ordre n et $E = \mathrm{Vect}(I, U)$, le sous-espace vectoriel engendré par U et I.

1. Montrer que (I, U) forme une base de E.

2. Les éléments de E sont-ils inversibles avec un inverse dans E ? Sont-ils diagonalisables ?

On pose : $M_0 = \frac{1}{n}U$ *et* $M_1 = I - M_0$.

3. a) Montrer que M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs formant une base de E.

b) Soit $A = \alpha I + \beta U \in E$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A^p dans la base (M_0, M_1).

Soit S l'ensemble des matrices $H = (h_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} \forall\, i,j \in [\![1,n]\!], h_{i,j} \geqslant 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n \implies \sum_{j=1}^{n} h_{i,j} = 1 \end{cases}$.

4. Soit A un élément de $E \cap S$. Montrer que les deux suites réelles $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}, A^p = a_p M_0 + b_p M_1$$

sont convergentes sauf éventuellement lorsque $n = 2$.

Solution :

1. U n'est pas une matrice scalaire, donc la famille (I, U) est libre. Etant génératrice de E, c'est une base de E et $\dim(E) = 2$.

2. $\star$ La matrice $A = \alpha I + \beta U$ est inversible **dans** E si et seulement s'il existe $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tels que $(\alpha I + \beta U)(\alpha' I + \beta' U) = I$. On obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha\alpha' = 1 \\ \beta'(\alpha + n\beta) = -\beta\alpha' \end{cases}$$

Ainsi, A est inversible dans E si et seulement si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq -n\beta$. Son inverse est alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha}I - \frac{\beta}{\alpha(\alpha + n\beta)}U$$

$\star$ La matrice U est de rang 1 ; ses valeurs propres sont 0, de sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}\, U$, et n de sous-espace propre de dimension 1 engendré par une colonne de U. La matrice I est diagonale. Il existe une matrice P orthogonale (car U est symétrique tout comme I) telle que $U = PD^tP$. Et $A = \alpha U + \beta I = P(\alpha D + \beta I)^tP$. Ainsi toutes les matrices de E sont diagonalisables. Enfin, dans une base de diagonalisation de U, il vient :

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \alpha & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & n\beta + \alpha \end{pmatrix} {}^tP$$

3. a) On vérifie que $M_0^2 = \frac{1}{n^2}U^2 = M_0$, et $M_1^2 = I + M_0^2 - 2M_0 = I - M_0 = M_1$.

On remarque que $M_0 M_1 = M_1 M_0 = 0$.

On a $\alpha M_0 + \beta M_1 = 0 \iff \beta I + (\frac{\alpha - \beta}{n})U = 0$, qui n'admet que $\alpha = \beta = 0$ comme solution. Donc, M_0 et M_1 sont deux matrices de projecteurs appartenant à E et formant une base de E.

b) En écrivant $A = \alpha I + \beta U = \alpha(M_0 + M_1) + n\beta M_0$, il vient :

$$A = (\alpha + n\beta)M_0 + \alpha M_1$$

Les matrices M_0 et M_1 commutant, on peut utiliser la formule du binôme et par la remarque précédente :

$$A^p = (\alpha + n\beta)^p M_0 + \alpha^p.M_1.$$

4. Dire que $A = \alpha I + \beta U \in E \cap S$ équivaut à dire que $\begin{cases} \beta \geqslant 0 \\ \alpha + \beta \geqslant 0 \\ \alpha + n\beta = 1 \end{cases}$.

Or $\beta \geqslant 0$ entraîne $\alpha = 1 - n\beta \leqslant 1$, et $\beta \geqslant -\alpha$ entraîne $\alpha \leqslant 1 + n\alpha$, soit $\alpha \geqslant \dfrac{-1}{n-1}$. Ainsi :

$$\alpha \in \left[\frac{-1}{n-1}, 1\right] \subset [-1, 1]$$

On a donc : $A^p = M_0 + \alpha^p M_1$.

- Si $-1 < \alpha < 1$: $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha^p = 0$ et $(A^p)_p$ converge vers M_0.
- Si $\alpha = 1$, alors $\beta = 0$ et $A = M_0 + M_1 = I$, donc $A^p = I$.
- Si $\alpha = -1$, alors $\beta = \dfrac{2}{n}$, $A = M_0 - M_1 \implies A^p = M_0 + (-1)^p M_1$ et la suite $(A^p)_p$ ne converge pas.

Mais dans ce cas $\alpha + \beta \geqslant 0 \implies \beta = \dfrac{2}{n} \geqslant 1 \implies n \leqslant 2 \implies n = 2$.

Dans ce cas : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^{2p} = I$, $A^{2p+1} = A$.

Ainsi, la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ diverge si et seulement si $n = 2$ et $\alpha = -1$.

Exercice 2.21.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 4. On note U l'ensemble des vecteurs de norme 1 de E.
Un endomorphisme q de E est dit orthogonal si : $\forall\, x, y \in E$, $\langle q(x), q(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
Un endomorphisme orthogonal q est appelé quart de tour si $q^2 = -Id$, où Id représente l'application identité.

On note Q l'ensemble des quarts de tour de E et on pose : $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'un quart de tour transforme tout vecteur x de E en un vecteur orthogonal à x.

2. a) Soit q un endomorphisme de E dont la matrice dans une base orthonormée est égale à M. Montrer que q est un quart de tour.

b) Soit q un quart de tour. Montrer que quel que soit $u \in U$, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de E avec $e_1 = u$ et telle que la matrice de q dans $\mathcal{B}$ soit égale à M.

3. Soit $q \in Q$ et $u \in U$. On note P le plan engendré par u et $q(u)$.

a) Montrer que $(u, q(u))$ est une base orthonormée de P.

b) Montrer que le plan P est invariant par q. Décrire géométriquement la restriction de q au plan P.

c) Si v est un vecteur unitaire de P, il existe un nombre réel θ tel que

$$v = \cos(\theta)u + \sin(\theta)q(u)$$

Déterminer les matrices de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ et de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$.

4. Soit $q \in Q$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $f = \cos(\alpha)Id + \sin(\alpha)q$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal.

b) Montrer que tout vecteur unitaire u est contenu dans un plan P invariant par f. Décrire géométriquement la restriction de f à P.

Solution :

1. Soit $x \in E$ et $q \in Q$. On calcule le produit scalaire entre x et son image par q.

$$\begin{aligned}\langle q(x), x\rangle &= \langle q(x), -q^2(x)\rangle \qquad (\text{car } q^2 = -Id)\\ &= -\langle q(x), q(q(x))\rangle \qquad (\text{car } q \text{ est orthogonal})\end{aligned}$$

Ainsi, $\langle q(x), x\rangle = 0$ et $q(x)$ est orthogonal à x

2. a) $\star$ On vérifie aisément que $M^2 = -I_4$.

$\star$ On vérifie également que ${}^tMM = I_4$ et donc pour toutes colonnes X et Y :

$${}^tXY = {}^tX({}^tMM)Y = {}^t(MX)(MY)$$

Ce qui traduit exactement la propriété : $\forall\, x, y, \langle x, y\rangle = \langle q(x), q(y)\rangle$.

b) Remarquons que pour tout vecteur x, on a en particulier $\|q(x)\| = \|x\|$, donc $\operatorname{Ker} q = \{0\}$ et un endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

$\star$ Soit $u \in U$, $q(u)$ est orthogonal à u. On note $e_1 = u$ et $e_2 = q(u)$. On remarque que $q(e_2) = q^2(u) = -u = e_1$. Comme e_1 et e_2 sont orthogonaux et de norme 1, donc non nuls, ils forment une famille libre.

$\star$ Soit e_3 un vecteur unitaire orthogonal à e_1 et e_2 et posons $e_4 = q(e_3)$. Le vecteur e_3 est orthogonal à e_1 et e_2, donc e_4 est orthogonal à $q(e_1) = e_2$ et à $q(e_2) = -e_1$, donc à e_1. En clair (e_3, e_4) est en fait une base (orthonormée) du supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ et (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Relativement à cette base, la matrice de q est M.

3. a) D'après la question 1, u et $q(u)$ sont deux vecteurs orthogonaux de norme 1, donc la famille $(u, q(u))$ est libre. Comme P est engendré par u et $q(u)$, cette famille est bien une base orthonormée de P.

b) Soit $x \in P$. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $x = \lambda u + \mu q(u)$.

Ainsi, $q(x) = \lambda q(u) - \mu u \in P$ et P est stable par q. Comme la matrice de $q_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $q_{|P}$ est la rotation d'angle $\pi/2$ (dans le plan P ainsi orienté par la base $(u, q(u))$).

c) On remarque que $q(v) = -\sin\theta u + \cos\theta q(u)$. Ainsi, la matrice de passage de la base $(u, q(u))$ à la base $(v, q(v))$ vaut $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. On retrouve une matrice de rotation et la matrice de passage de la base $(v, q(v))$ à la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$.

4. a) Soient $x, y \in E$.

$$\begin{aligned}\langle f(x), f(y)\rangle &= (\cos^2\alpha)\langle x, y\rangle + \cos\alpha\sin\alpha(\langle x, q(y)\rangle + \langle q(x), y\rangle)\\ &\qquad + (\sin^2\alpha)\langle q(x), q(y)\rangle\\ &= \langle x, y\rangle + \cos\alpha\sin\alpha(\langle -q^2(x), q(y)\rangle + \langle q(x), q(y)\rangle)\\ &= \langle x, y\rangle\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien un endomorphisme orthogonal.

b) Soit $u \in U$. Comme précédemment, on définit le plan P engendré par la famille $(u, q(u))$. On montre aisément que ce plan est stable par f. De plus, la matrice de $f_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Ainsi, la matrice de $f_{|P}$ dans la base $(u, q(u))$ est une matrice de rotation.