1

ANALYSE

Exercice 1.1.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. On admet que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et on note γ sa limite.

1. On pose pour tout $n \geqslant 2$, $v_n = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

 a) Montrer que la série de terme général $v_{2n} + v_{2n+1}$ est convergente.

 b) En déduire que la série de terme général v_n est convergente.

 On pose $S = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

2. Justifier les inégalités :

$$\forall\, n \geqslant 3, \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\, dt \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \text{ et } \forall\, n \geqslant 4, \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$$

 On se propose maintenant de calculer S.

Pour $n \geqslant 3$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \quad \text{et} \quad a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

3. En utilisant la question 2, montrer que :

 a) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

 b) la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est convergente.

4. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, on a : $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \ln(2) \times \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En déduire une expression de S_{2n} à l'aide de a_n, a_{2n} et u_n.

5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ (on exprimera cette limite en fonction de γ et de $\ln(2)$). Déterminer alors S.

Solution :

1. a) $v_{2n} + v_{2n+1} = \frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} = \frac{\ln(2n)}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2n+1} \ln(1 + \frac{1}{2n})$

Le premier terme est équivalent à $\frac{\ln n}{4n^2}$ et le second est équivalent à $-\frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n}$, soit à $-\frac{1}{4n^2}$, donc est négligeable devant le premier. Ainsi :

$$v_{2n} + v_{2n+1} \underset{(\infty)}{\sim} \frac{\ln n}{4n^2}$$

Donc $v_{2n} + v_{2n+1}$ est négligeable devant $\frac{1}{n^{3/2}}$ et la convergence en résulte.

b) Avec des notations évidentes, la suite (v_{2n+1}) est donc convergente et comme $v_{2n+2} \to 0$, la suite (v_{2n+2}) est convergente de même limite. Ainsi la suite (v_n) converge.

2. On étudie succinctement la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{\ln t}{t}$. On constate qu'elle est strictement décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Ainsi, pour $n \geqslant 3$, la fonction φ est majorée par $\varphi(n)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ et, pour $n \geqslant 4$, minorée par cette même quantité sur l'intervalle $[n-1, n]$. En découlent les deux inégalités demandées.

3. a) On a, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n+1))^2}{2} + \frac{(\ln(n))^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t} dt \leqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante.

b) Également :

$$\begin{aligned} t_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(1)}{1} + \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{\ln(k)}{k} + \frac{\ln(n)}{n} \\ &\geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} + \big[\tfrac{1}{2}(\ln t)^2\big]_3^n \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$a_n = t_n - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \geqslant \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2 \geqslant \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}(\ln 3)^2$$

Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq 3}$ est minorée. Comme elle est décroissante, elle converge.

4. On calcule :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \ln 2 = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{\ln(2k)}{k} - \frac{\ln k}{k}\Big) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{2k} - t_n$$

Par ailleurs :

$$S_{2n} + t_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{\ln k}{k} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2 \sum_{k=1,(k=2p)}^{2n} \frac{\ln k}{k} = 2\sum_{p=1}^{n} \frac{\ln(2p)}{2p}$$

On soustrait les deux résultats obtenus pour obtenir la relation demandée.
On a donc :

$$S_{2n} = a_n + \frac{(\ln n)^2}{2} - a_{2n} - \frac{(\ln(2n))^2}{2} + \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \ln 2$$

et, en développant, on obtient :

$$S_{2n} = a_n - a_{2n} + u_n \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

5. On a donc : $\lim S_{2n} = \lim a_n - \lim a_{2n} + \gamma \ln 2 - \dfrac{(\ln 2)^2}{2} = \gamma \ln 2 - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}$

Comme le terme général de la série alternée de somme S tend vers zéro, on a :

$$S = \lim S_{2n} = \gamma \ln 2 - \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

Exercice 1.2.

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est dite *absolument monotone* (en abrégé A.M.) sur $]a, b[$ si elle est de classe C^∞ sur $]a, b[$ et vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) \geqslant 0$$

1. a) Vérifier que la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x)$ est A.M. sur $]0, 1[$.

b) Donner des exemples de fonctions A.M. sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit b un réel strictement positif, f une fonction de classe C^∞ sur $[0, b[$ et A.M. sur $]0, b[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, R_n la fonction définie par :

$$\forall x \in [0,b[\,, R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

2. Exprimer $R_n(x)$ sous forme d'une intégrale.

3. Justifier que la série de terme général $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ converge pour tout $x \in [0,b[$.
On note S sa somme. Montrer que, pour tout $x \in [0,b[$, on a $S(x) \leqslant f(x)$.

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que la fonction $\phi : x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ est croissante sur $]0,b[$. Quelle est sa limite quand x tend vers 0 par valeurs supérieures ?

b) Montrer que, si $0 < x < y < b$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$.

c) En déduire que $S = f$ sur $[0,b[$.

5. Pour $x \in]0,1[$, écrire $\ln(1-x)$ comme la somme d'une série de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Solution :

1. a) Par récurrence, on trouve :

$$h^{(n)}(x) = (n-1)!/(1-x)^n \geqslant 0 \text{ sur }]0,1[\text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc h est absolument monotone sur $]0,1[$.

b) Par exemple, la fonction exponentielle, ou toute fonction constante positive.

2. Utilisons la formule de Taylor avec reste intégral. La fonction étant A.M :

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)dt \geqslant 0$$

3. La somme partielle S_n vérifie $f - S_n = R_n \geqslant 0$, d'où $S_n \leqslant f$. La série converge car à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées. Par passage à la limite, on obtient : $S \leqslant f$.

4.a) Pour tous x et x' tels que $0 < x < x'$:

$$\begin{aligned}
\frac{R_n(x)}{x^n} &= \frac{1}{x^n}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x}\right)^n dt \\
&\leqslant \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x'}\right)^n dt \leqslant \int_0^{x'} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\left(1-\frac{t}{x'}\right)^n dt \\
&\leqslant \frac{R_n(x')}{x'^n}
\end{aligned}$$

Autre méthode : Le changement de variable affine $t \mapsto u = \dfrac{t}{x}$ donne :

$$\frac{R_n(x)}{x^n} = \frac{x}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(xu)(1-u)^n du$$

qui est une fonction croissante de x comme produit de fonctions positives et croissantes.
Ainsi ϕ est croissante sur $]0,b[$.

D'autre part, on sait (formule de Taylor-Young) que : $R_n(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \phi(x) = 0$.

b) Par croissance de $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^n}$ et la majoration $R_n \leqslant f$, on a, pour $0 < x < y$:

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n R_n(y) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

c) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) = 0$, car $0 < \dfrac{x}{y} < 1$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) - S_n(x) = \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0,$$

donc $f = S$ sur $]0, b[$, et clairement $S(0) = f(0)$.

5. h est de classe C^∞ sur $[0, 1[$, A.M., avec $h(0) = 0$ et pour $n \geqslant 1, h^{(n)}(0) = (n-1)!$ et la question précédente donne

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \text{ sur } [0, 1[.$$

Exercice 1.3.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites décroissantes de réels strictement positifs dont la série associée converge.

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est-il un espace vectoriel ?

Pour $(b_n) \in \mathcal{S}$, *on note :* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k \quad ; \quad b = b_0 + R_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$

On dit alors que $(b_n) \in \mathcal{S}$ *est une base discrète d'ordre 1 (en abrégé bd1) si pour tout* $t \in [0, b]$, *la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists\, (d_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}},\ t = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k \qquad (P_t)$$

2. Soit $(b_n) \in \mathcal{S}$. Montrer que la propriété (P_t) est vérifiée pour $t = 0$, pour $t = b$, et pour $t = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{3k}$. On précisera à chaque fois une suite (d_n) correspondante.

Étant donné $(b_n) \in \mathcal{S}$ *et* $t \in [0, b]$, *on définit la suite* (t_n) *par la relation de récurrence :* $t_0 = 0$ *et* $\forall n \geqslant 0, t_{n+1} = \begin{cases} t_n + b_n & \textit{si } t_n + b_n \leqslant t \\ t_n & \textit{sinon} \end{cases}$.

3. On suppose ici $b_n \leqslant R_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $t \in [0, b]$. Etablir par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement :

$$0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n.$$

b) En déduire que (b_n) est une bd1.

4. Montrer que la suite (2^{-n}) est une bd1.

5. Dans cette question, $b_n = \ln(1 + 2^{-n})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Etablir l'inégalité : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(1 + a_1 + \cdots + a_n) \leqslant \ln(1 + a_1) + \cdots + \ln(1 + a_n)$$

b) En déduire que (b_n) est une bd1.

c) Écrire un programme Pascal qui calcule $S_{30} = \sum_{k=0}^{30} b_k$.

Solution :

1. L'ensemble $\mathcal{S}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles car la suite nulle n'est pas dans $\mathcal{S}$.

2. Facilement $(d_n) = (0)$, $(d_n) = (1)$, $(d_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 3p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3. a) Pour $n = 0$, la double inégalité à établir s'écrit : $0 \leqslant t \leqslant b$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons : $0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n$.

- par construction on a : $t - t_{n+1} \geqslant 0$.
- si $t_n + b_n \leqslant t$, on a : $(b_{n+1} + R_{n+1}) - t + t_{n+1} = R_n - t + (t_n + b_n) \geqslant 0$;
- sinon : $(b_{n+1} + R_{n+1}) - t + t_{n+1} = R_n - t + t_n \geqslant b_n - t + t_n \geqslant 0$ (car $b_n \leqslant R_n$).

b) On pose : $d_n = \begin{cases} 1 & \text{si } t_n + b_n \leqslant t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} = t_n + d_n b_n$, d'où, de proche en proche : $t_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_k b_k$.

La suite réelle (t_n) étant croissante et majorée par t, elle est convergente ; en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, il vient : $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} d_k b_k$.

Or, pour tout n, $0 \leqslant t - t_n \leqslant b_n + R_n$, d'où en passant à la limite :

$$0 \leqslant t - \lim_{n\to\infty} t_n \leqslant 0 + 0.$$

Donc :

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k b_k$$

4. On a $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-(n+1)} \dfrac{1}{1-1/2} = 2^{-n} = b_n$. On a donc $b_n \leqslant R_n$ et on conclut grâce à la question précédente.

5. a) Directement, en passant à l'exponentielle, l'inégalité à démontrer équivaut à :

$$1 + a_1 + \cdots + a_n \leqslant (1+a_1).(1+a_2).\cdots(1+a_n).$$

On conclut en développant le membre de droite car tous les a_i sont positifs.

b) On applique l'inégalité précédente avec : $a_k = 2^{-k}$. En sommant de $n+1$ à N, on obtient :

$$\ln(1 + \sum_{k=n+1}^{N} 2^{-k}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \ln(1+2^{-k})$$

Si on fait tendre N vers $+\infty$, on obtient, les séries étant convergentes :

$$\ln(1 + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 2^{-k}) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln(1+2^{-k})$$

soit : $\ln(1+2^{-n}) \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$, et enfin : $b_n \leqslant R_n$ ce qui permet de conclure.

c)

```
program escp ;
var  k  :integer ; d,p :real ;
begin
    p :=1 ; d :=1 ;
    for k :=0 to 30 do
        begin
        p :=p*(1+(1/d)) ;  d :=d*2 ;
    end ;
writeln('S30=',ln(p)) ;
readln ; end.
```

Exercice 1.4.

1. a) Dresser le tableau de variations de la fonction d'une variable réelle

$$F : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{t^2} dt.$$

Justifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser.

b) En déduire que la relation $\displaystyle\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2} dt = 1$ permet de définir une fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. a) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer le sens de variation de f.

3. Vérifier que pour x, y réels, $y = f(x) \iff -x = f(-y)$. Comment s'interprète géométriquement ce résultat sur la courbe $\mathcal{C}$ représentant f ?

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$x \leqslant f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

Solution :

1. a) F est de classe C^1 et $F'(x) = \mathrm{e}^{x^2} > 0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$, comme intégrales divergentes d'une fonction positive. Donc F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant la fonction F, la relation demandée s'écrit

$$F\big(f(x)\big) - F(x) = 1 \text{ ce qui équivaut à } f(x) = F^{-1}\big(1 + F(x)\big)$$

ce qui définit f.

2. a) La fonction F est de classe C^1 à dérivée ne s'annulant pas ; donc F^{-1} est de classe C^1 et f aussi d'après la relation précédente.

b) La relation précédente donne

$$f'(x)\,\mathrm{e}^{[f(x)]^2} - \mathrm{e}^{x^2} = 0 \iff f'(x) = \mathrm{e}^{x^2 - [f(x)]^2} > 0$$

et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Par parité de $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$, il vient : $\displaystyle\int_x^y \mathrm{e}^{t^2}dt = \int_{-y}^{-x} \mathrm{e}^{t^2}dt$, d'où

$$y = f(x) \implies 1 = \int_{-y}^{-x} \mathrm{e}^{t^2}dt \implies -x = f(-y)$$

De même $-x = f(-y) \implies -(-y) = f(-(-x))$.

La courbe $\mathcal{C}$ est donc symétrique par rapport à la seconde bissectrice d'équation $y = -x$.

4. On sait que $\mathrm{e}^{t^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}dt = 1 > 0 \implies f(x) \geqslant x$$

D'autre part,

$$1 = \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{t^2}dt \geqslant \int_x^{f(x)} \mathrm{e}^{x^2}dt = \mathrm{e}^{x^2}\,\big[f(x) - x\big]$$

donne : $f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}$, soit $x \leqslant f(x) \leqslant x + \mathrm{e}^{-x^2}$.

Enfin $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big[f(x) - x\big] = 0$ prouve que la première bissectrice est asymptote à $\mathcal{C}$ en $\pm\infty$. L'allure de la courbe représentative s'en déduit.

Exercice 1.5.

1. Pour x réel, on considère la suite définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n$$

Pour quelle valeurs de x, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle ainsi bien définie ?

2. Pour $n \geqslant 2$, on pose $w_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$. Étudier la convergence de la série de terme général $w_n(x)$.

3. En déduire l'ensemble de définition D de la fonction f définie par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x).$$

On admet que f est continue sur D.

4. Soit $x \in D$. Démontrer que $f(x+1) = f(x) - \dfrac{1}{1+x}$.

5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} [f(n) + \ln n] = 0$.

6. Montrer que : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1] : f(px) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} f(x - \frac{k}{p}) - \ln p$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

Solution :

1. La suite est définie sur $D_u = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.

2. On a pour n au voisinage de $+\infty$, $w_n(x) \sim \dfrac{-1-x}{n^2}$ qui est le terme général d'une série (absolument) convergente. On en déduit que la série de terme général $w_n(x)$ converge pour tout $x \in D_u$.

3. On a $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} w_n(x) + \dfrac{1}{1+x}$. On en déduit que $D = D_u$.

4. On a $u_n(x+1) = u_n(x) - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{n+1+x}$. Pour x réel fixé, on en déduit par passage à la limite que $f(x+1) = f(x) - \dfrac{1}{1+x}$.

5. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, f(n) + \ln n = f(0) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{1+k} + \ln n = f(0) - u_n(0)$.
Par définition de $f(0)$, cette deuxième expression a pour limite 0, d'où le résultat.

6. On a : $u_{pn}(px) = \sum\limits_{k=1}^{pn} \dfrac{1}{k+px} - \ln(pn) = \dfrac{1}{p} \sum\limits_{k=1}^{pn} \dfrac{1}{x+\frac{k}{p}} - \ln n - \ln p$, donc :

$$u_n(px) = \frac{1}{p}\Big(\big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x} - \ln n\big) + \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x-\frac{1}{p}} - \ln n\big) + \cdots + \big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+x-\frac{p-1}{p}} - \ln n\big)\Big) - \ln p$$

On obtient ce résultat en remarquant que si l'on effectue la division euclidienne de k par p : $k = pq + r$, on a : $k + px = p\big(q + x + \dfrac{r}{p}\big) = p\big(q + 1 + x - \dfrac{p-r}{p}\big)$, et en regroupant ensuite les termes qui ont même reste r. Par passage à la limite :

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in D : f(px) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} f\big(x - \frac{k}{p}\big) - \ln p$$

On a enfin :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\big(\frac{k}{p}\big) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p-1} f\big(1 - \frac{k}{p}\big)$$

$$= \lim_{p\to+\infty} f(p) + p = 0$$

Exercice 1.6.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On considère les deux suites $(v_n)_{n\geq 1}$ et $(w_n)_{n\geq 1}$ définies par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{nu_n}\big(\sum_{k=1}^{n} u_k\big) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\big(\sum_{k=1}^{n} k u_k\big)$$

1. On suppose dans cette question que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = n^\alpha$, où α est un réel strictement positif.

a) À l'aide d'une somme de Riemann, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^\alpha$, quand n tend vers $+\infty$.

b) Vérifier que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

c) Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

2. On suppose dans cette question que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers un réel a strictement positif et on admet le résultat suivant :

[Si $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites réelles positives telles que $a_n \underset{(n\to\infty)}{\sim} b_n$ et $\sum\limits_n a_n$ diverge, alors $\sum\limits_{k=1}^n a_k \underset{(n\to\infty)}{\sim} \sum\limits_{k=1}^n b_k$.]

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^n u_k$.

a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que la série de terme général u_n est divergente.

b) Établir, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n ku_k = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $w_n = \dfrac{n+1}{n}v_n - \dfrac{1}{n^2u_n}\sum\limits_{k=1}^n S_k$.

d) En utilisant le résultat admis, montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$w_n = a - aw_n + o(w_n).$$

e) En déduire, en fonction de a, la limite de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$.

Solution :

1. a) Si on pose $T_n = \sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$, on peut écrire $T_n = n^{\alpha+1}\big(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \big(\frac{k}{n}\big)^\alpha\big)$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n \big(\frac{k}{n}\big)^\alpha = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha dt = \dfrac{1}{\alpha+1}$. Finalement :

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{(n\to\infty)}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

b) On a donc $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\sum\limits_{k=1}^n k^\alpha$. En utilisant l'équivalent précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{\alpha+1}.$$

c) On a $w_n = \dfrac{1}{n^{\alpha+2}}\sum\limits_{k=1}^n k^{\alpha+1}$. Toujours avec l'équivalent trouvé précédemment : $\sum\limits_{k=1}^n k^{\alpha+1} \sim \dfrac{n^{\alpha+2}}{\alpha+2}$. En conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{1}{\alpha+2}.$$

2. a) Supposons que la série de terme général u_n soit convergente. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^n u_k = S$, où S est un réel strictement positif.

De la relation $v_n = \dfrac{1}{nu_n}\big(\sum\limits_{k=1}^n u_k\big)$ on tire alors $u_n \sim \dfrac{S}{an}$. Comme la série de terme général $\dfrac{S}{an}$ est divergente, ceci contredit le fait que la série de terme général u_n est convergente.

b) Considérons $T_n = \sum\limits_{k=1}^n ku_k$. Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on peut écrire $u_k = S_k - S_{k-1}$. Ainsi :

$$T_n = u_1 + \sum_{k=2}^n k(S_k - S_{k-1}) = u_1 + \sum_{k=2}^n kS_k - \sum_{k=2}^n kS_{k-1}.$$

En effectuant un glissement d'indice dans la seconde somme :

$$T_n = u_1 + \sum_{k=2}^n kS_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k.$$

Comme $u_1 = S_1$, on obtient $T_n = \sum\limits_{k=1}^n kS_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k$. En arrangeant : $T_n = nS_n - \sum\limits_{k=1}^{n-1} S_k$. Enfin, en ajoutant et en retranchant S_n aux deux termes , il vient :

$$\sum_{k=1}^n ku_k = (n+1)S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$

c) On a : $w_n = \dfrac{1}{n^2 u_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k\Big)$. En remplaçant $\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$ par $(n+1)S_n - \sum\limits_{k=1}^{n} S_k$, on obtient :

$$w_n = \frac{(n+1)S_n}{n^2 u_n} - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n}\sum_{k=1}^{n} S_k$$

d) En utilisant la relation : $v_n = \dfrac{1}{n u_n}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\Big)$, on a donc : $S_n \sim a n u_n$. Comme la série de terme général positif u_n est divergente, celle de terme général $n u_n$ est *a fortiori* divergente.
En utilisant le résultat admis, on a donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a \sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$.
On en déduit : $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a \dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} k u_k$. Soit $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k \sim a w_n$, ce qui peut également s'écrire : $\dfrac{1}{n^2 u_n}\sum\limits_{k=1}^{n} S_k = a w_n + o(w_n)$. En remplaçant dans l'égalité trouvée précédemment : $w_n = a - a w_n + o(w_n)$.

e) L'égalité précédente s'écrit également : $(1+a)w_n = a + o(w_n)$
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{a}{a+1}$.

Exercice 1.7.
Soit a un nombre réel, tel que $a > 2$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} a_1 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} = a_n^2 - 2 \end{cases}$$

1. Quelle est la nature de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

2. a) Montrer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante :

$$a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

b) Déterminer, en fonction de a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$.

3. a) Simplifier, pour k supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{a_k}{a_1 a_2 \dots a_{k-1}} - \dfrac{a_{k+1}}{a_1 a_2 \dots a_k}$.

b) En déduire, en fonction de a, l'existence et la valeur de : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{a_1 a_2 \dots a_k}$.

Solution :

1. ⋆ On a $a_1 > 2$, et si pour un certain rang n, on a $a_n > 2$, alors $a_{n+1} > 2^2 - 2 = 2$. On conclut par le principe de récurrence :

$$\forall n \geqslant 1, a_n > 2$$

⋆ On a alors $a_{n+1} - a_n = a_n^2 - a_n - 2 = (a_n - 2)(a_n + 1) > 0$ et la suite (a_n) est strictement croissante.

⋆ Si la suite (a_n) était convergente, en notant ℓ sa limite, on aurait $\ell = \ell^2 - 2$, soit $(\ell - 2)(\ell + 1) = 0$, *i.e.* $\ell = 2$ ou $\ell = -1$, ce qui est incompatible avec la condition initiale et la stricte croissance de cette suite.
Ainsi la suite (a_n) est divergente, et plus précisément :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

2. a) Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$a_n^2 - 4 = (a_{n-1}^2 - 2)^2 - 4 = a_{n-1}^4 - 4a_{n-1}^2 = a_{n-1}^2(a_{n-1}^2 - 4)$$

Ainsi, par l'argument de récurrence habituel :

$$\forall n \geqslant 2, a_n^2 - 4 = a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 (a_1^2 - 4)$$

b) Ainsi $a_1^2 a_2^2 \dots a_{n-1}^2 = \dfrac{a_n^2 - 4}{a_1^2 - 4}$ et donc :

$$\frac{a_n}{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = \sqrt{\frac{a_n^2(a_1^2 - 4)}{a_n^2 - 4}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{a_1^2 - 4}$$

3. a) En réduisant au même dénominateur :

$$\frac{a_k}{a_1a_2\dots a_{k-1}} - \frac{a_{k+1}}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{a_k^2 - a_{k+1}}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{2}{a_1a_2\dots a_k}$$

b) Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{2}{a_1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{2}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_{n+1}}{a_1a_2\dots a_n}$$

et par le résultat 2. b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_1a_2\dots a_k} = \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{2a_1} - \frac{\sqrt{a_1^2-4}}{2}$$

Exercice 1.8.

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A \\ 0 & \text{si } n \notin A \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout x de $]-1, 1[$, la série $\sum_n a_n x^n$ est convergente. On note alors $f_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse aux parties A de $\mathbb{N}$ pour lesquelles $\lim_{x\to 1^-} (1-x)f_A(x)$ existe. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de ces parties et $P(A)$ cette limite.

2. a) Montrer que $\emptyset, \mathbb{N}$ appartiennent à $\mathcal{A}$ et calculer $P(\emptyset)$ et $P(\mathbb{N})$.

b) Montrer que si A et B sont deux parties de $\mathcal{A}$ telles que $A \subset B$, , alors $P(A) \leqslant P(B)$.

c) Montrer que $A \in \mathcal{A} \implies P(A)$ appartient à $[0, 1]$.

d) Soit $A, B \in \mathcal{A}$ telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $A \cup B \in \mathcal{A}$ et calculer $P(A \cup B)$.

e) Montrer que $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$ et calculer $P(\overline{A})$.

f) Montrer que $2\mathbb{N}, 3\mathbb{N} + 5 \in \mathcal{A}$ et calculer $P(2\mathbb{N})$ et $P(3\mathbb{N} + 5)$.

g) Montrer qu'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, pour lesquels $P\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\big) \neq \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$.

3. Dans cette question, on prend $A = \{n^2, n \in \mathbb{N}\} = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$.

a) Vérifier que $f_A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$.

b) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, déterminer un équivalent de $f_A(x)$, lorsque x est au voisinage de 1.

c) En déduire que $A \in \mathcal{A}$ et déterminer la valeur de $P(A)$.

Solution :

1. Comme $|a_n| \leqslant 1$, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $|a_n x^n| \leqslant |x^n|$ et la série $\sum |x^n|$ est convergente comme série géométrique de raison inférieure à 1.

2. a) $P(\emptyset) = 0$ et $P(\mathbb{N}) = \lim_{x\to 1}(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x} = 1$.

b) Comme $A \subset B$, on a pour tout n de $\mathbb{N}$: $a_n \leqslant b_n$ et comme on a supposé que les limites existent : $P(A) \leqslant P(B)$.

c) Comme $\emptyset \subset A \subset \mathbb{N}$, il vient $0 \leqslant P(A) \leqslant P(\mathbb{N}) = 1$.

d) Notons $C = A \cup B$. On a alors $c_n = \begin{cases} a_n & \text{si } n \in A \\ b_n & \text{si } n \in B \end{cases}$. Ainsi, pour tout N :

$$\sum_{n=0}^{N} c_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n + \sum_{n=0}^{N} b_n x^n.$$

En prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$, il vient

$$\forall\, x \in \,]-1,1[,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

et comme $P(A)$ et $P(B)$ existent, $P(C)$ existe également et $P(C) = P(A) + P(B)$.

e) Par les questions précédentes, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

f) Il vient :

$\to P(2\mathbb{N}) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{2}$

$\to P(3\mathbb{N}+5) = \lim\limits_{x\to 1}(1-x)\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{3n+5} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)x^5}{1-x^3} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5}{1+x+x^2} = \dfrac{1}{3}$

g) Il suffit d'écrire $\mathbb{N} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty}\{n\}$ et $P(\{n\}) = 0$, alors que $P(\mathbb{N}) = 1$.

3. a) Par définition même : $f_A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

b) Soit $x \in \,]0,1[$ fixé et $f : t \mapsto x^{t^2} = \mathrm{e}^{t^2 \ln x}$. La fonction f est positive, décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car $\ln x < 0$).

Si $t \in [k, k+1]$, alors $x^{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} x^{t^2}\,dt \leqslant x^{k^2}$. On somme ces inégalités pour $k \in [\![0,N]\!]$. Il vient :

$$\sum_{k=0}^{N} x^{(k+1)^2} \leqslant \int_0^{N+1} x^{t^2}\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{N} x^{k^2}$$

puis en prenant la limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$f(x) - 1 \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,dt \leqslant f(x)$$

Or, le changement de variable affine, $u = t\sqrt{-\ln x}$ donne :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^2 \ln x}\,dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$$

Le dernier terme tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1 ; donc au voisinage (à gauche) de 1 : $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$.
De plus, pour x au voisinage de 1, on a $-\ln x \sim 1 - x$. Finalement :

$$\lim_{x\to 1}(1-x)f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}\sqrt{\pi}}{2} = 0$$

Exercice 1.9.

Soit n un entier pair $\geqslant 2$. On considère la fonction φ définie sur le segment $[0,n]$ par

$$\varphi(t) = |t(t-1)\dots(t-n)| = \Big|\prod_{k=0}^{n}(t-k)\Big|$$

1. a) Montrer que $\forall\, t \in \left[1, \frac{n}{2}\right], \varphi(t-1) \geqslant \varphi(t)$.

b) Montrer que φ admet un maximum sur l'intervalle $[0,n]$.

c) On note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t. En comparant $\varphi(n-t)$ et $\varphi(t)$ puis $\varphi(t - \lfloor t \rfloor)$ et $\varphi(t)$, montrer que le maximum de φ sur $[0,n]$ est atteint en un point de l'intervalle $]0,1[$.

2. En étudiant les variations de la fonction $\ln \circ \varphi$, montrer que le maximum de φ est atteint une seule fois sur $]0,1[$; on note t_n l'abscisse de ce maximum (*i.e.* $t_n \in \,]0,1[$ et $\varphi(t_n) = \max\limits_{t\in[0,n]} \varphi(t)$).

3. Comparer $\frac{1}{t_n}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$. En déduire la limite de t_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Montrer que pour tout $t\in[0,n]$, on a : $\varphi(t)<\dfrac{n!}{\ln(n+1)}$.

Solution :

1. a) Si t est entier compris entre 1 et $n/2$, la relation demandée est banale.
Pour $t\notin\mathbb{N}$, on a : $\dfrac{\varphi(t-1)}{\varphi(t)}=\dfrac{|t-n-1|}{|t|}=\left|1-\dfrac{n+1}{t}\right|$.
Or la fonction $t\mapsto 1-\dfrac{n+1}{t}$ croît sur $\mathbb{R}_+^*$; sur $\left[1,\frac{n}{2}\right]$, elle varie entre $-n$ et $-1-\dfrac{2}{n}$ et a donc une valeur absolue plus grande que 1.

b) La fonction φ est continue sur le segment $[0,n]$ et admet donc un maximum sur ce segment.

c) Le maximum est atteint en au moins un point de $\left[0,\frac{n}{2}\right]$ car :
$\varphi(n-t)=\left|\prod\limits_{k=0}^{n}((n-t)-k)\right|=\prod\limits_{k=0}^{n}|n-k-t|=\prod\limits_{j=0}^{n}|j-t|=\left|\prod\limits_{j=0}^{n}(t-j)\right|$
c'est-à-dire $\varphi(n-t)=\varphi(t)$, et le résultat.
Par ailleurs, de $\varphi(t-1)\geqslant\varphi(t)$ sur $\left[1,\frac{n}{2}\right]$, on déduit par récurrence évidente que : $\forall t\in\left[1,\frac{n}{2}\right],\varphi(t-\lfloor t\rfloor)\geqslant\varphi(t)$.
Ainsi, si le maximum de φ est atteint en un point $t\in\left[1,\frac{n}{2}\right]$, il est aussi atteint au point $t-\lfloor t\rfloor\in[0,1[$ (et pas en 0 car $\varphi(0)=0$ et $\varphi\geqslant 0$ non identiquement nulle).

2. Sur $]0,1[$, on a : $\ln(\varphi(t))=\sum\limits_{k=0}^{n}\ln(|t-k|)$. Donc :

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}=\frac{d}{dt}\ln(\varphi(t))=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t-k}=g(t)$$

Ainsi, $\varphi'(t)$ est du signe de g (car $\varphi(t)>0$). Or $g'(t)=-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{(t-k)^2}<0$. En utilisant le théorème de la bijection pour g (qui est de limite $+\infty$ en 0 à droite et de limite $-\infty$ en 1 à gauche), il existe donc un unique $t_n\in\,]0,1[$ tel que φ admette un maximum en t_n.

3. Comme φ est maximale en t_n sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, on a $\varphi'(t_n)=0$, soit $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{t_n-k}=0$, soit $\dfrac{1}{t_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k-t_n}$.
Or pour tout $k\geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{k-t_n}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{t_n}{k(k-t_n)}>0$. On en déduit que :

$$\frac{1}{t_n}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

La série $\sum\frac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=+\infty$.
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{t_n}=+\infty$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$.

4. La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall\,k\geqslant 1,\forall\,t\in[k,k+1],\ \frac{1}{t}\leqslant\frac{1}{k}$$

En intégrant cette inégalité sur $[k,k+1]$, puis en sommant de $k=2$ à $k=n$, on obtient :

$$\int_2^{n+1}\frac{dt}{t}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$$

Ainsi $\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}\geqslant\ln(n+1)-\ln 2$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\geqslant\ln(n+1)-\ln 2+1\geqslant\ln(n+1)$
Le passage à l'inverse (tout est strictement positif) donne finalement :

$$t_n < \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Pour tout $t \in [0, n]$, on a :

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(t_n) = \prod_{k=0}^{n} |t_n - k| = t_n \prod_{k=1}^{n} (k - t_n) \leqslant t_n \prod_{k=1}^{n} k \leqslant t_n n! < \frac{n!}{\ln(n+1)}$$

Exercice 1.10.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$u_n(x) = x \ln\big(1 + \frac{1}{n}\big) - \ln\big(1 + \frac{x}{n}\big)$$

Lorsque la série de terme général $u_n(x)$ converge, on note $S(x)$ sa somme.

1. Déterminer l'ensemble D des valeurs de x pour lesquelles la série ci-dessus converge. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

2. Montrer que pour tout $x \in D, S(x+1) = S(x) + \ln(x+1)$.

3. On définit la fonction T sur D par : $T(x) = \exp(S(x))$.

   a) Montrer que T vérifie les propriétés :

      i) $T(0) = 1$.

      ii) $\forall x \in D :\ T(x+1) = (x+1)T(x)$.

   b) En déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}, T(n) = n!$.

4. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = T(x) \prod\limits_{k=1}^{n} (x+k)$.

5. a) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \big[\ln\big(1 + \frac{1}{k}\big) - \ln\big(1 + \frac{1}{k+n}\big)\big] = \ln(n+1)$.

   b) On pose $R_n(x) = S(x+n) - S(n) - x\ln(n+1)$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$.

   c) En déduire l'existence d'une fonction réelle φ_n définie sur D telle que :

$$\forall\, x \in D, \forall\, n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = n!(n+1)^x \varphi_n(x),\quad \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1$$

Solution :

1. On trouve que $u_n(x) = \dfrac{x(x-1)}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2})$ ce qui montre $D =]-1, +\infty[$.

On a $S(0) = S(1) = 0$.

2. On a :

$$\sum_{n=1}^{N} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \sum_{n=1}^{N} \big[\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(1 + \frac{x+1}{n}) + \ln(1 + \frac{x}{n})\big]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \big[\ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(n+x+1) + \ln(n+x)\big]$$

Par télescopages :

$$\sum_{n=1}^{N} (u_n(x+1) - u_n(x)) = \ln(N+1) - \ln(N+x+1) + \ln(1+x)$$
$$= \ln(1+x) + \ln\big(\frac{N+1}{N+x+1}\big)$$

Par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini on trouve le résultat demandé.

3. On définit la fonction T sur D par : $T(x) = \exp(S(x))$.

   a) Il vient :

      i) $T(0) = \exp(S(0)) = 1$.

      ii) $T(x+1) = \exp(S(x) + \ln(x+1)) = (x+1)\exp S(x) = (x+1)T(x)$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T(n) = n!$ de manière immédiate.

4. On a facilement que $S(x+n) = S(x) + \sum_{k=1}^{n} (x+k)$. D'où le résultat en «passant à l'exponentielle».

5. a) On a, en repassant aux sommes partielles et par télescopage terminal :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \big[\ln(1+\frac{1}{k}) - \ln(1+\frac{1}{k+n})\big] = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(n+1)$$

b) En utilisant le résultat précédent, on trouve :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \big[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) + \ln(1+\frac{n}{k}) - \ln(1+\frac{x+n}{k})\big] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \big[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) + \ln(k+n) - \ln(x+k+n)\big] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \big[x\ln(1+\frac{1}{k+n}) - \ln(1+\frac{x}{k+n})\big] \end{aligned}$$

Ceci est le reste d'ordre n de la série convergente de terme général :

$$v_m(x) = x\ln(1+\frac{1}{m}) - \ln(1+\frac{x}{m})$$

qui tend donc vers 0.

c) En passant à l'exponentielle on en déduit l'existence d'une fonction réelle φ_n définie sur D telle que :

$$\forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}^* : T(x+n) = n!(n+1)^x\varphi_n(x),\ \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = 1$$

Exercice 1.11.

Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $[0,1]$, à valeurs réelles, de classe C^1, vérifiant de plus $f(0) = f(1) = 0$. Soit f un élément de E. On pose, pour tout x de $[0,1]$:

$$h(x) = \int_0^x |f'(t)|dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_x^1 |f'(t)|dt$$

1. Montrer que les fonctions g et h sont dérivables sur $[0,1]$. Exprimer $h'(x)$ et $g'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

2. Montrer que :

$$\int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}h^2\big(\frac{1}{2}\big) \quad \text{et} \quad \int_{1/2}^1 |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}g^2\big(\frac{1}{2}\big)$$

3. a) Trouver un majorant de $h^2\big(\frac{1}{2}\big)$ et de $g^2\big(\frac{1}{2}\big)$ en fonction des intégrales $\displaystyle\int_0^{1/2} f'^2(t)dt$ et $\displaystyle\int_{1/2}^1 f'^2(t)dt$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(t)dt$

4. a) Déterminer une fonction f continue sur $[0,1]$, de classe C^1 par morceaux, telle que $f(0) = f(1) = 0$, pour laquelle l'inégalité précédente est une égalité.

b) Comment démontrerait-on que la constante $1/4$ de l'inégalité précédente est la meilleure possible pour que l'inégalité soit vraie pour toutes les fonctions de E ?

Solution :

1. La fonction $x \to |f'(x)|$ est continue, puisque f est C^1.
Le théorème fondamental du calcul intégral implique que $h(0) = 0$ et que h est de classe C^1 de dérivée $h'(x) = |f'(x)|$. Avec un raisonnement identique, il vient $g(1) = 0$ et $g'(x) = -|f'(x)|$.

2. Comme $f(0) = 0$, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)dt$.

Donc $|f(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt = h(x)$ et $|f(x)f'(x)| \leqslant h(x)h'(x)$.
Il reste à intégrer cette inégalité sur $[0,1/2]$, ce qui donne :

$$\int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt \leqslant \frac{1}{2}h^2\big(\frac{1}{2}\big).$$

Même raisonnement pour la seconde inégalité car $f(1) = 0$.

3. a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$h^2(x) = \Big(\int_0^x |f'(t)|.1dt\Big)^2 \leqslant \int_0^x |f'(t)|^2 dt \times x$$

Donc : $h^2\big(\frac{1}{2}\big) \leqslant \frac{1}{2}\displaystyle\int_0^{1/2} |f'(t)|^2 dt$. De même : $g^2\big(\frac{1}{2}\big) \leqslant \frac{1}{2}\displaystyle\int_{1/2}^1 f'^2(t)dt$.

b) Par la question 2 et la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt &= \int_0^{1/2} |f(t)f'(t)|dt + \int_{1/2}^1 |f(t)f'(t)|dt\\ &\leqslant \frac{1}{4}\int_0^{1/2} |f'(t)|^2 dt + \frac{1}{4}\int_{1/2}^1 |f'(t)|^2 dt = \frac{1}{4}\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\end{aligned}$$

4.a) Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1-x & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$.

Cette fonction est continue, de classe C^1 sauf en $x = 1/2$ et

$$\int_0^1 |f(t)f'(t)|dt = \int_0^{1/2} tdt + \int_{1/2}^1 (1-t)dt = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(t)\,dt$$

b) Il s'agirait « d'approcher d'aussi près que l'on veut » la fonction f définie ci-dessus par des fonctions de classe C^1. On peut penser à approcher la fonction « chapeau » f précédente en « arrondissant » simplement la pointe avec un petit arc de cercle pour effectuer une approximation de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer alors que les intégrales en question sont aussi proches que l'on veut des intégrales de la question a), le détail du calcul n'est pas demandé ...

Exercice 1.12.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathcal{E}$ l'application T qui à toute fonction f de $\mathcal{E}$ fait correspondre la fonction $T(f)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, T(f)(x) = 1 - \int_0^x \frac{tf(t)}{1+t^2}dt$$

On note φ l'élément de $\mathcal{E}$ défini par : $\forall\, x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. a) Montrer que T est une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. L'application T est-elle linéaire ?

b) T est-elle surjective ?

c) Calculer $T(\varphi)$ en fonction de φ.

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ par $f_0 \in \mathcal{E}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$: $f_{n+1} = T(f_n)$.

2. Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie par : $g_n = (-1)^n\,[\varphi - f_n]$.
Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x, la relation :

$$g_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2}dt$$

3. On s'intéresse au cas particulier où f_0 est la fonction définie par $f_0 = \varphi + 1$, et on garde les notations de la question précédente.

a) Déterminer g_0, g_1 et g_2.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un réel a_n vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_n(x) = a_n \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$$

et donner la relation liant a_{n+1} à a_n.

c) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.

d) Déterminer, pour tout réel x, la limite quand n tend vers l'infini de $g_n(x)$.

e) Calculer, pour tout réel x, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

Solution :

1. a) La fonction $t \mapsto \dfrac{tf(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. En notant H une primitive de cette fonction, on a donc, pour tout réel x, $T(f)(x) = 1 - (H(x) - H(0)$.
Cette fonction est dérivable et sa dérivée est définie pour tout x par

$$(T(f))'(x) = H'(x) = \frac{xf(x)}{1+x^2}.$$

En fait, la fonction $T(f)$ est même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
T n'est clairement pas linéaire ($T(0) \neq 0$).

b) On vu que, pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, $T(f)$ était dérivable. Comme il existe des fonctions de $\mathcal{E}$ qui ne sont pas dérivables, par exemple la fonction $x \mapsto |x|$, cela prouve que T n'est pas surjective.

c) On a, pour tout réel x :

$$T(\varphi)(x) = 1 - \int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}dt = 1 - \Big[-\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\Big]_0^x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \varphi(x)$$

2. On a : $g_{n+1} = (-1)^{n+1}[\varphi - f_{n+1}]$. Or, par définition, $\varphi = T(\varphi)$ et $f_{n+1} = T(f_n)$.
On a donc : $g_{n+1} = (-1)^{n+1}\,[T(\varphi) - T(f_n)]$.
Attention, T n'est pas une application linéaire !, mais

$$T(\varphi) = 1 - \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t^2}dt \text{ et } T(f_n) = 1 - \int_0^x \frac{tf_n(t)}{1+t^2}dt.$$

Les 1 se neutralisent et par linéarité de l'intégration, on obtient :

$$g_{n+1} = (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{t(f_n(t) - \varphi(t))}{1+t^2}dt.$$

En simplifiant : $g_{n+1}(x) = (-1)^n \displaystyle\int_0^x \frac{t(\varphi(t)) - f_n(t))}{1+t^2}dt = \int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2}dt.$

3. a) On a :
$\star$ $g_0 = \varphi - f_0$, d'où $g_0 = -1$.
On utilise alors la relation $g_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{tg_n(t)}{1+t^2}dt$ qui donne :
$\star$ $g_1(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt = \big[-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\big]_0^x = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$
Puis : $g_2(x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \frac{t\ln(1+t^2)}{1+t^2}dt.$
On reconnaît une expression de la forme uu', d'où :

$$g_2(x) = -\frac{1}{8}\big[\ln^2(1+t^2)\big]_0^x = -\frac{1}{8}\ln^2(1+x^2).$$

b) On montre le résultat par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, la relation est vraie avec $a_0 = -1$.
Hérédité. On suppose que, pour un certain entier naturel n, on a pour tout x, $g_n(x) = a_n\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$.
On a alors : $g_{n+1}(x) = a_n\displaystyle\int_0^x \frac{t(\ln(1+t^2))^n}{1+t^2}dt$. On reconnaît dans l'intégrale une expression, à un coefficient près, de la forme $u'u^n$. On a donc :

$g_{n+1}(x) = a_n \dfrac{1}{2(n+1)} \left[(\ln\left(1+t^2\right))^{n+1}\right]_0^x$, ce qu'il fallait, avec en prime
$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} a_n.$$

c) On montre alors facilement par récurrence que : $a_n = -\dfrac{1}{2^n n!}$.

d) On a donc : $g_n(x) = -\dfrac{1}{2^n n!}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]^n$. Comme la fonction puissance est négligeable devant la fonction factorielle, on a, pour tout réel x : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = 0$.

e) On conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \varphi(x)$.

Exercice 1.13.

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 strictement positif et par la relation de récurrence :
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n}$$
Pour tout réel strictement positif a, on note f_a la fonction définie, pour tout réel $x \geqslant 0$, par :
$$f_a(x) = x - \sqrt{x} - a.$$

1. Montrer que l'équation $f_a(x) = 0$ (d'inconnue x) possède une unique solution réelle notée $\ell(a)$, que l'on précisera.
Préciser les variations de f_a ainsi que le sens de variation de $a \mapsto \ell(a)$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$: $u_n > 1$. Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, déterminer sa limite.

3. On suppose vérifiée la propriété suivante :
$$(\mathcal{P}) : \text{ pour tout entier naturel } n \geqslant 1, u_n \leqslant \ell\big(\frac{1}{n}\big)$$

a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

c) Que pensez-vous de la propriété $\mathcal{P}$?

4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Solution :

1. Avec $X = \sqrt{x} \geqslant 0$, on a : $f_a(x) = 0 \iff X^2 = X + a, X \geqslant 0$.
Le discriminant est : $\Delta = (-1)^2 - 4(-a) = 1 + 4a > 0$.
Il y a donc deux racines $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. Comme $\sqrt{1+4a} > 1$, on a $X_1 < 0$ et $X_2 > 0$; donc
$$\ell(a) = X_2^2 = \big(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\big)^2.$$
$\star$ $f_a'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc f_a croît sur $]0, 1/4]$ et décroît sur $[1/4, +\infty[$.
$\star$ La fonction $a \mapsto \ell(a)$ est clairement croissante.

2. • $u_2 = \sqrt{u_1} + 1 > 1$,
• si pour un certain rang n, $u_n > 1$ alors, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n} > \sqrt{u_n} > 1$.
On conclut par le principe de récurrence.
La seule limite possible de la suite (u_n) est 1. En effet si (u_n) converge vers ℓ, alors (la fonction racine carrée est continue) on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\sqrt{u_n} + \frac{1}{n}\big) = \sqrt{\ell}$, donc $\sqrt{\ell} = \ell$. Les solutions sont $\ell = 0$ et $\ell = 1$ et 0 n'est pas possible car $(u_n)_{n\geq 2}$ est minorée par 1.

3. a) Comme $a \mapsto \ell(a)$ est croissante et $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$, il vient : $\ell\big(\frac{1}{n}\big) \leqslant \ell(1) = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

b) On a $u_{n+1}-u_n=-u_n+\sqrt{u_n}+\dfrac{1}{n}=-f_{1/n}(u_n)\geqslant 0$, car la fonction $f_{1/n}$ est négative sur $[0,\ell\left(\frac{1}{n}\right)]$ et $u_n\leqslant \ell\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

c) Si $\mathcal{P}$ est vraie, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle converge, et donc converge vers 1 d'après la question 2. Or (u_n) croît, donc $u_n\geqslant u_1>1$, d'où $\lim u_n\geqslant u_1>1$, ce qui est absurde. La propriété $\mathcal{P}$ est donc fausse.

4. Ainsi, il existe m un entier naturel non nul vérifiant : $u_m>\ell\left(\dfrac{1}{m}\right)$

On montre alors par récurrence sur $n\geqslant m$ que $u_{n+1}<u_n$:

- $u_{m+1}-u_m=-f_{1/m}(u_m)<0$, car $u_m>\ell\left(\dfrac{1}{m}\right)$, (tableau de variations de $f_{1/m}$).
- si $u_{n+1}<u_n$, alors $\sqrt{u_{n+1}}<\sqrt{u_n}$; or $\dfrac{1}{n+1}\leqslant\dfrac{1}{n}$; donc :

$$u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}}+\frac{1}{n+1}<\sqrt{u_n}+\frac{1}{n}=u_{n+1}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante à partir du rang m et minorée par 1, elle converge et sa limite ne peut être que 1.

Exercice 1.14.

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui converge vers 0.

Soit $A\in\mathbb{R}^+$; pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note : $I_n(A)=\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{a_nf(x)}{a_n^2+x^2}\,dx$.

1. Etablir l'existence de $I_n(A)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}\,dx$.

3. On suppose dans cette question que $A>0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n(A)=0$.

4. On suppose dans cette question que $f(0)=0$.
Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $A>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\Big|\int_0^A\frac{a_nf(x)}{a_n^2+x^2}\,dx\Big|\leqslant\varepsilon$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n(0)=0$.

5. On ne suppose plus que $f(0)=0$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n(0)=\frac{\pi}{2}f(0)$.

6. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{ne^{-\sqrt{t}}}{1+n^2t^2}\,dt$.

Solution :

1. La fonction $x\mapsto\dfrac{a_nf(x)}{a_n^2+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$. En notant B un majorant de $|f|$, on a :

$$\Big|\frac{a_nf(x)}{a_n^2+x^2}\Big|\leqslant\frac{a_nB}{a_n^2+x^2}$$

Ainsi la règle de Riemann assure que $I_n(A)$ existe pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2. On a :

$$\int_0^{+\infty}\frac{a_n}{a_n^2+x^2}dx=\lim_{X\to+\infty}\int_0^X\frac{1/a_n}{1+(x/a_n)^2}dx=\lim_{X\to+\infty}\big[\arctan(x/a_n)\big]_0^X$$
$$=\lim_{X\to+\infty}\arctan(X/a_n)=\frac{\pi}{2}$$

3. Soit $A>0$. En notant toujours B un majorant de $|f|$:

$$|I_n(A)| \leqslant a_n B \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{a_n B}{A}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$; donc $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(A) = 0$.

4. On a $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$; la fonction f est continue en 0 : il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \in [0, A], |f(x| \leqslant \frac{2}{\pi}\epsilon$. On a alors :

$$|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon |\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2} dx| \leqslant \frac{2}{\pi}\varepsilon \times \frac{\pi}{2} \leqslant \varepsilon$$

Le réel A ainsi défini ne dépendant pas de n.

On a ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n(0) = \displaystyle\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2} dx + I_n(A)$ et on en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = 0.$$

5. Dans le cas général, on peut écrire $f(x) = f(0) + [f(x) - f(0)]$. Si on note g la fonction $f - f(0)$, on a donc $g(0) = 0$, et :

$$\begin{aligned} I_n(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx = f(0) \int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{a_n g(x)}{a_n^2 + x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{2} f(0) + I_n(g) \end{aligned}$$

En appliquant le résultat de la question précédente à la fonction g bornée telle que $g(0) = 0$, il vient donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$$

6. On choisit $f(t) = \mathrm{e}^{-\sqrt{t}}$. La fonction f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, bornée par $f(0) = 1$, d'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{n\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1 + n^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{n f(t)}{1 + n^2 t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{n} f(t)}{\frac{1}{n^2} + t^2}\, dt$$

On reconnaît $I_n(0)$ avec $a_n = \dfrac{1}{n}$, terme général d'une suite de réels positifs convergeant vers 0. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente et :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{1 + n^2 t^2} dx = \frac{\pi}{2} f(0) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 1.15.

Si f est une fonction de classe C^∞ sur un intervalle I, on note $f^{(n)}$ $(n \geqslant 0)$ la dérivée d'ordre n de cette fonction f. On considère la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^x}{n!} f_n^{(n)}(x), \text{ où } f_n : x \mapsto x^n \mathrm{e}^{-x}$$

On admettra que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$x L_n(x) = (n+1) L_{n+1}(x) + (2n+1) L_n(x) + n L_{n-1}(x)$$

1. Calculer L_0, L_1 et L_2. Montrer que pour tout entier naturel n, L_n est une fonction polynôme de degré n (que l'on confond avec le polynôme associé).

2. Soit $n \geqslant 1$, montrer que l'on a :

$$(x - y) \sum_{k=0}^{n-1} L_k(x) L_k(y) = n(L_n(x) L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x) L_n(y))$$

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} [L_k(x)]^2 = n(L_n'(x) L_{n-1}(x) - L_{n-1}'(x) L_n(x))$$

4. On va s'intéresser aux zéros du polynôme L_n. S'il existe des zéros réels d'ordre impair, on les notera $x_1, \ldots, x_m$ avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

a) Montrer que si P est un polynôme à coefficients réels qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, alors il est de signe constant. En déduire que si L_n admet des zéros réels d'ordre impair, il se met sous la forme $L_n(X) = aP(X)(X - x_1) \cdots (X - x_m)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et P est un polynôme positif sur $\mathbb{R}$.

b) Par intégrations par parties successives et après avoir justifié l'existence de l'intégrale, montrer que pour tout polynôme Q de degré strictement inférieur à n :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)e^{-x}dx = 0$$

c) En considérant le polynôme $Q = (X - x_1)\cdots(X - x_m)$ (on posera $Q(x) = 1$ s'il n'y a pas de racine d'ordre impair), montrer que L_n a exactement n zéros réels distincts.

Solution :

1. On trouve $L_0(x) = 1$, $L_1(x) = x - 1$ et $L_2(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 1$. On déduit immédiatement de la formule de récurrence que L_n est un polynôme. On a bien $\deg(L_0) = 0$ et $\deg(L_1) = 1$.
Supposons que $\deg(L_k) = k$ pour $0 \leqslant k < n$ avec $n \geqslant 2$, il vient :

$$\deg(L_n) = \deg(\frac{1}{n}[(x - 2n + 1)L_{n-1} - (n - 1)L_{n-2}(x)]) = n$$

2. Soit $n \geqslant 1$, en utilisant la formule de récurrence on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta &= (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x)L_k(y)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(xL_k(x))L_k(y) - \sum_{k=1}^{n-1} L_k(x)(yL_k(y)) + (x-y)L_0(x)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}[(k+1)L_{k+1}(x) + (2k+1)L_k(x) + kL_{k-1}(x)]L_k(y)\\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n-1} L_k(x)[(k+1)L_{k+1}(y) + (2k+1)L_k(y) + kL_{k-1}(y)] + x - y\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) + \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)L_k(x)L_{k+1}(y)\\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)L_k(x)L_{k+1}(y) - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)L_{k+1}(x)L_k(y) + x - y\\
&= nL_n(x)L_{n-1}(y) - L_1(x)L_0(y) + L_0(x)L_1(y) - nL_{n-1}(x)L_n(y) + x - y\\
&= n(L_n(x)L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x)L_n(y))
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait.

3. Avec la question précédente, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n-1} L_k(x)L_k(y) = n\frac{L_n(x) - L_n(y)}{x - y}L_{n-1}(y) + n\frac{L_{n-1}(y) - L_{n-1}(x)}{x - y}L_n(y)$$

Il suffit alors de faire tendre y vers x pour obtenir le résultat.

4. Soient $x_1, \dots, x_m$ les zéros d'ordre impair de L_n avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

a) Si P n'est pas constant, il tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$, comme il ne s'annule pas on a $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(x)$ (sinon on aurait un zéro avec le théorème des valeurs intermédiaires). On se ramène donc sur un intervalle borné sur lequel il ne peut pas changer de signe non plus car on aurait à nouveau un zéro. Il est donc de signe constant sur $\mathbb{R}$. En factorisant L_n en tenant compte de ses zéros, on voit que $L_n(x) = P_1(x)P_2(x)$, où P_1 est de signe constant sur $\mathbb{R}$ et P_2 est un produit de facteurs de degré 1. En tenant compte du début de cette question et des zéros de degré pair, on voit que L_n se met sous la forme souhaitée.

b) $\star$ On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2L_n(x)Q(x)e^{-x} = 0$ et la règle de Riemann donne la convergence de l'intégrale proposée.

$\star$ Intégrons par parties, en dérivant $x \mapsto Q(x)$ en $x \mapsto Q'(x)$. et en intégrant $x \mapsto L_n(x)e^{-x} = \dfrac{(-1)^n}{n!}f_n^{(n)}(x)$ en $x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}f_n^{(n-1)}(x)$ qui est de la forme $x \mapsto xR(x)e^{-x}$, où R est une fonction polynôme.

Comme $\lim_{x\to+\infty} xR(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, on peut effectuer cette intégration directement avec la borne infinie et on trouve :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = -\int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}Q'(x)f_n^{(n-1)}(x)\,dx$$

On recommence et au bout de n intégrations par parties, il vient :

$$\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n!}Q^{(n)}(x)f_n(x)\,dx = 0$$

puisque $Q^{(n)}(x) = 0$ (on a $\deg(Q) < n$).

c) Supposons que $m < n$. Il vient alors :

$$0 = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} L_n(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}dx = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)^2\mathrm{e}^{-x}dx$$

Or la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)^2e^{-x}$ est continue et positive, elle doit donc être nulle sur $\mathbb{R}^+$, ce qui est impossible. Par suite, L_n a nécessairement n zéros distincts.

Exercice 1.16.

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = (4n+2)u_n + u_{n-1}$$

1. On considère les deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E et définies par $\alpha_0 = \beta_1 = 1$ et $\alpha_1 = \beta_0 = 0$.

a) Étudier la monotonie des suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l'infini.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\alpha_{n+1}\beta_n - \alpha_n\beta_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

d) Montrer que les deux suites $\left(\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

e) Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

Comparaison asymptotique des suites.

f) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n} - \ell\right| \leqslant \frac{1}{\beta_n\beta_{n+1}}$.

g) Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n)$.

h) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \mu\beta_n)$ en fonction de la position de μ par rapport à ℓ.

2. Dans cette question, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de E.

a) Montrer qu'il existe deux réels λ et λ' tels que :

$$u_0 = \lambda\alpha_0 - \lambda'\beta_0 \text{ et } u_1 = \lambda\alpha_1 - \lambda'\beta_1.$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\alpha_n - \lambda'\beta_n$.

c) Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, alors $\lambda' = \lambda\ell$.

Solution :

1. a) On montre dans un premier temps par une récurrence évidente que les suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$ sont à termes strictement positifs. On vérifie alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = (4n+2)\alpha_n + \alpha_{n-1} - \alpha_n = (4n+1)\alpha_n + \alpha_{n-1} \geqslant 0$$

Ainsi, la suite (α_n) est croissante à partir du rang 1. On montre de même que la suite (β_n) est croissante.

b) Comme la suite (α_n) est croissante, soit elle converge, soit elle tend vers $+\infty$. Supposons par l'absurde que la suite (α_n) converge. La limite est alors strictement positive car $\alpha_n \geqslant \alpha_2 \geqslant 1$. On obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n + 2 = (\alpha_{n+1} - \alpha_{n-1})/\alpha_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui est impossible car la suite $(4n+2)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. On procède de même pour la suite (β_n).

c) On montre cette propriété par récurrence sur n.
• lorsque $n = 0$, on a bien $\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 = -1$.
• soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété annoncée soit vérifiée à l'ordre n. On a alors

$$\begin{aligned}\alpha_{n+2}\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_{n+2} &= ((4n+6)\alpha_{n+1} + \alpha_n)\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}((4n+6)\beta_{n+1} + \beta_n)\\ &= \alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}\beta_n = (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

On conclut à l'aide du principe de récurrence.

d) On montre les trois propriétés des suites adjacentes.
• on vérifie aisément que $\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}}$.
Ainsi, comme (β_n) tend vers $+\infty$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\dfrac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \dfrac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\big) = 0$.

• toujours en utilisant la relation de récurrence,

$$\frac{\alpha_{2n+2}}{\beta_{2n+2}} - \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} = \frac{((4(2n+1)+2)\alpha_{2n+1} + \alpha_{2n})\beta_{2n} - \alpha_{2n}((4(2n+1)+2)\beta_{2n+1} + \beta_{2n})}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}}$$

$$\frac{\alpha_{2n+2}}{\beta_{2n+2}} - \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} = \frac{(8n+6)\big(\alpha_{2n+1}\beta_{2n} - \alpha_{2n}\beta_{2n+1}\big)}{\beta_{2n}\beta_{2n+2}} = -\frac{8n+6}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}} < 0$$

Ainsi, (α_{2n}/β_{2n}) est décroissante.
• on montre de manière analogue que $(\alpha_{2n+1}/\beta_{2n+1})$ est croissante.

e) Notons $u_n = \alpha_n/\beta_n$. Comme les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Ainsi, la suite (u_n) converge également vers ℓ.

f) Comme ℓ est la limite de deux suites adjacentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}} \leqslant \ell \leqslant \frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \ell\Big| \leqslant \Big|\frac{\alpha_{2n}}{\beta_{2n}} - \frac{\alpha_{2n+1}}{\beta_{2n+1}}\Big| = \frac{1}{\beta_{2n}\beta_{2n+1}}$$

On montre la même inégalité pour les entiers n impairs.

g) En utilisant l'inégalité précédente : $|\alpha_n - \ell\beta_n| \leqslant \dfrac{1}{\beta_{n+1}}$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}(\alpha_n - \ell\beta_n) = 0$$

h) Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On écrit $(\alpha_n - \mu\beta_n) = (\alpha_n - \ell\beta_n) + (\ell - \mu)\beta_n$.
Si $\ell < \mu$, $\lim(\alpha_n - \mu\beta_n) = -\infty$; si $\ell > \mu$, $\lim(\alpha_n - \mu\beta_n) = +\infty$, le cas $\ell = \mu$ est déjà traité.

2. a) Comme $-\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = -1$, d'après les formules de Cramer, le système proposé possède une unique solution, cette solution est d'ailleurs évidente :

$$(\lambda, \lambda') = (u_0, -u_1).$$

b) Le résultat est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$, l'hérédité est une conséquence banale de la relation de récurrence de définition. On conclut par le principe de récurrence.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $u_n = \lambda(\alpha_n - \dfrac{\lambda'}{\lambda}\beta_n)$. Ainsi, d'après l'étude précédente, si $\lim u_n = 0$, alors $\lambda' = \ell\lambda$.

Exercice 1.17.

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -2$ et la relation de récurrence : pour $n \geqslant 2$,

$$u_n = -2u_{n-1} + \big(\frac{1}{n} - 1\big)u_{n-2}$$

1. Montrer que $|u_n| \leqslant v_n$ pour tout entier naturel n, où la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est définie par $v_0 = 1, v_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 2$: $v_n = 2v_{n-1} + v_{n-2}$.

2. Montrer qu'il existe des constantes A, B, a, b que l'on déterminera telles que $\forall\, n \in \mathbb{N}, v_n = Aa^n + Bb^n$. En déduire que pour tout entier positif n, on a :

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}$$

3. Prouver que les séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} n u_n x^{n-1}$ sont absolument convergentes pour tout x appartenant à l'intervalle $I =]-1/(1+\sqrt{2}), 1/(1+\sqrt{2})[$.

4. Pour $x \in I$, on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$.

a) Soit $n \geqslant 2$; montrer pour tout couple $(t, h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, que :

$$\left| \frac{(t+h)^n - t^n}{h} - n t^{n-1} \right| \leqslant \frac{n(n-1)}{2} |h| \left(|h| + |t|\right)^{n-2}$$

b) Soit $x \in I$ et r tel que $|x| < r < 1/(1+\sqrt{2})$. Vérifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)|u_n| r^n$ est convergente.

Montrer que pour tout $h \in]-(r-|x|), r-|x|[\setminus \{0\}$, on a :

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leqslant |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n| r^n.$$

En déduire que f est dérivable sur I et que $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}$.

5. Montrer que pour tout $x \in I$, on a $(1+x)^2 f'(x) = -(2+x) f(x)$. Déterminer la fonction f.

Solution :

1. La propriété est déjà vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Soit $n \geqslant 2$, supposons que $|u_k| \leqslant v_k$ pour $0 \leqslant k < n$, il vient :

$$\begin{aligned} |u_n| &= |-2u_{n-1} + (\frac{1}{n} - 1)u_{n-2}| \leqslant 2|u_{n-1}| + (1 - \frac{1}{n})|u_{n-2}| \leqslant 2|u_{n-1}| + |u_{n-2}| \\ &\leqslant 2v_{n-1} + v_{n-2} = v_n \end{aligned}$$

2. La suite (v_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $a = 1 - \sqrt{2}$ et $b = 1 + \sqrt{2}$, et par suite v_n est de la forme $Aa^n + Bb^n$. Pour déterminer A et B, il suffit de résoudre le système donné par les équations $v_0 = 1$ et $v_1 = 2$. On trouve finalement :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $|u_n| \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{n+1}$, pour tout entier positif n.

3. Soit $x \in I$; on a $|u_n x^n| \leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(|x|(1+\sqrt{2}))^n$. Comme $|x|(1+\sqrt{2}) < 1$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs montre que la série définissant $f(x)$ est absolument convergente.

De même, on a $|n u_n x^{n-1}| \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} n(|x|(1+\sqrt{2}))^{n-1}$ et le théorème de comparaison permet encore de conclure, puisque l'on reconnaît dans la série majorante la série dérivée d'une série géométrique convergente.

4. Soit $x \in I$; avec la question précédente, on voit que les fonctions f et g sont bien définies.

a) Soit $n \geqslant 2$. Posons $\varphi : x \mapsto x^n$, on a par la formule de Taylor :

$$\left| \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} - \varphi'(t) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} \sup_{x \in [t, t+h]} |\varphi''(x)|$$

soit ici : $\left| \frac{(t+h)^n - t^n}{h} - n t^{n-1} \right| \leqslant \frac{|h|}{2} n(n-1) \sup\limits_{x \in [t, t+h]} |x|^{n-2}$:

Donc :

$$\left| \frac{(t+h)^n - t^n}{h} - n t^{n-1} \right| \leqslant \frac{n(n-1)}{2} |h| \left(|h| + |t|\right)^{n-2}$$

b) Soit $x \in I$ et r tel que $|x| < r < \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)|u_n|r^{n-2}$ est convergente car $0 < (1+\sqrt{2})r < 1$ et

$$n(n-1)|u_n|r^{n-2} \leqslant \frac{(1+\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} n(n-1)[(1+\sqrt{2})r]^{n-2}$$

On reconnaît alors le terme général d'une série dérivée seconde d'une série géométrique convergente.

Avec a), on obtient pour tout $h \in]-(r-|x|), r-|x|[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)| &= |\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{(x+h)^n - x^n}{h} - \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1}| \\ &= |\sum_{n=2}^{+\infty} u_n [\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}]| \\ &\leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n||h|(|h|+|x|)^{n-2} \\ &\leqslant |h| \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} |u_n| r^{n-2}\end{aligned}$$

Avec la définition de la dérivée, on voit qu'il suffit de faire tendre h vers 0 pour prouver que f est dérivable au point x, avec $f'(x) = g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1}$.

5. On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^2 f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) u_{n+1} x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) u_{n-1} x^n \\ &= u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)u_{n+1} + 2n u_n + (n-1) u_{n-1}] x^n\end{aligned}$$

Or $(n+1)u_{n+1} = -2(n+1)u_n - n u_{n-1}$, et donc :

$$(1+x^2) f'(x) = -2 + \sum_{n=1}^{+\infty} [-2u_n - u_{n-1}] x^n = -2 - 2(f(x)-1) - x f(x)$$

$$(1+x^2) f'(x) = -(x+2) f(x)$$

On obtient donc l'équation différentielle du premier ordre sur I $(-1 \notin I)$:

$$f'(x) = -\frac{x+2}{(x+1)^2} f(x) = -\frac{(x+1)+1}{(x+1)^2} f(x) = [-\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}] f(x)$$

D'où :

$$f(x) = C \exp(-\ln(x+1) + \frac{1}{x+1}) = \frac{C}{x+1} \exp(\frac{1}{x+1})$$

Or, $f(0) = u_0 = 1$, d'où $C = \mathrm{e}^{-1}$ et par suite :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \exp(\frac{1}{x+1} - 1) = \frac{1}{x+1} \exp(-\frac{x}{x+1})$$

Exercice 1.18.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles strictement positives.

On dit que f est logarithmiquement convexe si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

On admet le résultat suivant :

Soit α, β deux réels supérieurs à 1, tels que $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $h, k : I \to \mathbb{R}$ telles que $\int_I |h(t)|dt$ et $\int_I |k(t)|dt$ convergent. Alors $\int_I |h(t)k(t)|dt$ converge et

$$\int_I |h(t)k(t)|dt \leqslant \Big(\int_I |h(t)|^\alpha dt\Big)^{1/\alpha} \times \Big(\int_I |k(t)|^\beta dt\Big)^{1/\beta}$$

1. Soit X une variable aléatoire possédant une densité telle que l'espérance $E(\mathrm{e}^{\lambda X})$ soit définie pour tout réel λ. Montrer que l'application $\varphi : \lambda \mapsto E(\mathrm{e}^{\lambda X})$ est logarithmiquement convexe.

2. Montrer que si f est logarithmiquement convexe, alors f est convexe.

3. Caractérisation des fonctions logarithmiquement convexes.
On notera, pour tout réel $c > 0$, $\varphi_c : I \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto f(x)c^x$.

a) Montrer que si f est logaritmiquement convexe, alors pour tout $c > 0$, φ_c est convexe.

b) Soit $c > 0$. On suppose que φ_c est convexe. Montrer que pour tous $a, b \in I, \lambda \in [0,1]$, il existe un réel α tel que

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}.$$

c) En choisissant judicieusement α dans la question précédente, montrer que si φ_c est convexe pour tout $c > 0$, alors f est logarithmiquement convexe.

4. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que si f et g sont logarithmiquement convexes, alors $f+g$ est logarithmiquement convexe.

Solution :

1. On remarque que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda) > 0$.
Soient p, $q \in [0,1]$ tels que $p+q=1$ et λ, μ des réels. Alors, avec $p = \dfrac{1}{\alpha}$ et $q = \dfrac{1}{\beta}$ et en notant f une densité sur $\mathbb{R}$ de X :

$$\begin{aligned}[E(\mathrm{e}^{\lambda X})]^p.[E(\mathrm{e}^{\mu X}]^q &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\lambda x} f(x)\,dx\Big)^p \Big(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mu x} f(x)\,dx\Big)^q \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\lambda x} f(x))^p (\mathrm{e}^{\mu x} f(x))^q\,dx\end{aligned}$$

Soit : $[E(\mathrm{e}^{\lambda X})]^p.[E(\mathrm{e}^{\mu X}]^q \geqslant \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{p\lambda x}\mathrm{e}^{q\mu x} f(x)\,dx = E(\mathrm{e}^{(\lambda p + \mu q)X})$

Ainsi $\varphi(\lambda)^p\varphi(\mu)^q \geqslant \varphi(\lambda p + \mu q)$ et le résultat en prenant le logarithme :

$$\ln\circ\varphi(p\lambda + q\mu) \leqslant p\ln\circ\varphi(\lambda) + q\ln\circ\varphi(\mu).$$

Donc φ est logarithmiquement convexe.

2. Soit f une fonction logarithmiquement convexe. On rappelle que la fonction exponentielle est croissante et convexe. Ainsi, pour tous $\lambda \in [0,1]$ et x, $y \in I$,

$$\begin{aligned}\ln(f(\lambda x + (1-\lambda y))) &\leqslant \lambda\ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) \\ f(\lambda x + (1-\lambda y)) &\leqslant \exp\{\lambda\ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y))\} \\ &\leqslant \lambda\exp\{\ln f(x)\} + (1-\lambda)\exp\{\ln f(y)\} \\ &\leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f est convexe.

3. a) On remarque que pour tout $x \in I$, $\ln(\varphi_c(x)) = \ln f(x) + x\ln c$. Ainsi, comme la fonction $\ln f$ est convexe et que les fonctions affines sont convexes, la fonction $\ln\circ\varphi_c$ est convexe. Donc la fonction φ_c est logarithmiquement convexe et d'après la question précédente, elle est convexe.

b) Soient $\lambda \in [0,1]$, a, $b \in I$. On utilise la convexité de la fonction φ_c :

$$\varphi_c(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda\varphi_c(a) + (1-\lambda)\varphi_c(b)$$

Donc : $f(\lambda a + (1-\lambda)b)c^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leqslant \lambda f(a)c^a + (1-\lambda)f(b)c^b$

Soit, en plaçant toutes les puissances de c à droite :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda},$$

où on a posé $\alpha = c^{a-b}$.

c) Soit $\psi : \alpha \mapsto \lambda f(a)\alpha^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda}$.

$$\begin{aligned}\psi'(\alpha) &= \lambda(1-\lambda)f(a)\alpha^{-\lambda} - \lambda(1-\lambda)f(b)\alpha^{-\lambda-1} \\ &= \lambda(1-\lambda)\alpha^{-\lambda-1}(\alpha f(a) - f(b))\end{aligned}$$

Ainsi ψ atteint son maximum en $\alpha = \dfrac{f(b)}{f(a)}$ et

$$\psi(\frac{f(b)}{f(a)}) = \lambda f(a)(\frac{f(b)}{f(a)})^{1-\lambda} + (1-\lambda)f(b)(\frac{f(b)}{f(a)})^{-\lambda}$$

Soit : $\psi(\dfrac{f(b)}{f(a)}) = (\lambda + 1 - \lambda)f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda} = f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$

Soit, en reportant dans la majoration obtenue en b) :

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant f(a)^{\lambda}f(b)^{1-\lambda}$$

Et donc :

$$\ln \circ f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda \ln \circ f(a) + (1-\lambda)\ln \circ f(b)$$

Ceci étant vrai pour tous a, $b \in I$, $\lambda \in [0,1]$, la fonction $\ln \circ f$ est bien convexe.

4. Pour toute fonction f de I dans $\mathbb{R}_+^\star$, notons $\varphi_{f,c} : I \to \mathbb{R}_+$ définie par $\varphi_{f,c}(x) = f(x)c^x$.

Soient f, g deux fonctions logarithmiquement convexes. Alors, pour tout $c > 0$, $\varphi_{f,c}$ et $\varphi_{g,c}$ sont convexes. Donc, pour tout $c > 0$, $\varphi_{f,c} + \varphi_{g,c} = \varphi_{f+g,c}$ est convexe. Ainsi, d'après la question précédente, $f + g$ est logarithmiquement convexe.

Exercice 1.19.

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire canonique $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$, où $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$.
Dans tout l'exercice, U est un ouvert convexe non vide de $\mathbb{R}^2$, et f une application de U dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 sur U. On note, pour tout $a \in U$, ∇f_a le gradient de f au point a.

[On rappelle qu'une partie U de $\mathbb{R}^2$ est convexe si

$$\forall\,(x, y) \in U^2, \forall\,\lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)y \in U.$$

De même une fonction f définie sur U est convexe si

$$\forall (x, y) \in U^2, \forall\,\lambda \in [0,1] : f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)]$$

1. Soit $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans U et $\varphi_{x,y}$ définie sur $[0,1]$ par : $\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x))$.
Montrer que $\varphi_{x,y}$ est de classe C^1 et montrer que $\varphi'_{x,y}(t) = \langle \nabla f_{x+t(y-x)}, y - x\rangle$ pour tout $t \in [0,1]$.

2. On suppose que f est convexe sur U.

a) Montrer que pour tout $(x, y) \in U^2$, $\varphi_{x,y}$ est convexe. En déduire que la fonction $\varphi'_{x,y}$ est croissante.

b) En déduire que $\forall (x, y) \in U^2 : f(y) - f(x) \geqslant \langle \nabla f_x, y - x\rangle \qquad (1)$.

3. Réciproquement on suppose que f vérifie la relation (1) ci-dessus. Montrer que f est convexe.

4. Soit f convexe sur U.

a) Montrer que si f présente en $x_0 \in U$ un minimum relatif, alors f présente en x_0 un minimum global.

b) Montrer que si l'ensemble des points où f admet un minimum est non vide, alors cet ensemble est une partie convexe de U.

Solution :

1. La fonction f étant de classe C^1 il en est de même pour φ par composition de fonctions de classe C^1. De plus comme

$$\varphi_{x,y}(t) = f(x + t(y-x)) = f(x_1 + t(y_1 - x_1), x_2 + t(y_2 - x_2)$$

Il vient, par dérivation d'une composée :

$$\begin{aligned}\varphi'_{x,y}(t) &= (y_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x + t(y-x)) + (y_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial y}(x + t(y-x))\\ &= \langle \nabla f_{x+t(y-x)}, y - x\rangle\end{aligned}$$

2. On suppose de plus f convexe.

a) Soit $(t_1, t_2, \lambda) \in [0,1]^3$.

$$\begin{aligned}\varphi_{x,y}(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2) &= f(x+(\lambda t_1+(1-\lambda)t_2)(y-x))\\ &= f(\lambda(x+t_1(y-x))+(1-\lambda)(x+t_2(y-x)))\\ &\leqslant \lambda f(x+t_1(y-x))+(1-\lambda)f(x+t_2(y-x))\\ &\leqslant \lambda\varphi_{x,y}(t_1)+(1-\lambda)\varphi_{x,y}(t_2)\end{aligned}$$

Ceci montre la convexité de $\varphi_{x,y}$ sur $[0,1]$, pour tout choix de x et y dans U.

La fonction $\varphi_{x,y}$ étant de plus de classe C^1 sur $[0,1]$, on sait alors que sa dérivée est croissante sur cet intervalle.

b) Du théorème des accroissements finis et de la croissance de $\varphi_{x,y}$, on déduit que : $\varphi_{x,y}(1)-\varphi_{x,y}(0) \geqslant \varphi'_{x,y}(0)$. C'est-à-dire, compte tenu du résultat de la première question :

$$\forall\, x,y\in U, f(y)-f(x)\geqslant \langle \nabla f_x, y-x\rangle \quad (1)$$

3. Soit $x,y\in U$ et $\lambda\in[0,1]$. Posons $z=\lambda y+(1-\lambda)x = x+\lambda(y-x)$.

$\star$ On a : $f(z)-f(x)=\varphi_{x,y}(\lambda)-\varphi_{x,y}(0)$, donc il existe $c\in\,]0,\lambda[$ tel que :

$$f(z)-f(x)=\lambda\varphi'_{x,y}(c)$$

$\star$ De même il existe $d\in\,]\lambda,1[$ tel que :

$$f(y)-f(z)=\varphi_{x,y}(1)-\varphi_{x,y}(\lambda)=(1-\lambda)\varphi'_{x,y}(d)$$

On a donc $c\leqslant d$ et la fonction φ' étant croissante, on en déduit :

$$(1-\lambda)(f(z)-f(x))\leqslant \lambda(f(y)-f(z))$$

Soit $f(z)\leqslant \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x)$, c'est-à-dire :

$$f(\lambda y+(1-\lambda)x)\leqslant \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x)$$

et f est bien convexe.

4. a) Si f présente au point x_0 un minimum relatif, alors le gradient de f en x_0 est nul. Comme f est convexe, d'après ce qui précède :

$$\forall\, x\in U, f(x)-f(x_0)\geqslant \langle \nabla f_{x_0}, x-x_0\rangle = 0,$$

ce qui montre que ce minimum est en fait global.

b) Si x_1 et x_2 sont deux points où f admet un minimum (local, donc global), on a $f(x_1)=f(x_2)$, De plus, f étant convexe,

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)=f(x_1)$$

Comme, par définition d'un minimum, on a $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant f(x_1)$, on a en fait égalité et f présente aussi en $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$ un minimum, ce qui donne le résultat demandé.