3

PROBABILITES

Exercice 3-1

Soit f une fonction définie, continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ telle que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$.

On considère une variable aléatoire réelle X de densité φ définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ f(x) & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

On suppose que X admet une espérance $E(X)$. On note F la fonction de répartition de X et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, Q(x) = \frac{1}{E(X)} \int_0^x tf(t)dt$$

1. On étudie dans cette question le cas particulier où X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Déterminer F et Q.

b) Déterminer une application C de $[0, 1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.

c) Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

2. On revient maintenant au cas général.

a) Montrer que Q est définie sur $\mathbb{R}^+$.
Déterminer une application C de $[0, 1]$ dans lui–même telle que $Q = C \circ F$.
Dresser le tableau de variations de C. Déterminer un réel t_0 tel que $C'(t_0) = 1$, puis un réel x_0 tel que $F(x_0) = t_0$.

b) Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 C(x)dx = \int_0^{+\infty} Q(x)f(x)dx$.

Solution :

1. a) La fonction de répartition de la loi exponentielle est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Son espérance est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$, et pour tout $x \geq 0$:

$$Q(x) = \lambda \int_0^x \lambda t.\mathrm{e}^{-\lambda t} dt = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(\lambda x + 1)$$

qui est obtenu par une intégration par parties évidente.

b) Pour tout x positif, $Q'(x) = \lambda^2 x.\mathrm{e}^{-\lambda x}$ et $F'(x) = \lambda.\mathrm{e}^{-\lambda x}$ sont toutes deux positives. Ainsi Q et F réalisent chacune une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$, et $C = Q \circ F^{-1}$ est une bijection de $[0,1[$ sur lui–même.
Il suffit de poser $C(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} Q \circ F^{-1}(x) = 1$, pour définir C comme bijection de $[0, 1]$ sur lui–même.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}^+, Q(x) = C\big(F(x)\big)$.
c) Par composition, C est une application strictement croissante sur $[0, 1]$. Un calcul immédiat donne :

$$F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - x) \implies C(x) = x + (1 - x) \ln(1 - x)$$

On a alors $C'(x) = -\ln(1 - x)$ et $C'(x) = 1 \iff x = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. Enfin :

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-1} \iff F^{-1}(1 - \mathrm{e}^{-1}) = x \iff x = \frac{1}{\lambda} = E(X)$$

2. a) Comme f est strictement positive, l'espérance $E(X)$ est strictement positive ce qui entra"ne que Q est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = f(x) > 0$ et $Q'(x) = \dfrac{xf(x)}{E(X)} > 0$. Ceci entraîne que F et Q sont deux bijections continues de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} Q(x) = 1$, il suffit de prendre $C = Q \circ F^{-1}$ et $C(1) = 1$, pour prouver que C est une bijection de $[0, 1]$.

Comme F' est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, F^{-1} est dérivable sur $[0, 1[$ et par composition, C l'est également. De plus :

$$C'(x) = Q'\big(F^{-1}(x)\big)(F^{-1})'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x) f(F^{-1}(x))(F^{-1})'(x)$$

Or :

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{f(F^{-1}(x))}$$

donc :

$$C'(x) = \frac{1}{E(X)} F^{-1}(x)$$

Enfin :

$$C'(t) = 1 \iff F^{-1}(t) = E(X) \iff t = F(E(X))$$

et, par bijectivité de F :

$$F(x) = t = F(E(X)) \iff x = E(X)$$

b) Il vient :

$$\int_0^1 C(x)dx = \lim_{a \to 1^-} \int_0^a Q(F^{-1}(x))dx$$

Posons $u = F^{-1}(x)$. Alors $x = F(u)$ et

$$\int_0^a Q(F^{-1}(x))dx = \int_0^{F^{-1}(a)} Q(u)f(u)du$$

Il reste à prendre la limite en a pour obtenir le résultat demandé.

Exercice 3-2

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi uniforme sur $A_n = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

2. Déterminer la fonction de répartition F de $|S|$ (valeur absolue de S).

La suite de l'exercice consiste à donner une expression intégrale de F. Pour cela, on notera N_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $x + y = k$.

3.a) Exprimer en fonction de N_k le coefficient de z^k dans le développement de :

$$\left(\frac{1}{z^n} + \frac{1}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots + z^n\right)^2$$

b) On pose $z = \mathrm{e}^{it}$, $t \in [-\pi; \pi[$.

Pour $t \neq 0$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z^k$ sous la forme $\dfrac{\sin(p_n t/2)}{\sin t/2}$, où p_n est un entier que l'on déterminera en fonction de n. Que trouve-t-on pour $t = 0$?

4. On admettra que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \int_a^b \mathrm{e}^{i\alpha t} dt = \frac{1}{i\alpha}\left(\mathrm{e}^{i\alpha b} - \mathrm{e}^{i\alpha a}\right)$$

Montrer que :

$$\forall k \in A_n,\ N_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Big(\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt}\Big) \mathrm{e}^{-ikt} dt$$

5. a) Pour $k \in \{0, \ldots, 2n\}$, on appelle M_k le nombre de couples $(x, y) \in A_n^2$ tels que $-k \leq x + y \leq k$.
Etablir la formule :

$$M_k = c \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2((2n+1)u) \sin(2k+1)u}{\sin^3 u} du$$

où c est une constante à déterminer.

b) En déduire une expression de $F(k)$ sous forme intégrale.

Solution :

1. Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = A_n$, il vient immédiatement que $S(\Omega) = A_{2n}$. Soit $k \in A_{2n}$. On a :

$$(S = k) = \bigcup_{i=-n}^{i=n} (X = i, Y = k - i)$$

Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes, il vient :

$$P(S = k) = P\Big(\bigcup_{i=-n}^{i=n} (X = i, Y = k - i)\Big) = \sum_{i=-n}^{i=n} P(X = i)P(Y = k - i)$$

Mais ceci n'est valable que si :

$$\begin{cases} -n \leq k - i \leq n \\ -n \leq i \leq n \end{cases} \iff \begin{cases} k - n \leq i \leq k + n \\ -n \leq i \leq n \end{cases}$$

Ainsi :

- si $k \leq 0$, ceci est équivalent à $-n \leq i \leq k + n$ et :

$$P(S = k) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=-n}^{k+n} 1 = \frac{2n + k + 1}{(2n+1)^2}$$

- si $k > 0$, ceci est équivalent à $k - n \leq i \leq n$ et :

$$P(S = k) = \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{i=k-n}^{n} 1 = \frac{2n - k + 1}{(2n+1)^2}$$

Ce qui peut se résumer par, pour tout $k \in A_{2n}$:

$$P(S = k) = \frac{2n - |k| + 1}{(2n+1)^2}$$

2. On a $|S|(\Omega) = \{0, 1, \ldots, 2n\}$ et :

$$P(|S| = 0) = P(S = 0) = \frac{1}{2n+1}$$

et pour tout $k \geq 1$:

$$P(|S| = k) = P(S = k) + P(S = -k) = \frac{2(2n - k + 1)}{(2n+1)^2}$$

Un simple calcul donne la fonction de répartition F de $|S|$:

$$F(k)=\begin{cases} 0 & \text{si } k<0 \\ \dfrac{1}{2n+1} & \text{si } k=0 \\ \dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{k(4n-k+1)}{(2n+1)^2} & \text{si } 1\leq k\leq 2n \\ 1 & \text{si } k>2n \end{cases}$$

3. a) Notons $S_n(z)=\left(\dfrac{1}{z^n}+\dfrac{1}{z^{n-1}}+\cdots+\dfrac{1}{z}+1+z+\cdots+z^n\right)^2$. Alors :

$$S_n(z)=\sum_{(p,q)\in A_n^2} z^p z^q=\sum_{-2n\leq p+q\leq 2n} z^p z^q=\sum_{-2n\leq k\leq 2n} N_k z^k$$

b) Effectuons le calcul proposé :

$$\begin{aligned} S_n(t)&=\sum_{k=-n}^{n}(\mathrm{e}^{it})^k=\mathrm{e}^{-int}\sum_{k=-n}^{n}(\mathrm{e}^{i(n+k)t})=\mathrm{e}^{-int}\sum_{j=0}^{2n}(\mathrm{e}^{ijt}) \\ &=\mathrm{e}^{-int}\frac{\mathrm{e}^{(2n+1)it}-1}{\mathrm{e}^{it}-1}=\mathrm{e}^{-int}\mathrm{e}^{-it/2}\frac{\mathrm{e}^{(2n+1)t}-1}{\mathrm{e}^{it/2}(e^{it}-1)} \\ &=\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2} \end{aligned}$$

Cette expression se prolonge par continuité pour $t=0$ en $2n+1$.

4. Là encore, effectuons le calcul demandé.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{j=-2n}^{2n}N_j\mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{j=-2n}^{2n}N_j\mathrm{e}^{i(j-k)t}\Big)dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\Big(N_k+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-2n,j\neq k}^{2n}N_j\mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\Big(N_k+\sum_{j=-2n,j\neq k}^{2n}\int_{-\pi}^{\pi}N_j\mathrm{e}^{ijt}\Big)\mathrm{e}^{-ikt}dt \\ &=N_k \end{aligned}$$

5. a) On sait que :

$$\begin{aligned} M_k&=\sum_{j=-k}^{k}N_j=\sum_{j=-k}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{p=-2n}^{2n}N_p\mathrm{e}^{ipt}\Big)\mathrm{e}^{-ijt}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{j=-k}^{k}\Big(\sum_{p=-2n}^{2n}N_p\mathrm{e}^{ipt}\Big)\mathrm{e}^{-ijt}dt \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{p=-2n}^{2n}N_p\mathrm{e}^{ipt}\Big)\sum_{j=-k}^{k}\mathrm{e}^{-ijt}dt \end{aligned}$$

Or, d'après la question 3.a) :

$$\sum_{p=-2n}^{2n} N_p \mathrm{e}^{ipt} = \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2$$

Donc en utilisant la parité de la fonction à intégrer, puis le changement de variables $u = t/2$, il vient :

$$\begin{aligned} M_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2 \Big(\frac{\sin(2k+1)t/2}{\sin t/2}\Big) dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \Big(\frac{\sin(2n+1)t/2}{\sin t/2}\Big)^2 \Big(\frac{\sin(2k+1)t/2}{\sin t/2}\Big) dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin^2[(2n+1)t].\sin[(2k+1)t]}{\sin^3 t} dt \end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \{0, \ldots, 2n\}$:

$$\begin{aligned} F(k) &= P(|S| \leq k) = P(-k \leq S \leq k) = \sum_{j=0}^{k} P(-j \leq X+Y \leq j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \Big(\sum_{r=-j}^{j} P(X+Y=r)\Big) = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{r=-j}^{j} N_r \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(2n+1)t]\sin[(2r+1)t]}{\sin^3 t} dt \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j} \frac{\sin^2[(2n+1)t]\sin[(2r+1)t]}{\sin^3 t} dt \\ &= \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2[(2n+1)t]}{\sin^3 t} \Big(\sum_{j=0}^{k}\sum_{r=-j}^{j} \sin[(2r+1)t]\Big) dt \end{aligned}$$

Exercice 3-3

Une urne contient b boules blanches, n boules noires, r boules rouges ; b et n sont des entiers naturels non nuls, r est un entier naturel.
Un joueur tire une boule. Si elle est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage (avant le second tirage, l'urne contient donc $r-1$ boules rouges).
Dans ce cas, si la boule est blanche, il gagne ; si elle est noire, il perd ; si elle est rouge, il la met de côté et effectue un autre tirage, etc.
La partie s'achève lorsque le joueur a gagné ou perdu.

1. On note B_i (resp N_i, R_i) l'événement : «le joueur tire une boule blanche (resp une boule noire, une boule rouge) au i-ème coup.»

On note G_r l'événement : «le joueur gagne en commençant ses tirages dans une urne contenant r boules rouges».

a) Calculer les probabilités $p(G_0)$ et $p(G_1)$.

b) Trouver une relation entre $p(G_r)$ et $p(G_{r-1})$.

c) Calculer $p(G_r)$.

2. Soit X_r la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour qu'une partie s'achève, l'urne contenant au départ r boules rouges.

a) Calculer les espérances $E(X_0)$, $E(X_1)$, $E(X_2)$.

b) Trouver une relation entre $p(X_r = k)$ et $p(X_{r-1} = k-1)$ (pour $r \geq 1$ et $k \geq 2$), puis entre $E(X_r)$ et $E(X_{r-1})$.

c) En déduire $E(X_r)$.

Solution :

1. a) $\star$ Pour déterminer la probabilité de l'événement G_0, on sait que l'on est dans la situation où il n'y a pas de boules rouges dans l'urne. Donc le joueur gagne ou perd et :

$$P(G_0) = P(B_1) = \frac{b}{n+b}$$

$\star$ Il y a maintenant une boule rouge dans l'urne et l'événement G_1 s'écrit alors : $G_1 = B_1 \cup (R_1 \cap B_2)$. Soit :

$$P(G_1) = P(B_1) + P(R_1)P(B_2/R_1) = \frac{b}{n+b+1} + \frac{b}{(n+b+1)(n+b)} = \frac{b}{n+b}$$

b) On peut écrire $G_r = B_1 \cup (R_1 \cap G_{r-1})$ et :

$$P(G_r) = P(B_1) + P(R_1)P(G_r/R_1) = \frac{r}{n+b+r}P(G_{r-1}) + \frac{b}{n+b+r}$$

c) On sait que $P(G_0) = P(G_1) = \dfrac{b}{n+b}$. Supposons que $P(G_{r-1}) = \dfrac{b}{n+b}$. Alors :

$$P(G_r) = \frac{r}{n+b+r}\frac{b}{n+b} + \frac{b}{n+b+r} = \frac{b}{n+b}$$

2. a) On a $X_0(\Omega) = \{1\}$ et $E(X_0) = 1$.

De même $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$, avec :

$$P(X_1 = 1) = P(\overline{R_1}) = \frac{n+b}{n+b+1}, P(X_1 = 2) = P(R_1) = \frac{1}{n+b+1}$$

et :

$$E(X_1) = \frac{n+b+2}{n+b+1}$$

Enfin $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$, avec :

$$P(X_2 = 1) = \frac{n+b}{n+b+2}, P(X_2 = 2) = P(R_1 \cap \overline{R_2}) = \frac{2(n+b)}{(n+b+1)(n+b+2)}$$

$$P(X_2=3)=1-P(X_2=1)-P(X_2=2)$$

et le calcul donne :

$$E(X_2)=\frac{n+b+3}{n+b+1}$$

b) L'événement $(X_r=k)$ avec $k\geq 2$ implique le tirage d'une boule rouge au premier coup. Donc :

$$\begin{aligned}P(X_r=k)&=P(R_1\cap(X_r=k))=P(R_1)P(X_r=k/R_1)\\&=P(R_1)P(X_{r-1}=k-1)\end{aligned}$$

(lorsqu'on a retiré une boule rouge au premier tirage, les tirages suivants se font à partir d'une urne contenant $(r-1)$ boules rouges avec $(k-1)$ tirages à effectuer pour réaliser l'événement $(X_r=k)$). Donc, pour tout $r\geq 1, k\geq 2$:

$$P(X_r=k)=\frac{r}{n+b+r}P(X_{r-1}=k-1)$$

On remarque que $X_r(\Omega)=\{1,2,\ldots,(r+1)\}$. Pour $r\geq 1$:

$$E(X_r)=P(X_r=1)+\sum_{k=2}^{r+1}k.P(X_r=k)$$

et

$$\begin{aligned}E(X_r)&=\frac{n+b}{n+b+r}+\sum_{k=2}^{r+1}k\frac{r}{n+b+r}P(X_{r-1}=k-1)\\&=\frac{n+b}{n+b+r}+\frac{r}{n+b+r}\sum_{k=2}^{r+1}((k-1)+1)P(X_{r-1}=k-1)\\&=\frac{n+b}{n+b+r}+\frac{r}{n+b+r}(E(X_{r-1})+1)\end{aligned}$$

c) Un raisonnement par récurrence montre que :

$$E(X_r)=\frac{r}{n+b+r}E(X_{r-1})+1,\text{ d'où }E(X_r)=\frac{n+b+r+1}{n+b+1}$$

Exercice 3-4

On suppose que l'on sait tirer des nombres aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle $[0,1]$, c'est-à-dire que l'on a une variable aléatoire X de loi uniforme sur $[0,1]$.

Donner une méthode de tirage de nombres aléatoires répartis suivant une loi de probabilité $(p_n)_n$ donnée, c'est-à-dire montrer comment définir une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}, P(Y=n)=p_n$ (on pourra penser à définir la fonction de répartition de Y).

Solution :

Une méthode possible est la suivante :

On effectue un tirage aléatoire d'un nombre compris entre 0 et 1 ;
si ce nombre est inférieur à p_1, on prend $Y = 0$,
si ce nombre est dans l'intervalle $[p_1, p_1 + p_2[$, on prend $Y = 1$,
...
si ce nombre appartient à $[p_1 + \cdots + p_k, p_1 + \cdots + p_{k+1}[$, on prend $Y = k$,
enfin, si ce nombre vaut 1, on prend $Y = 1525$ (ou autre chose !)

On peut réécrire ceci en termes de fonction de répartition de Y. On peut d'ailleurs attendre d'un candidat qu'il critique la notion de test d'appartenance ...

Exercice 3-5

Dans cet exercice, on admettra les propriétés suivantes :

- soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes de sommes respectives U et V. La série de terme général $w_n = \sum\limits_{i=0}^{n} u_i v_{n-i}$ (série produit) est convergente et a pour somme $W = UV$.
- si de plus, la série de terme général $w_n t^n$ est convergente pour tout $t \in [0, 1[$, alors la fonction $t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$ est deux fois dérivable sur cet intervalle, les fonctions dérivées seconde et première étant obtenues en dérivant terme à terme la somme $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} w_n t^n$.

On effectue une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie donnant pile (P) avec la probabilité α et face (F) avec la probabilité $\beta = 1-\alpha$. ($\alpha \in]0, 1[$).
On s'intéresse à l'apparition de deux piles consécutifs. On note S_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »
Chaque pile ne peut servir qu'à une seule série de deux piles consécutifs.
Ainsi, dans la succession F P F P P P P, seuls sont réalisés les événements S_5 et S_7 et non S_6.

On note G_k l'événement « deux piles consécutifs sont apparus pour la première fois au $(k-1)$-ième et au k-ième tirage. »

1. On pose $a_k = P(S_k)$ (probabilité de l'événement S_k). Soit P_k l'événement « on obtient pile au k-ième tirage. » En écrivant que $P_{k-1} \cap P_k \subset S_{k-1} \cup S_k$, montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\alpha^2 = a_k + \alpha\, a_{k-1}$.
En déduire la valeur de a_k pour tout $k \geqslant 2$.

2. On pose $b_k = P(G_k)$ (probabilité de l'événement G_k).
Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} + b_k$.

3. Montrer que la série de terme général $a_k t^k$ est convergente pour tout t de $[0, 1[$ et calculer sa somme $F(t)$.

Montrer de même que la série de terme général $b_k t^k$ est convergente et exprimer sa somme H en fonction de F. Expliciter $H(t)$ pour $t \in [0,1[$

4. Montrer que H admet une limite lorsque t tend vers 1^-.

5. En admettant que $H(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H(t)$, que $H'(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H'(t)$ et que $H''(1) = \lim\limits_{t\to 1^-} H''(t)$, montrer que la suite $(b_k)_{k\geq 1}$ permet de définir la loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Montrer que X admet une espérance et une variance et donner les valeurs de ces moments

---

Solution :

1. Soit $k \geq 2$. Si P_{k-1} et P_k sont réalisés, alors soit S_{k-1} soit S_k est réalisé (cela dépend de ce qui s'est passé avant). Donc $P_{k-1} \cap P_k \subset S_{k-1} \cup S_k$, et :

$$(P_{k-1} \cap P_k) = (P_{k-1} \cap P_k \cap S_{k-1}) \cup (P_{k-1} \cap P_k \cap S_k)$$

et la réunion précédente est disjointe.

$\star$ On a $S_k \subset P_{k-1} \cap P_k$ et $P(P_{k-1} \cap P_k \cap S_k) = P(S_k) = a_k$.

$\star$ $S_{k-1} \subset P_{k-1}$ et P_k est indépendant de S_{k-1} (car S_{k-1} ne dépend que de ce qui s'est passé avant le k-ième lancer).
Donc :

$P(P_{k-1} \cap P_k \cap S_{k-1}) = P(P_k \cap S_{k-1}) = P(P_k).P(S_{k-1}) = \alpha.a_{k-1}$

Finalement :

$$\forall\, k \geq 2, \alpha^2 = P(P_{k-1} \cap P_k) = a_k + \alpha.a_{k-1}$$

La suite (a_k) est donc arithmético-géométrique, de point fixe $\dfrac{\alpha^2}{1+\alpha}$ et de premier terme nul. On obtient alors :

$$\forall\, k \geq 1, a_k = \frac{\alpha^2}{1+\alpha}\big(1 + (-1)^k \alpha^{k-1}\big)$$

2. $S_2 = P_1 \cap P_2 = G_2$, donc $a_2 = b_2 = a_1 b_1 + b_2$ (car $a_1 = 0$) ;
$S_3 = F_1 \cap P_2 \cap P_3 = G_3$, donc $a_3 = b_3 = a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_3$ (car $a_1 = b_1 = 0$) ;
et, de façon générale, S_k est la réunion des événements incompatibles :

$\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k$ et

$\ldots \cap S_i \cap \underbrace{\overline{S_{i+1}} \cap \ldots \cap \overline{S_{k-1}} \cap S_k}_{\text{a même probabilit que} G_{k-i}}$, pour i variant de 1 à $k-1$

D'où : $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} a_i b_{k-i} + b_k$.

3. $\star$ La série de terme général $a_k t^k$ est somme de deux séries géométriques convergentes, donc est elle-même convergente et :

$F(t) = \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha} \sum\limits_{k=2}^{\infty} t^k + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \sum\limits_{k=2}^{\infty} (-\alpha t)^k = \dfrac{\alpha^2}{1+\alpha} \cdot \dfrac{t^2}{1-t} + \dfrac{\alpha}{1+\alpha} \cdot \dfrac{\alpha^2 t^2}{1+\alpha t}$

Soit : $\forall t \in [0,1[, F(t) = \dfrac{\alpha^2 t^2}{(1-t)(1+\alpha t)}$

$\star$ b_k est une probabilité, donc $0 \leq b_k t^k \leq t^k$ et, pour $t \in [0,1[$, la convergence de la série géométrique de raison t donne la convergence de la série proposée.

De plus : $a_k t^k = b_k t^k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (a_i t^i)(b_{k-i} t^{k-i})$. donc par le résultat admis (produit de Cauchy de ces deux séries), il vient :

$$\forall t \in [0,1[, F(t) = H(t) + F(t)H(t)$$

Soit : $\forall t \in [0,1[, H(t) = \dfrac{F(t)}{1+F(t)} = \dfrac{\alpha^2 t^2}{(1-t)(1-\alpha t) + \alpha^2 t^2}$

4. $\lim\limits_{t \to 1^-} H(t) = 1$.

5. Les résultats admis permettent de sommer les séries rencontrées et :

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k = 1$, ce qui prouve que l'on est bien en présence d'une loi de probabilité.

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k.b_k = H'(1) = \dfrac{1+\alpha}{\alpha^2}$.

$E\big(X(X-1)\big) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k(k-1).b_k = H''(1)$, ce qui donne :

$V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - [E(X)]^2$, soit tous calculs effectués :

$$V(X) = \frac{(1-\alpha)(1+3\alpha+\alpha^2)}{\alpha^4}$$

Exercice 3-6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \exp(t - e^t)$.

1. a) Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$.

b) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.

2. Montrer que X admet des moments de tous ordres et que le moment d'ordre k est donné par la formule $m_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(u))^k e^{-u} du$.

3. a) Soit u un réel srictement positif. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n$.

b) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_k = \int_0^n \ln(u) \left(1 - \frac{u}{n}\right)^k du.$$

En écrivant $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^k$ sous la forme $\left(1-\dfrac{u}{n}\right)\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^{k-1}$, vérifier la relation :

$$I_k = I_{k-1} + \int_0^n (u\ln(u))\left(-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{u}{n}\right)^{k-1} du$$

c) On pose $J_k = (k+1)I_k$. Trouver une relation de récurrence entre J_k et J_{k-1}. (On pourra faire une intégration par parties).
En déduire J_k pour tout entier $k \leqslant n$, puis I_n.

d) On rappelle que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente. On appelle γ sa limite.
En admettant que $m_1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \ln(u)\left(1-\frac{u}{n}\right)^n$, montrer que $E(X) = -\gamma$
NB : La loi suivie par X est appelée loi de Gumbel.

Solution :

1. a) La fonction f est continue (et positive) sur $\mathbb{R}$.
$\star$ Au voisinage de $+\infty$: $t^2 f(t) = \exp(t - \mathrm{e}^t + 2\ln t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car le terme prépondérant « sous » l'exponentielle est le terme $-\mathrm{e}^t$, qui a pour limite $-\infty$. Ainsi $f(t)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\star$ Au voisinage de $-\infty$, on a $f(t) = \exp(t).\exp(-\mathrm{e}^t) \sim \exp(t)$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\,dt$ converge, ce qui donne la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$.

Par disjonction des problèmes, on en conclut que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction f est positive et $F : x \mapsto -\exp(-\mathrm{e}^t)$ est une primitive de f, d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{+\infty} F - \lim_{-\infty} F = 0 - (-1) = 1$$

2. Sous réserve d'existence, $m_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f(t)\,dt$.
La convergence de cette intégrale se traite exactement comme dans la première question, puisque $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2.t^k f(t) = 0$ et $t^k f(t) \underset{-\infty)}{\sim} t^k.\mathrm{e}^t$, qui est d'intégrale convergente sur $]-\infty, 0]$.
Effectuons alors le changement de variable, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, défini par $u = \mathrm{e}^t$. On a alors $t = \ln u$, $\mathrm{e}^t\,dt = du$ et :

$$m_k = \int_0^{+\infty} (\ln u)^k.\mathrm{e}^{-u} du$$

3. a) Pour n assez grand $1 - \frac{u}{n} > 0$ et on peut écrire :

$$\ln\left[\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1-\tfrac{u}{n}\right) \underset{(n\to\infty)}{\sim} n\,\frac{-u}{n} = -n$$

Par continuité de la fonction exponentielle, il vient alors :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-n}$$

b) En écrivant comme demandé, par linéarité de l'intégration :

$$I_k - I_{k-1} = \int_0^n -\tfrac{1}{n}\,(u\ln u)\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^{k-1}du$$

c) On procède alors à une intégration par parties, en dérivant $u \mapsto u\ln u$:

$$I_k - I_{k-1} = \left[u\ln u\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^k\right]_0^n - \tfrac{1}{k}\int_0^n \ln u\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^k du - \tfrac{1}{k}\int_0^n \left(1-\tfrac{u}{n}\right)^k du$$

C'est-à-dire :

$$I_k = I_{k-1} - \tfrac{1}{k}\,I_k + \frac{n}{k(k+1)}\left[\left(1-\tfrac{u}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n = I_{k-1} - \tfrac{1}{k}\,I_k - \frac{n}{k(k+1)}$$

Ce qui s'écrit :

$$J_k = J_{k-1} - \frac{n}{k+1}$$

Or $J_0 = \displaystyle\int_0^n \ln u\,du = n\ln n - n$, d'où : $J_n = -n\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + n\ln n - n$ et enfin :

$$I_n = -\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \ln n.$$

d) On a $I_n = -\dfrac{n}{n+1}\,u_n - \dfrac{n}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n+1}\,\ln n.$

En admettant que $m_1 = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, il vient par négligeabilité de $\ln n$ devant $n+1$:

$$m_1 = -\gamma$$

Exercice 3-7

1. Une urne contient des boules noires et des boules blanches dans les proportions p et $q = 1-p$ respectivement, avec $p \in]0,1[$.
On effectue n tirages successifs d'une boule avec remise dans cette urne. Soit (n_1, n_2) un couple d'entiers tels que $n_1 + n_2 = n$.
Quelle est la probabilité d'obtenir n_1 boules blanches (et donc n_2 boules noires) ?

Soit $F(p)$ cette probabilité. Pour quelle(s) valeur(s) de p cette probabilité est-elle maximale ? On pourra poser $H(p) = \ln(F(p))$.

2. On effectue dans cette question n tirages succesifs d'une boule avec remise dans une urne contenant des boules indiscernables au toucher de k couleurs différentes.

Pour $i \in \{1, \cdots, k\}$, la proportion initiale de boules de couleur i dans l'urne est p_i où $p_i \in]0,1[$. (avec $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$).

Soit $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ un k-uplet d'entiers strictement positifs dont la somme est égale à n.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir la répartition $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ en n tirages ? (c'est-à-dire n_1 boules de couleur 1, n_2 de couleur 2, etc.)
On notera $F(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ cette probabilité.

b) On cherche s'il existe des valeurs du k-uplet $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ pour lesquelles cette probabilité est maximale.
On pose $H = \ln(F)$. Déterminer un point candidat à l'optimisation de H sous la contrainte $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

c) Si au moins l'un des nombres $p_1, \ldots, p_k$ est nul, on pose $F(p_1, \ldots, p_k) = 0$. Montrer que la fonction F ainsi prolongée sur $[0,1]^k \cap \{\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1\}$ admet un maximum et que ce maximum est obtenu en un point de l'ouvert $]0,1[^k$.

d) Conclure.

Solution :

1. On a : $F(p) = C_n^{n_1} q^{n_1} p^{n_2}$ et $H(p) = K + n_2 \ln p + n_1 \ln(1-p)$.
La fonction H est dérivable sur $]0,1[$, avec $H'(p) = \dfrac{n_2}{p} - \dfrac{n_1}{1-p}$.
Par conséquent H (donc F) est croissante sur $]0, \dfrac{n_2}{n_1+n_2}[$ et décroissante sur $]\dfrac{n_2}{n_1+n_2}, 1[$.
On en déduit que la fonction F est maximale pour $p = \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$.

2. a) Il s'agit de la loi multinomiale et donc :

$$F(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}$$

b) La contrainte étant donnée, on peut exprimer, par exemple, p_k en fonction des autres proportions et :

$$\begin{aligned} H(p_1, \ldots, p_k) &= K(p_1, \ldots, p_{k-1}) \\ &= n_1 \ln p_1 + \cdots + n_{k-1} \ln p_{k-1} + n_k \ln(1 - p_1 - \ldots - p_{k-1}) + C \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\dfrac{\partial K}{\partial p_i} = \dfrac{n_i}{p_i} - \dfrac{n_k}{1 - p_1 - \cdots - p_{k-1}} = \dfrac{n_i}{p_i} - \dfrac{n_k}{p_k}$.

Par conséquent $\dfrac{\partial K}{\partial p_i}(p_1, \ldots, p_{k-1}) = 0 \Longleftrightarrow p_i = \dfrac{n_i}{n_k} p_k$.

Comme $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, il vient : $\dfrac{n - n_k}{n_k} p_k + p_k = 1$ et $p_k = \dfrac{n_k}{n}$, d'où $p_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Ainsi la fonction K possède un unique point critique : le point $(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{k-1}}{n})$.
Le point candidat à l'optimisation de H est donc le point $(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_{k-1}}{n}, \frac{n_k}{n})$.

c) Le domaine $[0,1]^k$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^k$, de même que l'ensemble des points de la contrainte. Donc F (ou H), qui est continue, admet sur ce domaine un *minimum* et un *maximum*.
Si l'un des p_i est nul, F prend la valeur 0, donc le *maximum* est atteint en un point de $]0,1[^k$ et ce point est un point critique.

d) Le seul point candidat est donc **la** solution.

Exercice 3-8

Soit λ un réel strictement positif. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ la variable X_i suit la loi exponentielle de paramètre $i\lambda$.

On note $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ et f_n la densité de S_n nulle sur $\mathbb{R}^{-*}$ et continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. a) Déterminer f_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \geqslant 0$, $f_n(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1}$

c) Que vaut l'espérance $E(S_n)$ de S_n ? Donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers l'infini.

d) Calculer la variance de S_n et montrer qu'elle admet une limite finie quand n tend vers l'infini.

2. a) Déterminer la fonction de répartition F_n de S_n.

b) On pose $T_n = \dfrac{S_n}{n}$. Déterminer la fonction de répartition H_n de T_n.

c) Etudier pour tout x réel la limite de la suite $(H_n(x))_n$.
Quelle est la limite en loi de la suite (T_n) ?

d) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} E(T_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} V(T_n)$.

Solution :

1. a) On obtient, par convolution :

$$\begin{cases} \forall\, x < 0, f_2(x) = 0 \\ \forall\, x \geq 0, f_2(x) = \displaystyle\int_0^x 2\lambda^2 \mathrm{e}^{-2\lambda t} \mathrm{e}^{-2\lambda(x-t)}\, dt = 2\lambda.\mathrm{e}^{-2\lambda x}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \end{cases}$$

b) Démontrons, par récurrence, que f_n a bien la forme annoncée.

$\star$ Le résultat est banal pour $n = 1$, et on vient de la vérifier pour $n = 2$.

$\star$ Supposons le résultat acquis pour un certain entier $n \geq 1$, et passons au rang suivant.

Comme $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, on obtient, par produit de convolution (car les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes) :

$\forall\, x \geq 0, f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x n\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}.(n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)(x-t)}\,dt$, soit :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{(n-1)\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}\,dt \\ &= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda t}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)^{n-1}\,dt \\ &= n(n+1)\lambda^2.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}\Big[\frac{1}{n\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda t}-1)^n\Big]_0^x \\ &= (n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda(n+1)x}(\mathrm{e}^{\lambda x}-1)^n = (n+1)\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda x}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^n \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat au rang $n+1$ et donne la conclusion, par le principe de récurrence.

c) Par linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda i}$.

Comme il est connu que $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i} \sim \ln n$, il vient $E(S_n) \sim \dfrac{1}{\lambda}\ln n$.

d) Par indépendance des variables T_i : $V(S_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} V(T_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2 i^2}$, et on sait que la série de terme général $\dfrac{1}{i^2}$ est convergente, ce qui signifie que la variance de S_n a une limite lorsque n tend vers l'infini (cette limite vaut d'aileurs $\dfrac{\pi^2}{6\lambda^2}$).

2. a) On a $F_n(x) = 0$, pour $x < 0$, et pour $x \geq 0$:

$F_n(x) = \displaystyle\int_0^x n\lambda.\mathrm{e}^{-\lambda t}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^{n-1}\,dt = \Big[(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})^n\Big]_0^x$, *i.e.* :

$$\forall\, x \geq 0, F_n(x) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})^n$$

b) $\dfrac{S_n}{n}$ est encore à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et, pour $x \geq 0$:

$$H_n(x) = P(S_n \leq nx) = F_n(nx) = (1-\mathrm{e}^{-\lambda nx})^n$$

c) Pour $x \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda nx} = 0$, donc $n\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda nx}) \sim -n\mathrm{e}^{-\lambda nx} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ceci prouve, par continuité de la fonction exponentielle, que $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 1$, tandis que pour $x < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(x) = 0$.

Par conséquent, la fonction H_n converge point par point, vers la fonction de répartition de la variable certaine égale à 0. Ce qui veut dire que (T_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

d) $E(T_n) = \dfrac{1}{n}E(S_n) \sim \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$V(T_n) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ce sont bien l'espérance et la variance de la variable certaine égale à 0.

Exercice 3-9

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble E des suites réelles vérifiant la relation de récurrence :

$$\mathcal{R} \;:\; \forall\, k \in \mathbb{N}^*,\; ku_{k+1} - nu_k + (n-k)u_{k-1} = 0$$

1.a) Vérifier que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) On considère l'application Φ de E dans $\mathbb{R}^2$ qui à toute suite $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1). Montrer que Φ est linéaire et injective.

c) Montrer que toute suite de E est constante à partir du rang n.

d) Vérifier que tout suite constante est élément de E.

e) On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 0$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*,\; a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i-1} C_{n-1}^k$, avec la convention $C_n^k = 0$ pour $k > n$.
Montrer que (a_n) est élément de E. En déduire la dimension de E et la forme générale des suites de E.

2. Un point P se déplace sur un axe gradué de 0 jusqu'à n par unité de temps et par sauts de longueur 1.
Ses déplacements sont déterminés par les règles suivantes :

- si à l'instant $k \geq 1$, P se trouve en 0 ou en n, il y reste définitivement.
- si à l'instant k, il se trouve en i pour $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, il se trouvera au temps $k+1$ en $i+1$ avec la probabilité $\dfrac{i}{n}$ ou bien en $i-1$ avec la probabilité $\dfrac{n-i}{n}$.
- le point se trouve en $t = 0$ en 0 et il se trouve au temps $t = 1$ en 1.

On cherche à déterminer la probabilité que le point arrive en n.

On appelle G l'événement : « P arrive en n », et on note X_k la variable aléatoire égale à l'abscisse du point au temps k.

Pour $i \in \{0, \cdots, n\}$, on pose $p_i^k = p(G \mid X_k = i)$ (probabilité que le point arrive en n sachant qu'au temps k il se trouve en i).
On admettra que l'événement « le point arrive en n à un instant quelconque » est indépendant du moment où il se trouve en i, c'est-à-dire que p_i^k ne dépend pas de k. On pose alors $p_i^k = p_i$.

Déterminer la probabilité qu'il arrive en n.
(On raisonnera à partir de la suite (p_i) définie par ce qui précède et $p_k = 1$ pour $k \geqslant n$).

Solution :

1. a) On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réeles : il est non vide et stable par addition et multiplication par un scalaire.

b) L'application Φ est manifestement linéaire. Elle est injective car son noyau est réduit au vecteur nul. En effet, si $u_0 = u_1 = 0$, une récurrence immédiate montre que $u_n = 0, \forall n \geq 2$.

c) Lorsque $k = n$, on a : $nu_{n+1} - nu_n = 0$. Ainsi $u_{n+1} = u_n$.
Supposons que $u_{n+i} = u_{n+i-1}$, alors :

$$(n+i)u_{n+i+1} = nu_{n+i} + iu_{n+i-1} = (n+i)u_{n+i} \Rightarrow u_{n+i+1} = u_{n+i}$$

d) Si la suite (u_n) est constante égale à c, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée (vérification immédiate).

e) Comme $a_1 = 1, a_2 = n$, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée pour $k = 1$.
Pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$ka_{k+1} - na_k + (n-k)a_{k-1} = k(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) - nC_{n-1}^{k-1} + 0$$

et

$$ka_{k+1} - na_k + (n-k)a_{k-1} = kC_n^k - kC_n^k = 0$$

Pour $k > n$, la relation $\mathcal{R}$ est vérifiée, puisque la suite (a_n) vérifie la relation $a_k = a_n = 2^{n-1}$.

L'application Φ est injective. Donc $\dim(E) = \dim \text{Im}(\Phi) \leq 2$. mais, on vient d'exhiber deux éléments indépendants de E : la suite constante et la suite (a_n). Donc $\dim(E) \geq 2$ et par suite $\dim(E) = 2$.
Tout élément de (a_i) de E est de la forme :

$$a_i = \alpha + \beta \sum_{k=0}^{i-1} C_{n-1}^k, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

2. On se place à l'instant k. Au temps k, le point peut soit avancer, soit reculer d'une case, événements que l'on note A_k et R_k.
Pour $i \in \{2, \cdots, n-1\}$,

$$P_{X_k=i}(G) = P_{X_k=i}(G/A_k)P_{X_k=i}(A_k) + P_{X_k=i}(G/R_k)P_{X_k=i}(R_k)$$

d'où

$$p_i = \frac{i}{n}p_{i+1} + \frac{n-i}{n}p_{i-1}$$

La suite (p_i) vérifie la relation $\mathcal{R}$ pour $i \in \{2, \cdots, n-2\}$. De plus $p_1 = \dfrac{2}{n}p_2$, et $p_0 = 0$. La relation est donc vérifiée pour $i = 1$.
De même $p_{n+1} = p_n = 1$. La relation est donc vraie pour $i = n$.
La suite (p_i) est élément de E.
Il existe α et β réels tels que $\forall\ i \in \mathbb{N},\ p_i = \alpha + \beta a_i$.
Mais $p_0 = 0$ donc $\alpha = 0$ et $p_n = 1$ impliquent que $\beta a_n = 1$, avec $a_n = 2^{n-1}$.

On obtient finalement :

$$p_1 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Exercice 3-10

1. Vérifier que les polynômes $1,\ X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2)$ forment une base de $\mathbb{R}_3(X)$. Ecrire la décomposition des polynômes $X^2,\ X^3$ sur cette base.

2. Soit T une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note m_i le moment d'ordre i de cette variable.
Déterminer m_i pour $i = 1,\ 2,\ 3$.

3. Soient $T_1,\ T_2, \cdots, T_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que T. On cherche à estimer le paramètre inconnu λ.

a) Quelle est la loi suivie par $\sum_{k=1}^{n} T_k$? Montrer que $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ est un estimateur sans biais de λ.

b) Préciser $E(T_k^2),\ E(M_n^2)$ et $E(T_k M_n)$ pour k dans $\{1, \ldots, n\}$.

On pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[T_i - M_n]^2$.

Est-ce que V_n est un estimateur sans biais de λ ?

Proposer un estimateur W_n sans biais de λ obtenu à l'aide de V_n.

4. On montrerait à l'aide des résultats des premières questions que la variance de W_n est égale à $\frac{n}{(n-1)^2}\lambda(1+2\lambda)$.

Entre M_n et W_n quel est le meilleur estimateur, c'est-à-dire celui de variance minimum ?

Solution :

1. Un calcul immédiat donne :

$$X^2 = X(X-1) + X, \quad X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X$$

2. Par prépondérance classique, chacune des séries suivantes est convergente, et :

$m_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda$ (résultat du cours)

$m_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 + \lambda$ (même remarque)

$$m_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 \frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\frac{\lambda^k}{k!} + 3k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!} + k\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

3. a) D'après la stabilité des sommes de lois de Poisson, $\sum_{k=1}^{n} T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.
D'où $E\big(\sum_{k=1}^{n} T_k\big) = n\lambda$ et $E(M_n) = \lambda$. Ainsi M_n est un estimateur sans biais de λ.

b) D'après la question précédente :

$$E(T_k^2) = \lambda^2 + \lambda \text{ et } E(M_n^2) = \frac{1}{n^2}(n^2\lambda^2 + n\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{n}\lambda$$

$$E(T_k M_n) = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n, i \neq k} E(T_i T_k) + \frac{1}{n} E(T_k^2)$$

Les variables aléatoires T_k sont indépendantes, l'espérance du produit est égal au produit des espérances.

$$E(T_k M_n) = \frac{n-1}{n}\lambda^2 + \frac{1}{n}(\lambda^2 + \lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{n}\lambda$$

et

$$E(V_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[E(T_k^2) - 2E(T_k M_n) + E(M_n^2)] = \frac{n-1}{n}\lambda$$

Ainsi, V_n n'est pas un estimateur sans biais de λ. On choisira comme estimateur sans biais $W_n = \dfrac{n}{n-1} V_n = \dfrac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}[T_k - M_n]^2$.

4. Un calcul donne :

$$V(M_n) = E(M_n^2) - (E(M_n))^2 = \frac{\lambda}{n}$$

et on a :

$$\frac{V(M_n)}{V(W_n)} = \Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2 \frac{1}{1+2\lambda} < 1$$

On préférera donc (au sens du minimum de la variance) M_n à W_n.

Exercice 3-11

On effectue une succession indéfinie de lancers indépendants avec une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in \,]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = (1-p)$.
On dit que la première série est de longueur $L_1 = n \geqslant 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième, l'autre.

On définit de même la longueur L_2 de la 2-ieme série.

1. Déterminer la loi de L_1 et son espérance. Pour quelle valeur de p, $E(L_1)$ est-elle minimum ?

2. Donner la loi du couple (L_1, L_2).

3. Déterminer la loi de L_2, son espérance.

4. L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?
On admet l'existence de la covariance de L_1 et L_2. Son signe est-il prévisible ?

Solution :

1. $\star$ $L_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 1$, on peut écrire, avec des notations évidentes :
$$(L_1 = n) = (P_1P_2 \dots P_nF_{n+1}) \cup (F_1F_2 \dots F_nP_{n+1})$$
D'où, par disjonction, puis indépendance des résultats des différents lancers :
$$\forall\, n \geq 1, P(L_1 = n) = p^nq + q^np$$
$\star$ La convergence des séries rencontrées étant patente :
$$E(L_1) = \sum_{n=1}^{\infty} n.P(L_1 = n) = qp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}\Big)$$
Soit : $E(L_1) = qp\Big(\dfrac{1}{(1-p)^2} + \dfrac{1}{(1-q)^2}\Big) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} = \dfrac{1}{p(1-p)} - 2.$

$\star$ Or $p \mapsto p(1-p)$ est maximale pour $p = \dfrac{1}{2}$, le *maximum* valant $\dfrac{1}{4}$.
Donc l'espérance de L_1 est minimale pour $p = \dfrac{1}{2}$, le *minimum* valant 2.

2. L_2 prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $[L_1 = n) \cap (L_2 = k)]$ n'est autre que :
$$(P_1 \dots P_nF_{n+1} \dots F_{n+k}P_{n+k+1}) \cup (F_1 \dots F_nP_{n+1} \dots P_{n+k}F_{n+k+1})$$
D'où :
$$\forall (n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, P[L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = p^{n+1}q^k + q^{n+1}p^k$$
3. $\star$ Par sommation, on obtient la loi marginale de L_2 :
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P[L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = p^2q^k\frac{1}{1-p} + q^2p^k\frac{1}{1-q}$$
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, P(L_2 = k) = p^2q^{k-1} + q^2p^{k-1}$$
$\star$ Ainsi, les séries étant convergentes :
$$E(L_2) = p^2\sum_{k=1}^{\infty} k.q^{k-1} + q^2\sum_{k=1}^{\infty} k.p^{k-1} = p^2\frac{1}{p^2} + q^2\frac{1}{q^2} = 2.$$
4. $\star$ Déjà $P[(L_1 = 1) \cap (L_2 = 1)] = pq(p+q) = pq$, tandis que $P(L_1 = 1) = 2pq$ et $P(L_2 = 1) = p^2 + q^2$.
Ainsi, $(L_1 = 1)$ et $(L_2 = 1)$ sont indépendants si et seulement si $2(p^2+q^2) = 1$, soit, si et seulement si $4p^2 - 4p + 1 = 0$, ce qui donne $p = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Réciproquement, si $p = \dfrac{1}{2}$, on a : $P[(L_1 = n) \cap (L_2 = k)] = \dfrac{1}{2^{n+k}}$, tandis que $P(L_1 = n) = \dfrac{1}{2^n}$ et $P(L_2 = k) = \dfrac{1}{2^k}$, ce qui prouve que L_1 et L_2 sont indépendantes.
Finalement L_1 et L_2 sont indépendantes si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

$\star$ Si $p = \dfrac{1}{2}$ la covariance est nulle, tandis que si $p \neq \dfrac{1}{2}$, une grande valeur de L_1 signifie que l'on a très probablement commencé par le côté le plus probable, donc la deuxième sera probablement assez courte et réciproquement.
On peut donc prévoir que le coefficient de corrélation sera négatif, donc la covariance négative. Le calcul confirmerait...

Exercice 3-12

Soit X une variable aléatoire admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.

1. a) Montrer que sa fonction de répartition F_X définit une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$.

On note F_X^{-1} sa réciproque. Soit alors U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

b) Montrer que $F_X^{-1}(U)$ suit la même loi que X.

c) Déterminer F_X^{-1} quand X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{b}$, avec $b > 0$.

2. En Turbo-Pascal, la fonction **random** simule une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$. Par exemple, si **T** est une variable de type **real**, l'instruction **T := random** affecte à **T** un réel de [0,1[suivant la loi uniforme sur cet intervalle.

On admettra que les appels successifs à **random** sont indépendants.

Définir en Pascal une fonction **Gamma (b : real ; n : integer)** simulant la loi Gamma de paramètres b et n ($b \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$)

3. On considère l'instruction **T := (Gamma(1 , n) - n) / sqrt (n)** où **T** est une variable de type **real**.
Quelle est son effet lorsque n est « grand » ?

Solution :

1. a) La fonction $x \mapsto F_X(x)$ est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $[0, 1[$. Elle définit une bijection entre ces deux ensembles.

b) On sait que $F_X^{-1}(U)(\Omega) = \mathbb{R}^+$. Pour tout $x \geq 0$:

$$P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x)$$

Ainsi $F_X^{-1}(U)$ et X ont la même fonction de répartition sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}$. Elle suivent donc la même loi.

c) Si X suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$, alors, pour tout $x \geq 0$:
$F_X(x) = 1 - e^{-x/b}$ et donc, pour tout $u \in [0, 1[$:

$$F_X^{-1}(u) = -b \ln(1-u)$$

2. La loi Gamma $\Gamma(b, n)$ est la loi de la somme de n variables indépendantes suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$. D'après la question précédente, on pourra simuler une telle loi en additionnant n fois $-b\ln(1-u)$; donc :

```
Function gamma ( b : real ; n : integer)
var k : integer ;
s : real ;
begin
s := 0 ;
For k := 1 to n do s := s-b*ln(1-random) ;
Gamma := s
end ;
```

3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi exponentielle $\mathcal{E}(1/b)$. Le théorème de la limite centrée nous assure que si on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, alors $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_n$ converge vers la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Ainsi l'instruction T := (Gamma(1 , n) - n) / sqrt (n) où T est une variable de type real affecte à T, pour n grand, un nombre réel suivant quasiment la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 3-13

Existe-t-il un réel a tel que l'on puisse définir une variable aléatoire X, à valeurs dans $\mathbb{N}$, par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = (ak + 1)\mathrm{e}^{-k} \text{ ?}$$

Solution :

Si le problème a une solution, alors $P(X = 0) = 1$. Ceci impose donc d'avoir $P(X = 1) = 0$, d'où $a = -1$ et alors $P(X = 2)$ serait strictement négatif !
La réponse est donc NON.

Exercice 3-14

Soient A, B, et C trois variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant une même loi binomiale de paramètres n et p.

Soit M la variable aléatoire qui à tout $\omega \in \Omega$ associe la matrice $M(\omega)$ définie par :

$$M(\omega) = \begin{pmatrix} A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \\ A(\omega) & B(\omega) & C(\omega) \end{pmatrix}$$

1. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

2. Quelle est la probabilité que M soit nilpotente ? (une matrice X est dite nilpotente s'il existe $p > 0$ tel que $X^p = 0$.)

3. Quelle est la probabilité que M soit la matrice d'un projecteur ?

4. Donner la loi, l'espérance et la variance du nombre de valeurs propres de M. Quelle est la probabilité que M soit diagonalisable ?

5. Donner la loi, l'espérance et la variance de la plus grande des valeurs propres.

6. On suppose $p = 1/2$.

a) Quelle est la probabilité qu'au moins une des colonnes de M soit égale à la somme des deux autres ?

b) Quelle est la probabilité que toutes les valeurs propres de M soient des entiers pairs ?

Solution :

1. Les trois variables aléatoires A, B, C suivent la même loi. Ainsi les trois colonnes de la matrice M sont identiques et la matrice M n'est jamais inversible. Donc :

$$P(\text{M inversible}) = 0$$

2. Notons $a = A(\omega), b = B(\omega), c = C(\omega)$. Un calcul immédiat donne :

$$M^2 = (a + b + c)M, \text{ et } \forall n \geq 2,\ M^n = (a + b + c)^{n-1}M$$

Ainsi M est nilpotente si et seulement si $a + b + c = 0$ (ceci comprend les cas où $M = 0$). Mais, par indépendance, $A + B + C$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3n, p)$; donc :

$$P(\text{M nilpotente}) = (1 - p)^{3n}$$

3. M est la matrice d'un projecteur si et seulement si $M^2 = M$ et par le calcul précédent si et seulement si $a + b + c = 1$ ou bien $M = 0$. Ces deux événements étant incompatibles, il vient :

$$\begin{aligned} P(\text{M est une projection}) &= C_{3n}^1 p(1 - p)^{3n-1} + (1 - p)^{3n} \\ &= (1 - p)^{3n-1}[(3n - 1)p + 1] \end{aligned}$$

4. Si M n'est pas la matrice nulle, M est de rang 1. Donc :
- $a+b+c=0 \Rightarrow M=0$ et M admet une seule valeur propre 0.
- $a+b+c \neq 0$, alors M est de rang 1. Son noyau est de dimension 2 ; ainsi 0 est valeur propre de M, le sous–espace propre associé étant de dimension 2, et la valeur propre restante est $a+b+c$ (le sous–espace propre associé étant l'image de M). Ainsi, dans ce cas, M admet deux valeurs propres.

Si l'on appelle N la variable aléatoire égale au nombre de valeurs propres de M, alors $N(\Omega)=\{1,2\}$ et :

$$P(N=1)=(1-p)^{3n}, \quad P(N=2)=1-(1-p)^{3n}$$

Un calcul immédait donne $E(N)=2-(1-p)^{3n}$.
Enfin, la matrice M est toujours diagonalisable, car, soit $M=0$, auquel cas elle est diagonale, soit $M\neq 0$ et les deux sous-espaces propres de M sont supplémentaires.

5. Si X est la variable aléatoire représentant la plus grande valeur propre de M, alors $X(\omega)=a+b+c$ et X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3n,p)$. Ainsi :

$$E(X)=3np, V(X)=3np(1-p).$$

6. a) Posons :

$$A=(a=b+c),\ B=(b=a+c),\ C=(c=a+b)$$

L'événement recherché est $A\cup B\cup C$. On a :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)-P(C\cap A) + P(A\cap B\cap C)$$

Or :

$$P(A\cap B\cap C)=P(a+b+c=0)=(1-p)^{3n}$$
$$P(A\cap B)=P(a=b\cap c=0)=P(a=b)P(c=0)$$

Mais :

$$\begin{aligned} P(a=b) &= \sum_{k=0}^{n} P(a=k\cap b=k)=\sum_{k=0}^{n} P(a=k)P(b=k) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}C_{2n}^n \end{aligned}$$

Enfin $A=(a=b+c)$. Mais $b+c$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(2n,p)$ et a est indépendante de $b+c$. Donc :

$$\begin{aligned} p(A) &= \sum_{k=0}^{n} P(a=k\cap(b+c=k))=\sum_{k=0}^{n} P(a=k)P(b+c=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n C_{2n}^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{3n}\sum_{k=0}^{n} C_n^k C_{2n}^k=\left(\frac{1}{2}\right)^{3n}C_{3n}^n \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$P(A\cup B\cup C)=3\frac{C_{3n}^n}{8^n}-3\frac{C_{2n}^n}{8^n}+\frac{1}{8^n}$$

b) Soit D l'événement «toutes les valeurs propres de M sont paires». Cet événement est égal à ($a+b+c$ pair). Donc :

$$\begin{aligned}P(D)&=\sum_{k\geq 0}P(a+b+c=2k)\\&=\sum_{k\geq 0}C_{3n}^{2k}p^{2k}(1-p)^{3n-2k}\\&=\frac{1+(1-2p)^{3n}}{2}\end{aligned}$$

Exercice 3-15

On considère 6 dés, cinq étant équilibrés. Le dernier est pipé de manière à ce que lorsqu'on lance ce dé, chacun des chiffres appara"t avec une probabilité proportionnelle à ce chiffre.

1. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire égale au chiffre donné par le dé truqué lorsqu'on le lance.

2. On effectue n tirages successifs et indépendants d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins 1/2 ?

3. On effectue n tirages successifs sans remise d'un dé parmi les six.

Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire égale au nombre de fois où est tiré le dé truqué ?
Combien de tirages doit-on effectuer pour que la probabilité d'avoir obtenu le dé truqué parmi ceux tirés soit au moins 1/2 ?

Solution :

1. On a $X(\Omega)=\{1,2,3,4,5,6\}$ et pour tout $k\in X(\Omega), P(X=k)=\lambda k$. En sommant ces probabilités, on obtient $\lambda=\dfrac{1}{21}$ et :

$$E(X)=\frac{13}{3}, V(X)=\frac{20}{9}.$$

2. Soit N la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'on obtient le dé truqué. N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/6)$ et pour tout les entiers k tels que $0\leq k\leq n$:

$$P(N=k)=C_n^k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

3. Ici, nécessairement, $n \leq 6$. On est en situation d'équiprobabilité. Donc :
- si $n \leq 5, N(\Omega) = \{0,1\}$ et :

$$P(N=0) = \frac{A_n^5}{A_n^6} = 1 - \frac{n}{6}, \quad P(N=1) = \frac{n}{6}$$

- si $n = 6, N(\Omega) = \{1\}$.

Enfin :

$$P(A) = P(N=1) \Rightarrow (P(A) \geq \frac{1}{2}) \Longleftrightarrow \frac{n}{6} \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow n \geq 3$$

Exercice 3-16

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{5^{-x}}{2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{5^x}{2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité qu'on nommera X, dont on donnera une densité et l'espérance si elle existe.

2. Pour n entier naturel non nul, on note Y_n la variable aléatoire définie comme la partie entière de nX.
On rappelle que si x est un nombre réel, la partie entière de x est le plus grand entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$.

a) Déterminer la loi de Y_n.

b) Déterminer son espérance si elle existe.

Solution :

1. La fonction F est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \frac{1}{2} = F(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} F(x)$.
Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec :

$$F'(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^{-x} \text{ pour } x > 0 \text{ et } F'(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^x \text{ pour } x < 0$$

Ainsi F' est positive et F est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme il est clair que $\lim\limits_{+\infty} F = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} F = 0$, la fonction F possède toutes les propriétés requises pour être une fonction de répartition et une densité associée est, par exemple :

$$f(x) = \frac{\ln 5}{2} 5^{-x} \text{ pour } x \geq 0 \text{ et } f = \frac{\ln 5}{2} 5^x \text{ pour } x \leq 0$$

La densité f est paire et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x f(x)\, dx$ est convergente (négligeabilité classique), donc X possède une espérance et $E(X) = 0$.

2. a) $Y_n(\Omega) = \mathbb{Z}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(Y_n = k) = P(k \leq nX < k+1)$, *i.e.* :

$$P(Y_n = k) = F(\frac{k+1}{n}) - F(\frac{k}{n})$$

Soit, en revenant à la définition de F :

Si $k \in \mathbb{N}, P(Y_n = k) = \dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{2} \dfrac{1}{(\sqrt[n]{5})^{k+1}}$

Si $k \in \mathbb{Z}^{-*}, P(Y_n = k) = \dfrac{\sqrt[n]{5}-1}{2} (\sqrt[n]{5})^{k}$

b) On sait que pour $|x| < 1$, on a : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} kx^k = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, ainsi les séries rencontrées convergent et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k.P(Y_n = k) = \frac{\sqrt[n]{5}-1}{2\sqrt[n]{5}} \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{\sqrt[n]{5}}\right)^k = \frac{1}{2(\sqrt[n]{5}-1)}$$

De la même façon :

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} k.P(Y_n = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} -k.P(Y_n = -k) = \frac{\sqrt[n]{5}}{2(\sqrt[n]{5}-1)}$$

Ainsi Y_n admet une espérance, et $E(Y_n) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3-17

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles à densité, indépendantes, toutes de même loi, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On note f une densité de ces variables aléatoires et F leur fonction de répartition.

1. a) Montrer qu'une densité g de la variable $X_1 - X_0$ est donnée par :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt.$$

b) Calculer $P(X_0 < X_1)$ et $P(X_1 < X_0)$.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour toute permutation σ de $[\![0, n]\!]$, on a :

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n)$$

et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)} \leq x) = P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculer $P(E_n)$ où E_n est l'événement :

« Il existe deux indices distincts i, j de $[\![0, n]\!]$ tels que $X_i = X_j$ »

b) Montrer que $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n) = \dfrac{1}{(n+1)!}$.

c) Calculer $P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x)$ en fonction de $F(x)$.

3. Si $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega)$ le plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $X_n(\omega) > X_0(\omega)$ si un tel indice existe et $T(\omega) = 0$ sinon.

Calculer $P(T = n)$, pour $n \in \mathbb{N}$. La variable T admet-elle une espérance ?

4. On pose pour tout $\omega \in \Omega, Y(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.

a) Calculer pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, $P([T = n] \cap [Y \leq x])$.

b) Comment en déduirait-on la fonction de répartition de Y ?

Solution :

1. a) X_0 et $-X_1$ sont indépendantes, de densités respectives $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(-t)$. Donc $X_0 - X_1$ admet pour densité :

$$g : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t-x)\,dt$$

On trouverait évidemment le même résultat pour la variable $X_1 - X_0$.

b) $P(X_0 < X_1) = P(X_0 - X_1 < 0) = P(X_1 - X_0 < 0) = P(X_1 < X_0)$.

La variable aléatoire $X_1 - X_0$ étant aussi une variable aléatoire à densité, on a : $P(X_1 = X_0) = 0$, et donc : $1 = P(X_1 < X_0) + P(X_0 < X_1)$. Par conséquent :

$$P(X_1 < X_0) = P(X_0 < X_1) = \frac{1}{2}$$

2. a) $P(E_n) = P(\bigcup\limits_{i<j} (X_i = X_j))$.

Une récurrence élémentaire sur k montre que $P(\bigcup\limits_{1 \leq i \leq k} A_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{k} P(A_i)$, donc :

$P(E_n) \leq \sum\limits_{i<j} P(X_i = X_j) = 0$ (car $X_i - X_j$ est une variable a densité). Soit :

$$P(E_n) = 0$$

b) L'univers Ω est la réunion disjointe des $(n+1)!$ événements :

$$X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)}, \text{ pour } \sigma \text{ décrivant } S([\![0, n]\!])$$

et de l'événement E_n. Or E_n est quasi-impossible et, par symétrie, tous les événements précédents ont la même probabilité. Ainsi :

$$P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n) = \frac{1}{(n+1)!}$$

c) De même notons $B_\sigma = (X_{\sigma(0)} < X_{\sigma(1)} < \cdots < X_{\sigma(n)} \leq x)$.

Tous les événements B_σ, σ décrivant $S([\![0, n]\!])$, ont la même probabilité (toujours par symétrie), sont deux à deux incompatibles et leur réunion diffère de l'événement $B = (X_0 \leq x) \cap \ldots \cap (X_n \leq x)$ d'un événement quasi-impossible.

Comme $P(B) = [F(x)]^{n+1}$, il vient :

$$P(X_0 < X_1 < \cdots < X_n \leq x) = \frac{1}{(n+1)!}[F(x)]^{n+1}$$

3. $(T = n) = (X_1 \leq X_0) \cap (X_2 \leq X_0) \cap \ldots \cap (X_{n-1} \leq X_0) \cap (X_n > X_0)$.
Comme l'égalité de deux variables aléatoires X_i et X_j, avec $i \neq j$, est quasi-impossible, on peut donc écrire :

$$P(T = n) = P\big(\bigcup [X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0 < X_n]\big)$$

La réunion étant étendue à toutes les permutations de $[\![1, n-1]\!]$.
Comme il y a $(n+1)!$ façons de permuter les $n+1$ variables en présence, toutes équiprobables, on obtient :

$$P(T = n) = \frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

On peut remarquer que $P(T = n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(T = n) = 1$ et l'événement $(T = 0)$ est quasi-impossible.

Comme $n.P(T = n) \sim \dfrac{1}{n}$, la variable T n'a pas d'espérance.

4. a) $(T = 0)$ étant quasi-impossible, $P[(T = 0) \cap (Y \leq x)] = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(T = n) \cap (Y \leq x)$ a même probabilité que l'événement

$$\bigcup [X_{\sigma(1)} < X_{\sigma(2)} < \cdots < X_{\sigma(n-1)} < X_0 < X_n \leq x]$$

la réunion étant étendue à toutes les permutations de $[\![1, n-1]\!]$.
D'où : $P[(T = n) \cap (Y \leq x)] = (n-1)!\dfrac{[F(x)]^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{[F(x)]^{n+1}}{n(n+1)}$

b) On en déduirait $P(Y \leq x)$ par la relation $P(Y \leq x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^{n+1}}{n(n+1)}$, avec $t = F(x)$.
Pour achever le calcul, il faudrait savoir que pour $|t| < 1$, on a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$ et séparer la série en deux en décomposant $\dfrac{1}{n(n+1)}$ ...

Exercice 3-18

Si X est un ensemble, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k(X)$ désigne l'ensemble des parties de X à k éléments.
Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul et E_n désigne l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Soient a et b deux entiers tels que $1 \leq a \leq n$ et $1 \leq b \leq n$. On tire au hasard une partie A dans $\mathcal{P}_a(E_n)$ et une partie B dans $\mathcal{P}_b(E_n)$. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cap B$ et Y la variable aléatoire égale au nombre d'éléments de $A \cup B$.

a) Dans le cas particulier où $n = 7, a = 4, b = 2$, déterminer la loi de X.

b) Dans le cas général, calculer l'espérance des variables X et Y.

c) Sous la contrainte $a + b = n$, quels sont les couples (a, b) pour lesquels l'espérance de X est maximale ?

2. On tire au hasard une partie C dans $\mathcal{P}(E_n)$, puis on tire au hasard une partie D dans $\mathcal{P}(C)$. On note Z la variable aléatoire égale au cardinal de D. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Solution :

1. Dans cette question $\Omega = \mathcal{P}_a(E_n) \times \mathcal{P}_b(E_n)$, de cardinal $C_n^a C_n^b$, et muni de la probabilité uniforme.

a) $\star$ $(X = 0)$ est réalisé si les parties A et B sont disjointes. Pour réaliser cet événement, on peut choisir A de C_7^4 façons, et une fois A choisie, B est une partie à 2 éléments de $E_7 \setminus A$, qui est de cardinal 3. Il existe donc C_3^2 façons de choisir B et : $P(X = 0) = \dfrac{C_7^4 C_3^2}{C_7^4 C_7^2} = \dfrac{1}{7}$.

De même pour réaliser $(X = 2)$, il faut que B soit incluse dans A. La partie A est toujours choisie de C_7^4 façons et, une fois A choisie, on peut alors choisir B de C_4^2 façons, ce qui donne : $P(X = 2) = \dfrac{C_7^4 C_4^2}{C_7^4 C_7^2} = \dfrac{2}{7}$.

Comme $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, il vient alors $P(X = 1) = \dfrac{4}{7}$.

b) $\star$ Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si $i \in A \cap B$ et la valeur 0 sinon.

On a : $P(X_i = 1) = \dfrac{C_{n-1}^{a-1} C_{n-1}^{b-1}}{C_n^a C_n^b} = \dfrac{ab}{n^2}$ (car une fois le nombre i mis dans les parties A et B, il reste à compléter la partie A en prenant $a - 1$ éléments dans $E_n \setminus \{i\}$, idem pour B).

La variable X_i étant de Bernoulli, il vient $E(X_i) = \dfrac{ab}{n^2}$ et puisque $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, on obtient :

$$E(X) = \frac{ab}{n}$$

$\star$ On a $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B - \operatorname{card}(A \cap B)$, *i.e.* $Y = a + b - X$, et :

$$E(Y) = a + b - \frac{ab}{n}$$

c) Sous la contrainte $a + b = n$, on a : $E(X) = \dfrac{a(n - a)}{n}$.

Une étude rapide de la fonction $x \mapsto x(n - x)$ montre que cette fonction est croissante sur $[0, \frac{n}{2}]$, décroissante sur $[\frac{n}{2}, n]$ et sa représentation graphique est symétrique par rapport à la verticale d'abscisse $\frac{n}{2}$.

Ainsi, si n est pair $E(X)$ est maximale pour $a = \frac{n}{2}$ (et donc $b = \frac{n}{2}$), tandis que si n est impair $E(X)$ est maximale pour $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = \frac{n+1}{2}$.

2. Notons T la variable aléatoire égale au cardinal de C. Les variables T et Z prennent leurs valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a en appliquant la formule des probabilités totales :

$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{n} P(Z = k/T = i).P(T = i) = \sum_{i=k}^{n} P(Z = k/T = i).P(T = i)$

(en effet, on a $\operatorname{card} D \leq \operatorname{card} C$)

L'hypothèse d'équiprobabilité s'applique et donc :

$$P(Z = k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{C_i^k}{2^i} \cdot \frac{C_n^i}{2^n}$$

Or : $C_i^k C_n^i = C_n^k C_{n-k}^{n-i}$ et $P(Z = k) = \frac{C_n^k}{2^i} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{2^{i+k}} C_{n-k}^i = \frac{C_n^k}{2^{n+k}} (1 + \frac{1}{2})^{n-k}$

Ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!], P(Z = k) = C_n^k \big(\frac{1}{4})\big)^k \big(\frac{3}{4}\big)^{n-k}$

Par conséquent $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/4)$ et $E(Z) = \frac{n}{4}$.

Exercice 3-19

Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On dispose d'une urne contenant m jetons blancs numérotés de 1 à m et n jetons noirs numérotés de 1 à n.

1. On tire successivement et sans remise les $m + n$ jetons de l'urne. On appelle X le rang d'apparition du premier jeton portant le numéro 1 et Y le rang d'apparition du premier jeton blanc.

a) Déterminer la plus grande valeur notée α (respectivement β) prise par la variable aléatoire X (respectivement Y).

b) Calculer $P([X = \alpha] \cap [Y = \beta])$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur m et n pour que les variables aléatoires X et Y soient indépendantes (on distinguera les cas $m \geq 2$ et $m = 1$, puis pour $m = 1$, on distinguera selon que $n \geq 2$ ou $n = 1$).

2. On effectue maintenant une succession de tirages avec remise dans cette urne. On note encore X le rang d'apparition du premier jeton numéroté 1 et Y celui du premier jeton blanc. Donner une condition nécessaire et suffisante sur m et n pour que X et Y soient indépendantes.

Solution :

1. a) L'urne contient $m + n$ jetons, dont deux jetons portant le numéro 1, donc $\alpha = m + n - 1$. De même, comme l'urne contient n jetons noirs, $\beta = n + 1$.

b) $\star$ Si $m \geq 2$, pour réaliser $(Y = \beta)$, on doit tirer d'abord tous les jetons noirs, donc on réalise *ipso facto* $(X \leq n)$.

Comme $\alpha = m + n - 1 > n$, on ne peut donc pas réaliser simultanément $(Y = \beta)$ et $(X = \alpha)$. Par suite :

$$m \geq 2 \implies P([X = \alpha] \cap [Y = \beta]) = 0$$

$\star$ En revanche, si $m = 1$, $[X = \alpha] \cap [Y = \beta] = [X = n] \cap [Y = n + 1]$ et cet événement se réalise si l'on tire d'abord tous les jetons noirs portant un numéro ≥ 2 (ce qui peut se faire de $(n - 1)!$) façons), puis le jeton noir portant le numéro 1 et enfin le jeton blanc.

Les $(n + 1)!$ façons de vider l'urne étant équiprobables, on a :

$$P[(X = n) \cap (Y = n + 1)] = \frac{(n - 1)!.1.1}{(n + 1)!} = \frac{1}{n(n + 1)}$$

c) $\star$ Si $m \geq 2$, $(X = \alpha)$ et $(Y = \beta)$ ne sont pas de probabilité nulle, tandis que $P([X = \alpha] \cap [Y = \beta]) = 0$: X et Y ne sont pas indépendantes.

$\star$ Reste à étudier le cas $m = 1$.

Dans ce cas, on a : $P(X = n) = \dfrac{(n - 1)!.2}{(n + 1)!} = \dfrac{2}{n(n + 1)}$ (on place les $n - 1$ jetons portant un numéro ≥ 2 aux $n - 1$ premiers rangs du tirage, et on peut achever de deux façons selon la couleur $n^{\text{ème}}$ jeton).

On a de même $P(Y = n + 1) = \dfrac{n!}{(n + 1)!} = \dfrac{1}{n + 1}$ (on extrait d'abord les n jetons noirs).

Ainsi :

$P[(X = n) \cap (Y = n + 1)] = \dfrac{1}{n(n + 1)}$; $P(X = n).P(Y = n + 1) = \dfrac{1}{n(n + 1)^2}$

Ces deux événements ne sont donc indépendants que si $n(n + 1)^2 = n(n + 1)$, c'est-à-dire que si $n = 1$.

Finalement, le seul cas où X et Y peuvent être indépendantes est le cas $n = 1$, et $m = 1$.

Dans ce cas X est la variable certaine égale à 1, qui est indépendante de toute variable aléatoire.

Conclusion : X et Y sont indépendantes si et seulement si $m = n = 1$.

2. Dans le cas du tirage avec remise, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{2}{m + n})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(\dfrac{m}{m + n})$.

$\star$ $(X = 1) \cap (Y = 1)$ est réalisé si l'on tire du premier coup le jeton blanc portant le numéro 1, donc $P[(X = 1) \cap (Y = 1)] = \dfrac{1}{m + n}$

$\star$ $P(X = 1) = \dfrac{2}{m + n}$ et $P(Y = 1) = \dfrac{m}{m + n}$

Les événements $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ ne sont donc indépendants que si $\dfrac{2m}{m + n} = 1$, *i.e.* que si $m = n$. Ainsi X et Y ne peuvent être indépendantes que si $m = n$.

Supposons donc $m = n$.

$\star$ $\forall\, k, \ell \in \mathbb{N}^*, P(X = k)P(Y = \ell) = \big(1 - \frac{1}{m}\big)^{k-1} \frac{1}{m} \big(\frac{1}{2}\big)^{\ell} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^\ell}$

$\star$ Si $k < \ell$, l'événement $(X = k) \cap (Y = \ell)$ est réalisé lorsque les $(k-1)$ premiers tirages amènent un jeton noir portant un numéro supérieur ou égal à 2, le $k^{\text{ème}}$ tirage amène le jeton noir 1, tous les tirages du rang $k+1$ au rang $\ell - 1$ (s'il en existe) amènent un jeton noir de numéro quelconque et enfin le $\ell^{\text{ème}}$ tirage amène un jeton blanc.

Donc : $P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{k-1} \frac{1}{2m} \big(\frac{1}{2}\big)^{\ell - k + 1} \frac{1}{2} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^\ell}$

$\star$ De la même façon :

$P[(X = k) \cap (Y = k)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{k-1} \frac{1}{2m} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^m}$

et si $k > \ell$:

$P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = \big(\frac{m-1}{2m}\big)^{\ell - 1} \frac{m-1}{2m} \big(\frac{m-1}{m}\big)^{k - \ell - 1} \frac{1}{m} = \dfrac{(m-1)^{k-1}}{m^k 2^\ell}$

Dans tous les cas on a $P[(X = k) \cap (Y = \ell)] = P(X = k).P(Y = \ell)$ et les variables X et Y sont indépendantes.

Exercice 3-20

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On dit qu'une variable aléatoire X définie sur Ω suit une loi de Pascal de paramètres n et p si $X(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\ldots\}$ et si pour $k \geqslant n$,

$$P[X = k] = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \ (0 < p < 1,\ q = 1 - p \text{ et } n \in \mathbb{N}^*).$$

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre p.

Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on pose $S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k$.

1. Montrer que si S_{n-1} suit la loi de Pascal de paramètres $n-1$ et p, S_n suit la loi de Pascal de paramètres n et p. Conclure.

2. Déterminer $P[T_n = 1]$ et pour tout $s \geqslant n$, $P[T_n = 1 / S_n = s]$, $(n \geqslant 2)$.

3. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $q \in\,]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$,

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $q \in\,]0, 1[$, $\displaystyle\sum_{s=n}^{+\infty} C_s^n q^{s-n} = \frac{1}{(1-q)^{n+1}}$.

4. On suppose p inconnu.

Montrer que $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ est un estimateur sans biais de p.

5. En utilisant la question 3, calculer l'espérance de la variable
$\dfrac{(n-1)^2}{(S_n-1)(S_n-2)}$, (avec $n \geqslant 3$).
En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} V(P_n) = 0$, où $V(P_n)$ désigne la variance de P_n.

Solution :

1. Posons H_k : S_k suit une loi de Pascal de paramètres (k,p).
On sait que H_1 est vérifiée.
Supposons H_{n-1} vérifiée. Comme $S_n = S_{n-1} + T_n$, il vient :
$S_n(\Omega) = \{n, n+1, \ldots\}$, et pour tout $k \geq n$:

$$[S_n = k] = \bigcup_{\begin{cases} i \geq n-1 \\ k-i \geq 1 \end{cases}} ([S_n = i] \cap [T_n = k-i])$$

d'où, par indépendance :

$$P[S_n = k] = \sum_{i=n-1}^{k-1} P[S_{n-1} = i]P[T_n = k-i] = p^n q^{k-n} \sum_{i=n-1}^{k-1} C_{i-1}^{n-2}$$
$$= C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$$

Ainsi H_n est vérifiée.

2. Il vient immédiatement $P[T_n = 1] = p$, et, pour tout $n \geqslant 2$:

$$P[T_n = 1/S_n = s] = \frac{P[T_n = 1 \cap S_n = s]}{P[S_n = s]} = \frac{P[T_n = 1 \cap S_{n-1} = s-1]}{P[S_n = s]}$$
$$= \frac{P[T_n = 1]P[S_{n-1} = s-1]}{P[S_n = s]}$$
$$= \frac{C_{s-2}^{n-2}}{C_{s-1}^{n-1}} = \frac{n-1}{s-1}$$

3. Utilisons la formule des probabilités totales :

$$P[T_n = 1] = \sum_{s \geq n} P[T_n = 1/S_n = s]P[S_n = s]$$

Donc :

$$p = \sum_{s \geq n} \frac{n-1}{s-1} C_{s-1}^{n-1} p^n q^{s-n} = p^n \sum_{s \geq n} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n}$$

Ainsi :

$$\sum_{s=n}^{+\infty} C_{s-2}^{n-2} q^{s-n} = \frac{1}{p^{n-1}}$$

La seconde formule se déduit de la première par un simple changement d'indices.

4. Toujours en utilisant la formule des probabilités totales :

$$P[T_n = 1] = \sum_{s \geq n} P[T_n = 1/S_n = s] = \sum_{s \geq n} \frac{n-1}{s-1} P[S_n = s]$$

D'après le théorème de transfert, cette formule correspond à l'espérance de la variable aléatoire $P_n = \dfrac{n-1}{S_n - 1}$ qui est donc un estimateur sans biais de p.

5. Effectuons les calculs demandés :

$$\begin{aligned} E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) &= \sum_{s \geq n} \frac{(n-1)^2}{(s-2)(s-1)} C_{s-1}^{n-1} p^n q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^n \sum_{s \geq n} \frac{(n-1)(n-2)}{(s-2)(s-1)} C_{s-1}^{n-1} q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^n \sum_{s \geq n} C_{s-3}^{n-3} q^{s-n} \\ &= \frac{n-1}{n-2} p^2 \end{aligned}$$

Or $\dfrac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)} \geq \dfrac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2}$ implique que :

$$E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) \geq E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-1)^2}\Big)$$

On en déduit que :

$$V(P_n) \leq E\Big(\frac{(n-1)^2}{(S_n-2)(S_n-1)}\Big) - E(P_n^2) = \frac{p^2}{n-2} \leq \frac{1}{n-2}$$

La suite d'estimateurs (P_n) est donc convergente.

Exercice 3-21

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $p_k = P(X = k)$ et $Q_k = P(X > k)$.

1. Montrer que la série $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k . x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$ et que la série $\Psi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} Q_k . x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

2. Que vaut $Q_{k-1} - Q_k$? Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1-x) \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q_k \, x^k$. En déduire que :

$$(\forall\, x \in]-1, 1[) \qquad \Psi(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{1 - x}$$

A quelle condition peut-on prolonger par continuité la fonction Ψ en 1 ?

3. On suppose que X admet une espérance et on admet que l'on peut dériver terme à terme la série de somme $\Phi(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\Phi'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k.x^{k-1}$$

Montrer qu'alors : $E(X) = \Phi'(1) = \Psi(1)$.

4. On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce donnant pile (P) avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face (F) avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir pour la première fois pile suivi immédiatement de face ($T = k$ si et seulement si on obtient pile au $(k-1)$-ième lancer, face au k-ième lancer et que l'on n'a jamais obtenu PF lors des lancers précédents).

On pose $p_k = P(T = k)$. Calculer p_k pour $k \leq 4$.
Montrer que l'on a :

$$(\forall\ k \geq 2) \qquad p_{k+1} = p.q^{k-1} + p.p_k$$

Déterminer la fonction Φ associée à la variable T et en déduire l'espérance de T.

Solution :

1. La série $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} p_k.x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$, car $|p_k x^k| \leq p_k$ qui est le terme général d'une série convergente.

De même, comme $0 \leq Q_k \leq 1$, il vient $|Q_k x^k| \leq |x|^k$ qui est le terme général d'une série convergente dès que $|x| < 1$.

2. Il est clair que $Q_{k-1} - Q_k = p_k$ et :

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{k=0}^{n} Q_k x^k &= \sum_{k=0}^{n} Q_k x^k - \sum_{k=0}^{n} Q_k x^{k+1} \\ &= Q_0 - \sum_{k=1}^{n}(Q_k - Q_{k-1})x^k - Q_n x^{n+1} \\ &= Q_0 - \sum_{k=1}^{n} p_k x^k - Q_n x^{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} p_k x^k - Q_n x^{n+1}\end{aligned}$$

Pour $|x| < 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |Q_n x^{n+1}| \leq \lim_{n\to+\infty} |x^{n+1}| = 0$, et, en passant à la limite :

$$(1-x)\Psi(x) = 1 - \Phi(x) \Rightarrow \forall x \in]-1, 1[,\ \Psi(x) = \frac{1 - \Phi(x)}{1 - x}$$

Ainsi, Ψ admet un prolongement par continuité en $x = 1$ si et seulement si la fonction Φ est dérivable à gauche en ce point (car $\Phi(1) = 1$).

3. Si l'on suppose que $E(X)$ existe et que l'on peut dériver terme à terme une série de fonctions, il vient immédiatement :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} p_k x^k\right)\Big|_{x=1} = \Phi'(1)$$

et d'après la question précédente, si Φ est dérivable en $x = 1$,

$$E(X) = \Psi(1)$$

4. La variable aléatoire T prend ses valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Il est évident que $p_2 = pq$.

L'événement $(T = 3)$ correspond à l'expérience $PPF \cup FPF$ et $p_3 = pq$.

L'événement $(T = 4)$ correspond à l'expérience $PPPF \cup FPPF \cup FFPF$ et $p_4 = pq(p^2 + pq + q^2)$.

De manière générale, notons X_n le résultat du n-ième tirage. Pour avoir $(T = k)$, il faut : $X_{k-1} = P, X_k = F$ et X_{k-2} est quelconque. Mais :

- si $X_{k-2} = F$, alors nécessairement $X_{k-3} = F$ et par récurrence pour tout $j \leq k-2$, $X_j = F$.
- si $X_{k-2} = P$, on "oublie" ce tirage et on est ramené à la situation précédente avec $(n-1)$ tirages.

Par disjonction des cas :

$$p_k = P(F\ldots FPF) + P(P)p_{k-1} = pq^{k-1} + pp_{k-1}$$

En posant $p_1 = 0$ et par convergence des séries manipulées, il vient :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} p_k x^k = \sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1}x^k + p\sum_{k=2}^{+\infty} p_{k-1}x^k \\ &= pqx^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (qx)^{k-2} + px\Phi(x)\end{aligned}$$

soit :

$$\Phi(x) = \frac{pqx^2}{1 - x + pqx^2}$$

On sait que si T admet un espérance, alors $E(T) = \Phi'(1)$. Un calcul élémentaire donne :

$$\Phi'(x) = \frac{2pqx(1 - x + pqx^2) - pqx^2(2pqx - 1)}{(1 - x + pqx^2)^2} \Rightarrow E(T) = \Phi'(1) = \frac{1}{pq}$$

Exercice 3-22

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On considère :
- une variable aléatoire N définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- deux variables aléatoires A et B indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les lois conditionnées $A|(N = n)$ et $B|(N = n)$ sont des lois binomiales de paramètres $(n + 1, p)$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère le polynôme P_ω défini par :
$$P_\omega(X) = A(\omega)X^{N(\omega)+1} - B(\omega)X^{N(\omega)} + 1$$

1. Quelle est la loi du coefficient A ?

2. Quelle est la loi du degré de P_ω ? (on distinguera le cas où P_ω est le polynôme identiquement nul, pour lequel on pose alors que le degré est $-\infty$, et le cas où P_ω est de degré 0).

Solution :

1. N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et lorsque N prend la valeur n, alors A peut prendre les valeurs entières de 0 à $n+1$. Ainsi A prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et la formule des probabilités totales donne :
$$\forall\, i \in \mathbb{N}, P(A = i) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k).P(A = i/N = k)$$
Or, $P(N = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$ et :

Si $k \geq i - 1$, $P(A = i/N = k) = C_{k+1}^{i} p^i q^{k+1-i}$, avec $q = 1 - p$

Si $k < i - 1$, $P(A = i/N = k) = 0$.

Ainsi : $P(A = i) = \dfrac{(p\lambda)^i}{i!} \cdot \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \displaystyle\sum_{k=i-1}^{\infty} (k + 1)\frac{(q\lambda)^{k+1-i}}{(k + 1 - i)!}$

En écrivant : $k + 1 = (k + 1 - i) + i$, on peut séparer la série en deux séries convergentes connues, d'où :
$$\forall\, i \in \mathbb{N}, P(A = i) = \frac{(p\lambda)^i}{i!}\,\frac{\mathrm{e}^{-p\lambda}}{\lambda}(\lambda q + i)$$
2. a) P_ω est le polynôme nul si $N(\omega) = 0$, $A(\omega) = 0$ et $B(\omega) = 1$. Donc, en notant $D(\omega)$ le degré de P_ω :

$P(D = -\infty) = P(N = 0).P((A = 0) \cap (B = 1)/N = 0)$

Soit, par indépendance :
$$P(D = -\infty) = \mathrm{e}^{-\lambda}.p.q$$
b) P_ω est un polynôme constant non nul si $(N = 0, A = 0$ et $B \neq 1)$ ou bien si $(N > 0, A = 0$ et $B = 0)$. Or si $A = 0$ et $B \neq 1$, on a $A = 0$ et $B = 0$. Donc

$\star$ $P[(N=0)\cap(A=0)\cap(B\neq 1)] = P(N=0).P[(A=0)\cap(B=0)/N=0]$
$= \mathrm{e}^{-\lambda}.q^2$

$\star$ $P[(N>0)\cap(A=0)\cap(B=0)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(N=k).P[(A=0)\cap(B=0)/N=k]$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.q^{k+1}q^{k+1}$$
$$= q^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda q^2)^k}{k!} = q^2\mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda q^2}-1)$$

Soit, en sommant, par incompatibilité des deux cas :

$$P(D=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}.q^2 + q^2\mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{\lambda q^2}-1) = q^2\mathrm{e}^{-\lambda p(2-p)}$$

c) Pour $k>0$, P_ω est de degré k si ($N=k-1$ et $A\neq 0$) ou si ($N=k, A=0$ et $B\neq 0$).

$\star$ $P[(N=k-1)\cap(A\neq 0)] = P(N=k-1).P(A\neq 0/N=k-1)$, d'où :

$$P[(N=k-1)\cap(A\neq 0)] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}(1-q^k)$$

$\star$ $P[(N=k)\cap(A=0)\cap(B\neq 0)] = P(N=k).P[(A=0)\cap(B\neq 0)/N=k)$
Soit :

$$P[(N=k)\cap(A=0)\cap(B\neq 0)] = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}q^{k+1}(1-q^{k+1})$$

Soit :

$$\forall\, k\geq 1, P(D=k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\Big(q^{k+1}(1-q^{k+1}) + \frac{k}{\lambda}(1-q^k)\Big)$$

Exercice 3-23

On considère une variable aléatoire à densité X définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Soit f une densité de X et F sa fonction de répartition.

On suppose qu'il existe un réel a tel que f soit identiquement nulle sur l'intervalle $]-\infty,a[$ et continue sur $[a,+\infty[$. On suppose également que X admet une espérance notée $E(X)$.

1. Montrer que, lorsque x tend vers $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,dt$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x}$.

2. En effectuant une intégration par parties, montrer que l'intégrale

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(t)dt\right)dx$$

converge, et vaut $E(X)-a$.

3. Le résultat de la question précédente subsiste-t-il si on suppose seulement f continue sur $]a,+\infty[$?

4. Soient deux réels b et τ tels que $b > 0$ et $\tau > 0$.
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t}{b}} t^{\tau-1} dt\right) dx$ converge et calculer sa valeur.

5.a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha.\mathrm{e}^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer α pour que f représente la densité d'une variable aléatoire.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} dt\right) dx$ converge et calculer sa valeur.

Solution :

1. La variable aléatoire X ayant une espérance, on sait que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} tf(t)\, dt$ est convergente. On peut alors écrire, pour $x > a$:

$$0 \leq x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\, dt$$

Par définition de la convergence de l'intégrale définissant $E(X)$, on a donc :

$$\lim_{x\to+\infty} x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt = 0$$

Ce qui est le résultat demandé.

2. En intégrant par parties (licite, car la continuité de f montre que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $x \mapsto -f(x)$) :

$$\int_a^A \Big(\int_x^{+\infty} f(t)\, dt\Big) dx = \Big[x\int_x^{+\infty} f(t)\, dt\Big]_a^A + \int_a^A xf(x)\, dx$$

Comme $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = 1$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} xf(x)\, dx = E(X)$, le passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty$ donne :

$$\int_a^{+\infty}\left(\int_x^{+\infty} f(t) dt\right) dx = -a + E(X)$$

3. Le résultat subsiste. En effet, il suffit de procéder sur l'intervalle $[b, +\infty[$, avec $b > a$ (intervalle sur lequel f est continue) et de procéser alors par passage à la limite lorsque b tend vers a, par continuité de l'intégrale par rapport à sa borne inférieure.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi Γ de paramètres (b, τ). En appliquant ce qui précède, on a :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t/b}t^{\tau-1}}{\Gamma(\tau)b^\tau}dt\Big)dx = E(X) = b\tau$$

En conséquence :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t/b}t^{\tau-1}\,dt\Big)dx = b\tau\Gamma(\tau)b^\tau = \tau\Gamma(\tau)b^{\tau+1}$$

5. a) On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (considérer une variable aléatoire à densité suivant la loi normale d'espérance 0 et de variance 1/2).
On doit donc prendre $\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$.

b) Si X est une variable aléatoire ayant la densité précédente, X admet une espérance et :

$$E(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}t.\mathrm{e}^{-t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

En appliquant ce qui précède, il vient finalement :

$$\int_0^{+\infty}\Big(\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}dt\Big)dx = \frac{1}{2}$$

Exercice 3-24

On considère deux variables aléatoires à densité X et Y, indépendantes, définies sur le même espace probabilisé ; X suit une loi exponentielle de paramètre a, Y suit une loi exponentielle de paramètre b, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs donnés.

On définit les variables aléatoires : $T = \min(X,Y), U = \max(X,Y), Z = U - T$.

(N.B : dans chacune des questions, on prêtera attention au cas où $a = b$).

1. Déterminer une densité de la variable aléatoire D définie par $D = X - Y$.

2. Exprimer Z en fonction de X et de Y, et déterminer une densité de Z.

3. Calculer l'espérance et la variance de Z.

4. Pour n entier positif, exprimer le moment d'ordre n de Z :
 a) en fonction des moments d'ordre n de X et de Y,
 b) en fonction de n, a, b.

Solution :

1. $\star$ Déjà $-Y$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ et sa fonction de répartition F_{-Y} est définie par :

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^-, F_{-Y}(y) = P(-Y \leq y) = P(Y \geq -y) = 1 - F_Y(-y)$$

Une densité f_{-Y} de $-Y$ est donc définie sur $\mathbb{R}^-$ par :

$$f_{-Y}(y) = f_Y(-y) = b.\mathrm{e}^{by}$$

$\star$ Une densité de $D = X - Y = X + (-Y)$ s'obtient alors par convolution :

$$\forall\, d \in \mathbb{R}, f_D(d) = \int_{\mathbb{R}} f_X(d-t) f_{-Y}(t)\, dt$$

La fonction à intégrer est non nulle lorsque $t \leq 0$ et $d - t \geq 0$, ce qui conduit à distinguer deux cas :

Si $d \leq 0$, $f_D(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{d} a.\mathrm{e}^{-a(d-t)}.b.\mathrm{e}^{bt}\, dt = \frac{ab}{a+b}\,\mathrm{e}^{bd}$

Si $d > 0$, $f_D(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} a.\mathrm{e}^{-a(d-t)}.b.\mathrm{e}^{bt}\, dt = \frac{ab}{a+b}\,\mathrm{e}^{-ad}$

$\star$ Pour $a = b$, on peut abréger en : $\forall\, d \in \mathbb{R}, f_D(d) = \dfrac{a}{2}\,\mathrm{e}^{-a|d|}$

2. $Z = U - T = |X - Y| = |D|$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et pour $z \in \mathbb{R}^+$, on a :
$P(Z \leq z) = P(-z \leq D \leq z) = F_D(z) - F_D(-z)$. D'où par dérivation :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^+, f_Z(z) = f_D(z) + f_D(-z)$$

Ce qui donne :

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^+, f_Z(z) = \frac{ab}{a+b}(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})$$

Dans le cas particulier $b = a$, il vient : $f_Z(z) = a.\mathrm{e}^{-az}$ et Z suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$, d'où $E(Z) = \dfrac{1}{a}$ et $V(Z) = \dfrac{1}{a^2}$.

3. $\star$ Sous réserve de convergence, on a : $E(Z) = \dfrac{a+b}{ab}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} z(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz$.

La convergence est banale et le calcul simple, à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors :

$$E(Z) = \frac{ab}{a+b}\Big[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\Big]$$

$\star$ De la même façon, mais avec une intégration par parties de plus, on obtient :

$$E(Z^2) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^2(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz = \frac{2(a^3+b^3)}{(a+b)a^2b^2}$$

Ce qui donne ;
$V(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \dfrac{1}{(a+b)^2a^2b^2}[2(a+b)(a^3+b^3) - (a^2+b^2)^2]$

On vérifie que pour $b = a$, on retrouve les résultats attendus.

4. a) b) $\star$ Toujours sous réserve de convergence, on a :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n(\mathrm{e}^{-az} + \mathrm{e}^{-bz})\, dz.$$

La convergence est banale, par négligeabilité classique, et on peut écrire :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n.\mathrm{e}^{-az}\, dz + \frac{ab}{a+b}\int_{\mathbb{R}^+} z^n.\mathrm{e}^{-bz}\, dz.$$

Plutôt que de procéder à des intégrations par parties successives, il vaut mieux effectuer le changement de variable $t = az$ ou $t = bz$, ce qui donne :

$$E(Z^n) = \frac{ab}{a+b}\Big[\frac{1}{a^{n+1}}\Gamma(n+1) + \frac{1}{b^{n+1}}\Gamma(n+1)\Big].$$

i.e. : $E(Z^n) = \dfrac{ab.n!}{a+b}\Big[\dfrac{1}{a^{n+1}} + \dfrac{1}{b^{n+1}}\Big]$

$\star$ Or si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$, on a $E(X^n) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}+} x^n.a.\mathrm{e}^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^n}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{a^n}$

On peut écrire également $E(Z^n) = \dfrac{b}{a+b}E(X^n) + \dfrac{a}{a+b}E(Y^n)$.

Exercice 3-25

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Lors d'une épreuve de tir à l'arc, un concurrent dispose de n flèches, $n \geq 1$ fixé ; son objectif est d'envoyer chacune de ses n flèches le plus près possible du point O.
Pour chaque flèche décochée $f_i, 1 \leq i \leq n$, on suppose que l'abscisse X_i et l'ordonnée Y_i du point d'impact de f_i, sont deux variables aléatoires indépendantes, toutes deux de loi normale d'espérance nulle et d'écart-type σ (exprimé dans l'unité commune du repère), σ étant un paramètre réel inconnu.

1. On note D_i la distance aléatoire du point d'impact de la flèche f_i à O. Déterminer une densité de D_i (on pourra reconna"tre les variables aléatoires $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$ et $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}$).

2. Calculer l'espérance et la variance de D_i ; en déduire une fonction simple $\widetilde{D_i}$ de D_i telle que $E(\widetilde{D_i}) = \sigma$ (E désignant l'opérateur espérance).

3. On suppose que les variables aléatoires $(D_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes. On s'intéresse à la distance aléatoire D de la meilleure flèche décochée par l'archer – au sens de la plus proche de O – parmi les n.

a) Exprimer D en fonction des variables aléatoires D_i, $1 \leq i \leq n$.

b) Déterminer la loi de D (on précisera la fonction de répartition et une densité).

c) Calculer l'espérance et la variance de D ; en déduire un estimateur sans biais D' de σ, fonction simple de D ; est-il convergent ? (justifier le bien-fondé de ce dernier résultat).

d) Proposer un estimateur de σ de meilleure qualité que celui précédemment rencontré.

Solution :

1. Pour tout entier i tel que $1 \le i \le n$, on a $D_i^2 = X_i^2 + Y_i^2$ d'où :

$$\frac{D_i^2}{\sigma^2} = \frac{X_i^2}{\sigma^2} + \frac{Y_i^2}{\sigma^2}$$

Or, on sait que $\dfrac{X_i}{\sigma}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ et de densité ϕ. Déterminons la loi de $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$.
Pour tout $u \ge 0$:

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{X_i^2}{\sigma^2} \le u\Big) &= P\Big(-\sqrt{u} \le \frac{X_i}{\sigma} \le \sqrt{u}\Big) \\ &= \Phi(\sqrt{u}) - \Phi(-\sqrt{u}) = 2\Phi(\sqrt{u}) - 1 \end{aligned}$$

Si l'on note f une densité de $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$, alors

$$f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u/2} \dfrac{1}{\sqrt{u}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi $\dfrac{X_i^2}{\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(2, 1/2)$. La variable $\dfrac{Y_i^2}{\sigma^2}$ suit la même loi et par indépendance $\dfrac{D_i^2}{\sigma^2}$ suit une loi $\Gamma(2,1) = \mathcal{E}(1/2)$. Une densité de $\dfrac{D_i^2}{\sigma^2}$ est alors définie par :

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \le 0 \\ \dfrac{1}{2} e^{-u/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminons maintenant la loi de D_i. Comme, pour $t \ge 0$:

$$P\Big(\frac{D_i}{\sigma} \le t\Big) = P\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2} \le t^2\Big)$$

une densité de $\dfrac{D_i}{\sigma}$ est définie par :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ t e^{-t^2/2} & \text{sinon} \end{cases}$$

et une densité de D_i sera donnée par :

$$f_{D_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \le 0 \\ \dfrac{u}{\sigma^2} e^{-u^2/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Un calcul donne :

$$E\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

et $E(D_i) = \sigma\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

De même :

$$V\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = E\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2}\Big) - E^2\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

d'où $V(D_i) = \Big(2 - \frac{\pi}{2}\Big)\sigma^2$.

Ainsi $\sqrt{\frac{2}{\pi}}D_i$ est un estimateur sans biais de σ, mais au vu d'une seule observation d_i de D_i on ne peut statuer sur la convergence de cet estimateur.

3. a) On a évidemment $D = \min\limits_{1\leq i\leq n}(D_i)$ et $\frac{D}{\sigma} = \min\limits_{1\leq i\leq n}\Big(\frac{D_i}{\sigma}\Big)$.

b) Pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} P\Big(\frac{D}{\sigma} > t\Big) &= \prod_{i=1}^{n} P\Big(\frac{D_i}{\sigma} > t\Big) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P\Big(\frac{D_i^2}{\sigma^2} > t^2\Big) \\ &= \big(e^{-t^2/2}\big)^n = e^{-nt^2/2} \end{aligned}$$

Si l'on note F_D la fonction de répartition de D et f_D une densité, il vient :

$$F_D(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ 1 - e^{-(nu^2)/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

et :

$$f_D(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \dfrac{nu}{\sigma^2}e^{-(nu^2)/(2\sigma^2)} & \text{sinon} \end{cases}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} E(D) &= \int_0^{+\infty} \frac{nu^2}{\sigma^2}e^{-(n/2)(u^2/\sigma^2)}du \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} t^2e^{-t^2/2}dt = \frac{\sqrt{\pi}\sigma}{\sqrt{2n}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E(D^2) &= \int_0^{+\infty} u\frac{nu^2}{\sigma^2}e^{-(n/2)(u^2/\sigma^2)}du \\ &= \frac{2\sigma^2}{n}\int_0^{+\infty} te^{-t}dt = \frac{2\sigma^2}{n} \ (\text{car } \Gamma(2) = 1) \end{aligned}$$

soit :

$$V(D) = \frac{\sigma^2}{n}\Big(2 - \frac{\pi}{2}\Big)$$

Posons $D' = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}D$. C'est un estimateur sans biais de σ, mais non convergent puisque $V(D') = \sigma^2\frac{4-\pi}{\pi}$.

On pouvait s'en douter, puisque le meilleur tir ne donne pas d'information sur la dispersion moyenne des tirs qui est mesurée par σ.

d) Il conviendrait de choisir un estimateur tenant compte de l'ensemble des tirs. Par exemple $\overline{D} = \sum_{k=1}^{n} D_k$. Mais alors les calculs seront plus lourds.

Exercice 3-26

L'engouement du public pour un jeu de foire, permettant de gagner des lots divers et variés, est tel qu'il est nécessaire d'en présélectionner les candidats. On organise donc une suite d'épreuves de sélection, chaque épreuve réunissant n candidats, $n \geq 1$ étant fixé, toutes basées sur le même principe.
A chaque épreuve :

• un nombre réel mystère a est déterminé au hasard par la fonction **Random** d'un calculateur électronique (a est donc la réalisation d'une variable aléatoire de densité uniforme sur l'intervalle$[0, 1]$, et a est susceptible de changer d'une épreuve à l'autre, mais est une constante pour une épreuve donnée).

• chacun des n candidats est alors invité à proposer son évaluation de a, en inscrivant, en secret et indépendamment des autres, sa réponse sur papier.

• sera alors sélectionné pour le jeu celui des n candidats dont la réponse sera la plus proche de a (par valeur supérieure ou inférieure).

On fait les hypothèses suivantes :

• la réponse du candidat i, pour $1 \leq i \leq n$, est une variable aléatoire, notée X_i, à densité, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

• les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

On admet que chaque épreuve de sélection ne fournit qu'un seul gagnant.
On s'intéresse à la variable aléatoire Z_a, mesurant l'erreur aléatoire d'évaluation de a par le gagnant d'une épreuve de sélection.

1. Exprimer Z_a en fonction des variables aléatoires $X_i, (1 \leq i \leq n)$ et de a. Préciser $Z_a(\Omega)$.

2. Le calculateur fournit la valeur $a = 1$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Z_1 ; en déduire une densité de Z_1.
   b) Calculer l'espérance et la variance de Z_1.

3. On revient au cas général où a est une valeur quelconque de l'intervalle $[0, 1]$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de Z_a (on distinguera deux cas en comparant a à $1/2$).
   b) En déduire une densité de Z_a.

4. En plus d'être l'heureux élu, le candidat sélectionné gagne, en cadeau de bienvenue, la somme $1-Z_a$, exprimée en milliers d'Euros. Calculer l'espérance de gain, à l'issue de cette phase de sélection, du vainqueur d'une épreuve.

Solution :

1. La variable aléatoire Z_a est définie par :

$$Z_a = \min_{1\leq i\leq n} |X_i - a|, \quad \text{et } Z_a(\Omega) = [0, \max(a, 1-a)]$$

2. a) La variable aléatoire Z_1 est définie par : $Z_1 = \min\limits_{1\leq i\leq n}(1 - X_i)$ soit : $Z_1 = 1 - \max\limits_{1\leq i\leq n}(X_i)$. Ainsi $Z_1(\Omega) = [0,1]$ et, pour tout $z \in [0,1]$:

$$P(Z_1 \leq z) = P(\max_{1\leq i\leq n}(X_i) > 1 - z) = 1 - P(\max_{1\leq i\leq n}(X_i) < 1 - z)$$

Par indépendance des variables (X_i) :

$$P(Z_1 \leq z) = 1 - (F_{X_i}(1-z))^n = 1 - (1-z)^n$$

Ainsi la fonction de répartition de Z_1 est définie par ;

$$F_{Z_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1 - (1-z)^n & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 1 & \text{si } z \geq 1 \end{cases}$$

et une densité de Z_1 est donnée par :

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \notin [0,1] \\ n(1-z)^{n-1} & \text{si } z \in [0,1] \end{cases}$$

b) On a alors :

$$E(Z_1) = n\int_0^1 t(1-t)^{n-1}dt = n\int_0^1 (1-u)u^{n-1}du = \frac{1}{n+1}$$

$$E(Z_1^2) = n\int_0^1 t^2(1-t)^{n-1}dt = n\int_0^1 (1-u)^2u^{n-1}du = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1$$

et

$$V(Z_1) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

3. Pour tout $z \in Z_a(\Omega)$:

$$P(Z_a \leq z) = 1 - P(\min_{1\leq i\leq n}|X_i - a| > z) = 1 - (1 - P(|X_i - a| < z))^n$$

Posons $U_i = |X_i - a|$. On a $U_i(\Omega) = Z_a(\Omega)$ et :

$$\begin{aligned} P(U_i < u) &= P\left((a - u < X_i < a + u) \cap (0 < X_i < 1)\right) \\ &= P(\max(0, a-u) < X_i < \min(1, a+u)) \end{aligned}$$

- si $a \leq \dfrac{1}{2} \leq 1 - a$:

$$F_{U_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 2u & \text{si } 0 \leq u \leq a \\ a + u & \text{si } a \leq u \leq 1 - a \\ 1 & \text{si } 1 - a \leq u \end{cases}$$

d'où :

$$F_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1-(1-2z)^n & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ 1-(1-a-z)^n & \text{si } a \leq z \leq 1-a \\ 1 & \text{si } 1-a \leq z \end{cases}$$

et

$$f_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 2n(1-2z)^{n-1} & \text{si } 0 \leq z \leq a \\ n(1-a-z)^{n-1} & \text{si } a \leq z \leq 1-a \\ 0 & \text{si } 1-a \leq z \end{cases}$$

- si $1-a \leq \dfrac{1}{2} \leq a$:

$$F_{U_i}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leq 0 \\ 2u & \text{si } 0 \leq u \leq 1-a \\ u+1-a & \text{si } 1-a \leq u \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq u \end{cases}$$

d'où :

$$F_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 1-(1-2z)^n & \text{si } 0 \leq z \leq 1-a \\ 1-(a-z)^n & \text{si } 1-a \leq z \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq z \end{cases}$$

et

$$f_{Z_a}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0 \\ 2n(1-2z)^{n-1} & \text{si } 0 \leq z \leq 1-a \\ n(a-z)^{n-1} & \text{si } 1-a \leq z \leq a \\ 0 & \text{si } a \leq z \end{cases}$$

4. Le gain espéré est $1 - E(Z_a)$. Aussi :

- si $1-a \leq \dfrac{1}{2} \leq a$:

$$E(Z_a) = \int_0^{1-a} 2nz(1-2z)^{n-1}dz + \int_{1-a}^{a} nz(a-z)^{n-1}dz = \frac{1+(2a-1)^{n+1}}{2n+2}$$

- si $a \leq \dfrac{1}{2} \leq 1-a$, on pose $b = 1-a$ et on est ramené au cas précédent pour le calcul, soit :

$$E(Z_a) = \frac{1}{2n+2}(1+(1-2a)^{n+1})$$

Donc pour tout $a \in [0,1]$:

$$E(Z_a) = \frac{1}{2(n+1)}\left(1+|2a-1|^{n+1}\right)$$

Exercice 3-27

Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher ; pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'urne numéro i, contient i boules blanches, les autres boules étant noires.

On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.

1. Exprimer la loi de N_p.

2. Déterminer l'espérance $E(N_p)$ de N_p.

3. L'entier n étant fixé, montrer que, pour tout entier k de $[\![0, n]\!]$:

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx,$$

en déduire la valeur de cette limite.

Solution :

1. On sait que $N_p(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et que si l'on note U_i l'événement « on effectue les tirages dans l'urne i », la famille $(U_i)_{0\le i\le p}$ forme un système complet d'événements.
En appliquant la formule des probabilités totales, il vient, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(N_p = k) &= \sum_{i=0}^{p} P(N_p = k \mid U_i) P(U_i) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k} \end{aligned}$$

car on sait que $(N_p \mid U_i)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, i/p)$.

2. Le calcul de l'espérance de N_p donne :

$$\begin{aligned} E(N_p) &= \sum_{k=0}^{n} k \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k} \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} \Big(\sum_{k=0}^{n} k C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k} \Big) \\ &= \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} n \frac{i}{p} = \frac{n}{2} \end{aligned}$$

3. On sait que :

$$P(N_p = k) = \frac{p}{p+1} \Big(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1 - \frac{i}{p}\Big)^{n-k} \Big)$$

Or $\displaystyle\frac{1}{p}\sum_{i=0}^{p} C_n^k \Big(\frac{i}{p}\Big)^k \Big(1-\frac{i}{p}\Big)^{n-k}$ est une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$ sur l'intervalle $[0,1]$. D'où :

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx$$

Une intégration par parties immédiate donne :

$$I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = \frac{k}{n-k+1} I_{k-1}$$

et une récurrence toute aussi immédiate donne :

$$I_k = \frac{k!(n-k)!}{n!} I_0 = \frac{k!(n-k)!}{n!}\frac{1}{n+1}$$

Finalement

$$\lim_{p\to\infty} P(N_p = k) = \frac{1}{n+1}$$

Exercice 3-28

Un rat de laboratoire est soumis à l'expérience suivante : il est enfermé dans une cage comportant quatre portes derrière chacune desquelles se trouve un beau morceau de gruyère. Trois des quatre portes sont munies d'un dispositif envoyant à l'animal une décharge électrique s'il essaie de les franchir. La quatrième laisse le passage libre.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre d'essais effectués par le rat jusqu'à ce qu'il trouve la bonne porte.

Déterminer la loi de X et son espérance dans chacun des cas suivants :

1) Le rat n'a aucune mémoire : il recommence ses tentatives sans tenir compte des échecs passés.

2) Le rat a une mémoire immédiate : il ne tient compte que de l'échec qui précède immédiatement sa nouvelle tentative.

3) Le rat a une bonne mémoire : il élimine les portes où il a échoué.

Solution :

1. Si le rat n'a aucune mémoire, les essais sont indépendants les uns des autres et la probabilité de succès à chaque essai vaut $p = \frac{1}{4}$.
Donc $X \hookrightarrow \mathcal{G}(\frac{1}{4})$ et $E(X) = \dfrac{1}{p} = 4$, $V(X) = \dfrac{q}{p^2} = 12$.

2. $\star$ La probabilité de réussir au premier essai vaut $\dfrac{1}{4}$ et ensuite (s'il existe une suite) la probabilité de réussir à un essai quelconque vaut $\dfrac{1}{3}$ tandis que

la probabilité d'échouer vaut $\frac{2}{3}$ (puisqu'il élimine la porte qu'il a testée juste avant).

Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$P(X = 1) = \frac{1}{4}$;

$\forall\, k \geq 2, P(X = k) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ (valable pour $k = 2$).

$\star$ La convergence de la série écrite étant banale, X admet une espérance qui est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

D'où : $E(X) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{13}{4}$

3. On a ici $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et en notant E_i l'événement « le $i^{\text{ème}}$ essai est un échec » :

$P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(X = 2) = P(E_1).P(\overline{E_2}/E_1) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$

$P(X = 3) = P(E_1).P(E_2/E_1)P(\overline{E_3}/E_1 \cap E_2) = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, donc, par passage au complémentaire $P(X = 4) = \frac{1}{4}$.

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,4]\!])$ et $E(X) = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$.

Exercice 3-29

Soit n un entier naturel non nul. Tous les tableaux envisagés (type tab) sont des permutations de $[\![1,n]\!]$.

On considère la fonction T définie en Turbo-Pascal par :

```
Function T(a : tab) : integer ;
var i : integer ;
begin
  i := 1 ;
  while ( a[i] <> i ) and ( i < n+1 ) do i := i+1 ; T := i
end ;
```

1. Expliquer ce qu'est la fonction T.

On considère cette fonction comme une variable aléatoire sur l'univers S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$ muni de l'équiprobabilité.

2. Soit $r \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $P(T \leqslant r) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\frac{(n-k)!}{n!}$.

En déduire la valeur de $P(T = n+1)$.

3. a) Exprimer $E(T)$ en fonction de n et des nombres $P(T \leqslant r)$, avec $2 \leqslant r \leqslant n$.

b) Établir, pour $k \leqslant n$, la relation : $\sum_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$.

c) En déduire que : $E(T) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$.

d) Donner un équivalent simple de $E(T)$, lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. La fonction T associe à toute permutation de $[\![1,n]\!]$ son premier point fixe, s'il en existe un, et $(n+1)$ sinon.

2. Notons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $F_i = \{a \in S_n \mid a(i) = i\}$. Alors, par la formule du crible, pour tout $r \in [\![1,n]\!]$:

$$P(T \leq r) = P\Big(a \in \bigcup_i F_i\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}\Big(\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_k\leq r} P(a \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k})\Big)$$

Or :

$$P(a \in F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k}) = \frac{\operatorname{card}(F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_k})}{\operatorname{card}(S_n)} = \frac{(n-k)!}{n!}$$

et comme il y a C_r^k façons de choisir le k-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ il vient :

$$P(T \leq r) = \sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1}C_r^k\frac{(n-k)!}{n!}$$

Enfin :

$$P(T = n+1) = 1 - p(T \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

3. a) On sait que $P(T=1) = P(T \leq 1) = \dfrac{1}{n}$ et que $P(T = n+1) = 1 - P(T \leq n)$. Donc :

$$E(T) = \frac{1}{n} + \sum_{i=2}^{n} i(P(T \leq i) - P(T \leq i-1)) + (n+1)(1 - P(T \leq n)$$

Par télescopage, il vient :

$$E(T) = (n+1) + \frac{1}{n} - 2P(T \leq 1) - \sum_{i=2}^{n} P(T \leq i) = (n+1) - \sum_{i=1}^{n} P(T \leq i)$$

b) On démontre par récurrence que : $\sum_{r=k}^{n} C_r^k = C_{n+1}^{k+1}$ (en fait c'est dans le cours...)

c) Ainsi :

$$\begin{aligned}
E(T) &= (n+1) - \sum_{r=1}^{n} P(T \leq r) = (n+1) - \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{k-1} C_r^k \frac{(n-k)!}{n!} \\
&= (n+1) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{r=k}^{n} C_r^k \\
&= (n+1) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(n-k)!}{n!} C_{n+1}^{k+1} \\
&= (n+1) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\frac{n+1}{(k+1)!} = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

d) Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!} = 1 - \mathrm{e}^{-1}$, il résulte que $E(T)$ est équivalent à $n\Big(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\Big)$.

Exercice 3-30

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi exponentielle de paramètre 1.

On pose, pour $n \geqslant 1$, $Y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler l'expression d'une densité f_n de Y_n, ainsi que l'espérance et la variance de Y_n.

2. On note Y_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à Y_n.

a) Déterminer une densité φ_n de Y_n^* .

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(On admettra la formule de Stirling : $n! \underset{(n\to\infty)}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$).

c) Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\varphi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$

Solution :

1. On sait que la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ suit une loi $\Gamma(1, n)$. Une densité est :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et l'espérance et la variance valent n.

2. a) Y_n^* est définie par $Y_n^* = \dfrac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$. Ainsi, pour tout x réel :

$$P(Y_n^* \leq x) = P(Y_n \leq n + x\sqrt{n})$$

ce qui permet de définir une densité de Y_n^* :

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}\dfrac{e^{-n-x\sqrt{n}}(n + x\sqrt{n})^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \geq -\sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Pour tout $x \geq -\sqrt{n}$:

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}.e^{-n} n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x\sqrt{n}} \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)^{n-1}$$

ou

$$\varphi_n(x) = \frac{\sqrt{n}.e^{-n} n^n}{n!} \exp\Big(- x\sqrt{n} + (n-1)\ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Soit x fixé. Lorsque n tend vers l'infini, on peut considérer que $x > -\sqrt{n}$ et donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}.e^{-n} n^n}{n!} \exp\Big(- x\sqrt{n} + (n-1)\ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big)\Big)$$

Or :

$$\begin{aligned} -x\sqrt{n} + (n-1)\ln\Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big) &= -x\sqrt{n} + (n-1)\Big[\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big] \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(1) \end{aligned}$$

D'après la formule de Stirling :

$$\frac{\sqrt{n}.e^{-n} n^n}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et donc, pour tout x réel :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

c) D'après le théorème de la limite centrée, (Y_n^*) converge en loi vers une variable suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, ce qui se traduit par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \varphi_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

Exercice 3-31

Soit n un entier naturel, supérieur ou égal à 2. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un n-uplet de réels, on appelle réarrangement de $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le n-uplet $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots, \widehat{x_n})$ tel que :

$\star$ $\widehat{x_1} \leq \widehat{x_2} \leq \ldots \leq \widehat{x_n}$;

$\star$ il existe une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que pour tout $i, \widehat{x}_i = x_{\sigma(i)}$.

On notera $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \ldots, \widehat{x_n}) = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs réelles, indépendantes et de même loi.
On s'intéresse aux n variables aléatoires rangées

$$(\widehat{X_1}, \widehat{X_2}, \ldots, \widehat{X_n}) = R(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

définies pour tout $\omega \in \Omega$, par :

$$\big(\widehat{X_1}(\omega), \widehat{X_2}(\omega), \ldots, \widehat{X_n}(\omega)\big) = R\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\big)$$

1. Soit $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$ fixés.

a) Exprimer l'événement $(\widehat{X_r} \leq x)$ en fonction des événements $(X_i \leq x)$ ou de leurs complémentaires, i décrivant $[\![1, n]\!]$.

b) En déduire l'expression de la fonction de répartition F_r de $\widehat{X_r}$ en fonction de la fonction de répartition F des variables aléatoires X_i.

2. On suppose que F admet une dérivée continue f. Montrer qu'une densité de $\widehat{X_r}$ est donnée par :

$$f_r(x) = nC_{n-1}^{r-1}\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1 - F(x)\big)^{n-r} f(x)$$

3. On suppose que la loi commune des variables aléatoires X_i est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans le cas où $n = 2p + 1$, calculer une densité de la variable aléatoire médiane $\widehat{X}_{p+1}$ et son espérance.

Solution :

1. a) $(\widehat{X_r} \leq x)$ est réalisé si au moins r des n variables $X_1, \ldots, X_n$ prennent des valeurs inférieures ou égales à x. Ce que l'on peut écrire :

$$(\widehat{X_r} \leq x) = \bigcup_{k=r}^{n} B_k$$

où :

$B_k = \bigcup \big[(X_{i_1} \leq x) \cap (X_{i_2} \leq x) \ldots \cap (X_{i_k} \leq x) \cap (X_{i_{k+1}} > x) \ldots \cap (X_{i_n} > x)\big]$
La réunion étant étendue à tous les k-uplets $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ de $[1, n]\!]$, les indices $i_{k+1} < \cdots < i_n$ désignant les autres éléments de $[\![1, n]\!]$.

b) En clair B_k est réalisé si k des n variables X_i prennent une valeur inférieure ou égale à x, les autres prenant une valeur supérieure à x.

Par indépendance, on a donc $P(B_k) = C_n^k[F(x)]^k.[1-F(x)]^{n-k}$.

Puis, par incompatibilité :

$$P(\widehat{X_r} \leq x) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k[F(x)]^k.[1-F(x)]^{n-k}$$

2. La dérivée de $g : t \mapsto \sum\limits_{k=r}^{n} C_n^k t^k(1-t)^{n-k}$ est :

$$g'(t) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k\, k.t^{k-1}(1-t)^{n-k} - \sum_{k=r}^{n} C_n^k\,(n-k)t^k(1-t)^{n-k-1}$$

(avec l'abus d'écriture habituel, pour le terme d'indice n de la seconde somme, consistant à écrire que la dérivée de $t \mapsto t^0$ est $t \mapsto 0.t^{-1}$)

Or $(n-k)C_n^k = nC_{n-1}^{n-k-1} = nC_{n-1}^k$ et $k.C_n^k = n.C_{n-1}^{k-1}$, ce qui permet d'écrire :

$$g'(t) = n\sum_{k=r}^{n} \left[C_{n-1}^{k-1}t^{k-1}(1-t)^{n-k} - C_{n-1}^{k}t^k(1-t)^{n-k-1}\right]$$

Par simplifications en cascade, il reste : $g'(t) = nC_{n-1}^{r-1}t^{r-1}(1-t)^{n-r}$.

Comme $P(\widehat{X_r} \leq x) = g\big(F(x)\big)$, il vient, par composition :

$$f_r(x) = \frac{d}{dx}\big(P(\widehat{X_r} \leq x)\big) = nC_{n-1}^{r-1}\big(F(x)\big)^{r-1}\big(1-F(x)\big)^{n-r}.f(x)$$

3. On a ici :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ et } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\star$ Ainsi, une densité de $\widehat{X_{p+1}}$ est :

$$f_{p+1} : x \mapsto \begin{cases} (2p+1)C_{2p}^p x^p(1-x)^p & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On en déduit que $E(\widehat{X_{p+1}}) = (2p+1)C_{2p}^p \displaystyle\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^p\,dx$.

Par intégration par parties, on obtient classiquement :

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}, \int_0^1 t^\alpha(1-t)^\beta\,dt = \frac{\alpha!\beta!}{(\alpha+\beta+1)!}$$

D'où :

$$E(\widehat{X_{p+1}}) = (2p+1)\frac{(2p)!}{p!p!}\cdot\frac{(p+1)!p!}{(2p+2)!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 3-32

Soient X et Y deux variables aléatoires à densité, indépendantes, de densités respectives f et g nulles hors de l'intervalle $[0,1]$.

1. a) Déterminer une densité de $1-Y$.

   b) Déterminer une densité de $\ln X$.

c) Montrer qu'une densité de $Z = X(1-Y)$ est nulle hors de $[0,1]$ et est définie sur l'intervalle $]0,1[$ par :

$$x \mapsto \int_x^1 f\left(\frac{x}{t}\right) g(1-t)\frac{dt}{t}$$

(on pourra commencer par déterminer une densité de $\ln Z = \ln X + \ln(1-Y)$).

2. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, de même loi à valeurs dans $[0,1]$.

A tout $\omega \in \Omega$, on associe l'intervalle $\left[\prod_{i=1}^{n+1} X_i(\omega), \prod_{i=1}^{n} X_i(\omega)\right]$ de longueur $L_n(\omega)$.

Montrer que pour tout $n \geq 2, L_n = X_1.Y_n$, où Y_n est une variable aléatoire de même loi que L_{n-1} et indépendante de X_1.

3. On suppose que les variables (X_n) suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de L_1 ainsi que l'espérance de L_n.

Solution :

1. a) $P(1-Y \leq t) = P(Y \geq 1-t) = 1 - P(Y \leq 1-t)$. Donc, par dérivation, une densité f_{1-Y} de $1-Y$ est :

$$f_{1-Y}(t) = f_Y(1-t) = g(1-t) \text{ (pour } 0 < t < 1, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

b) De même : $P(\ln X \leq t) = P(X \leq \mathrm{e}^t) = F_X(\mathrm{e}^t)$, et :

$$f_{\ln X}(t) = \mathrm{e}^t.f_X(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t.f(\mathrm{e}^t) \text{ (pour } t < 0, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

Ainsi, on a également :

$$f_{\ln(1-Y)}(t) = \mathrm{e}^t.f_Y(1-\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t.g(1-\mathrm{e}^t) \text{ (pour } t < 0, \text{ et } 0 \text{ sinon)}$$

c) Par conséquent, une densité de $\ln Z = \ln X + \ln(1-Y)$ est définie par convolution (les variables $\ln X$ et $\ln(1-Y)$ sont indépendantes), par :

$$f_{\ln Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln X}(x-t) f_{\ln(1-Y)}(t)\, dt$$

Si $x \geq 0$, on a $f_{\ln Z}(x) = 0$ (Z ne prend que des valeurs négatives) ;

Si $x < 0$, on a donc : $f_{\ln Z}(t) = \displaystyle\int_x^0 \mathrm{e}^{x-t} f(\mathrm{e}^{x-t}).\mathrm{e}^t g(1-\mathrm{e}^t)\, dt$, *i.e.* :

$$f_{\ln Z}(x) = \mathrm{e}^x \int_x^0 f(\mathrm{e}^x \mathrm{e}^{-t}) g(1-\mathrm{e}^t)\, dt = \mathrm{e}^x \int_{\mathrm{e}^x}^1 f(\frac{\mathrm{e}^x}{u}) g(1-u)\frac{du}{u}$$

(grce au changement de variable $u = \mathrm{e}^t$)

Enfin, pour $x \in]0,1[$, $P(Z \leq x) = P(\ln Z \leq \ln x) = F_{\ln Z}(\ln x)$ donne :

$$f_{\ln Z}(x) = \frac{1}{x} f_{\ln Z}(\ln x) = \int_x^1 f(\frac{x}{u}) g(1-u)\frac{du}{u}$$

2. $L_n(\omega) = \big(1 - X_{n+1}(\omega)\big) \prod_{i=1}^{n} X_i(\omega) = X_1(\omega).Y_n(\omega)$, avec :

$$Y_n(\omega) = \big(1 - X_{n+1}(\omega)\big) \prod_{i=2}^{n} X_i(\omega)$$

$\star$ Y_n n'est fonction que de $X_2, \ldots, X_{n+1}$, donc est indépendante de X_1.

$\star$ Par simple décalage, Y_n suit la même loi que L_{n-1}.

3. $\star$ La loi de $L_1 = X_1(1 - X_2)$ est donnée directement par la question 1. (les fonctions f et g valant 1 sur $[0, 1]$) :

$$\forall\, x \in \,]0, 1],\, f_{L_1}(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t} = -\ln x$$

$\star$ Par indépendance, on a :

$$E(L_n) = E(X_1 Y_n) = E(X_1)E(Y_n) = E(X_1)E(L_{n-1})$$

Comme $E(X_1) = \frac{1}{2}$, on obtient donc $E(L_n) = \frac{1}{2}\, E(L_{n-1})$.

Or $E(L_1) = E\big(X_1(1 - X_2)\big) = E(X_1)E(1 - X_2) = \frac{1}{4}$, d'où par récurrence :

$$E(L_n) = \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n+1}$$

Exercice 3-33

Soit T une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et a un nombre réel strictement positif. On pose $X = |T| + a$, où $|T|$ est la valeur absolue de T.

1. Déterminer la fonction de répartition F de X, en fonction de celle Φ de T.

2. En déduire une densité f_a de X.

3. Montrer que X admet des moments de tous ordres. Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Solution :

1. On a $X(\Omega) = [a, +\infty[$ et $\forall\, x \geq a$:

$$F(x) = P(X \leq x) = P(|T| \leq x - a) = 2\Phi(x - a) - 1$$

où Φ désigne la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

2. Par dérivation, une densité f_a de X est donc la fonction définie par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-a)^2/2} & \text{si } x > a \end{cases}$$

3. La fonction f_a est négligeable devant toute puissance de x, ce qui signifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2.x^n f_a(x) = 0$ et montre, par référence classique, que

$\displaystyle\int_a^{+\infty} x^n f_a(x)\,dx$ converge. La variable X admet des moments de tous ordres.

$\star$ $E(X-a) = E(|T|) = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} t.\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}$, d'où :

$$E(X) = a + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

$\star$ $E\big((X-a)^2\big) = E(T^2) = V(T) = 1$ (car $T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$). D'où :

$$V(X) = V(X-a) = E\big((X-a)^2\big) - [E(X-a)]^2 = \frac{\pi-2}{\pi}$$

Exercice 3-34

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On considère des variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ et de fonction de répartition F. On pose :

$$U_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\} \text{ et } V_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F_n (resp. G_n) de la variable U_n (resp. V_n).

2. Soient a un nombre réel et b un réel strictement positif. On définit les variables Y_n et Z_n en posant :

$$Y_n = a + bnF(U_n) \quad \text{et} \quad Z_n = a + bn(1 - F(V_n))$$

a) Déterminer la fonction de répartition H_n (resp. L_n) de Y_n (resp. Z_n). Que constatez-vous ?

b) Pour x fixé, déterminer la limite de $H_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini.

3. Reprendre les questions précédentes en supposant que les variables aléatoires indépendantes $X_1, \ldots, X_n$ suivent toutes une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ de fonction de répartition F. Que remarquez-vous ?

Solution :

1. $\star$ Par indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, on a :

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(U_n \leq x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P(X_1 \geq x)\ldots P(X_n \geq x) \\ &= 1 - \big(1 - F(x)\big)^n \end{aligned}$$

Donc : $F_n(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-n\lambda x}$, si $x > 0$.

Par conséquent, $U_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

$\star$ $G_n(x) = P(V_n \leq x) = P(X_1 \leq x)\ldots P(X_n \leq x) = \big(F(x)\big)^n$

Donc : $G_n(x) = 0$, si $x \leq 0$ et $G_n(x) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})^n$, si $x > 0$.

2. a) $\star$ La variable aléatoire Y_n est à valeurs dans $[a, a+bn]$, et pour $x \in \,]a, a+bn[$, il vient :

$$H_n(x) = P(a + bnF(U_n) \leq x) = P[F(U_n) \leq \frac{x-a}{bn}]$$
$$= P[1 - \exp(-\lambda U_n) \leq \frac{x-a}{bn}] = P[U_n \leq -\frac{1}{\lambda} \ln\big(\frac{bn - x + a}{bn}\big)]$$
$$= 1 - \exp\big(n \ln(\frac{bn-x+a}{bn})\big) = 1 - \big(\frac{bn-x+a}{bn}\big)^n.$$

$\star$ La variable Z_n est aussi à valeurs dans $[a, a+bn]$, et pour $x \in]a, a+bn[$, il vient :

$$L_n(x) = P[a + bn(1 - F(V_n)) \leq x] = P(1 - F(V_n) \leq \frac{x-a}{bn})$$
$$= P(\exp(-\lambda V_n) \leq \frac{x-a}{bn}) = P(V_n \geq -\frac{1}{\lambda} \ln(\frac{x-a}{bn}))$$
$$= 1 - \big(1 - \exp(\ln(\frac{x-a}{n}))\big)^n = 1 - \big(1 - \frac{x-a}{bn}\big)^n = 1 - \big(\frac{bn-x+a}{bn}\big)^n$$

On constate que Y_n et Z_n suivent la même loi.

b) $\star$ Soit $x > a$, on peut écrire, pour n assez grand (de façon à avoir $x \leq a + bn$) :

$$\ln\big[\big(1 - \frac{x-a}{bn}\big)^n\big] = n \ln(1 - \frac{x-a}{bn}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{x-a}{b}.$$

D'où :

$$\text{si } x > a,\ \lim_{n\to\infty} H_n(x) = 1 - \exp\big(\frac{x-a}{b}\big)$$

et bien entendu, si $x \leq a$, alors la limite est nulle.

3. On a maintenant :

$$\star\ F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - (1-x)^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{et } G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^n & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Des calculs semblables à ceux que l'on vient de faire montrent que les variables Y_n et Z_n suivent encore la même loi que dans le cas précédent.
En fait, la loi des variables Y_n et Z_n est indépendante de F.

Exercice 3-35

1. On considère une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

a) Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

b) On définit la variable aléatoire X_1 par $X_1 = \dfrac{1}{1+X}$.
Déterminer la fonction de répartition de X_1. En déduire une densité de X_1.

c) Soit n un entier naturel. Calculer l'espérance de X^n.

/quad d) Montrer que $E(X_1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n E(X^n)$.

(on admettra que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{k+1}}{k}$, pour tout $|x| < 1$).

2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, p).

a) Rappeler l'espérance et la variance de Y.

b) Calculer l'espérance $m_n(p)$ de la variable aléatoire Y_1 définie par $Y_1 = \dfrac{1}{1+Y}$.

c) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la limite de la suite $(m_n(p))$ lorsque n tend vers l'infini avec np tendant vers λ.

3. On considère deux variables aléatoires Z_1 et Z_2 suivant la même loi binomiale de paramètres (n, p).

a) Donner la loi de $Z_1 + Z_2$.

b) Soient $i \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, 2n]\!]$. Calculer la probabilité conditionnelle $P(Z_1 = i \mid Z_1 + Z_2 = k)$.

Solution :

1. a) On sait que $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/12$.

b) Soit x réel. Alors

$$F_{X_1}(x) = P(X_1 \leq x) = P\Big(\frac{1}{1+X} \leq x\Big)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1/2 \\ P(X \geq \dfrac{1-x}{x}) = 1 - F_X\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = 2 - \dfrac{1}{x} & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Une densité de X_1 est alors donnée par :

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [1/2, 1] \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi :

$$E(X_1) = \int_{1/2}^{1} \frac{dt}{t} = \ln 2$$

c) Par le théorème de transfert, on trouve :

$$E(X^n) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

et, en admettant la décomposition en série de $\ln(1+x)$, pour $|x| < 1$,

$$E(X_1) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n E(X^n) = \ln 2$$

2. a) On sait que $E(Y) = np$ et $V(Y) = np(1-p)$.

b) Toujours par le théorème de transfert :

$$m_n(p) = E(Y_1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k p^k q^{n-k}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k p^k q^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} \frac{1}{p} \int_0^p t^k dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^p \Big(\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} t^k \Big) dt \\
&= \frac{1}{p} \int_0^p (t+q)^n dt = \frac{1-q^{n+1}}{p(n+1)}
\end{aligned}$$

c) On a :

$$m_n(p) = \frac{1-(1-p)^n}{p(n+1)} = \frac{1-\mathrm{e}^{n\ln(1-p)}}{np(1+\frac{1}{n})}$$

Or :

$$n\ln(1-p) = n\ln(1-\frac{np}{n}) \sim -\lambda \text{ (quand } n \to +\infty)$$

Donc $\lim m_n(p) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$.

3. a) On sait par le cours que $Z_1 + Z_2$ suit la loi binomiale de paramètres $(2n, p)$.

b) Enfin :

$$\begin{aligned}
P(Z_1 = i \mid Z_1 + Z_2 = k) &= \frac{P(Z_1 = i \cap Z_2 = k-i)}{P(Z_1 + Z_2 = k)} \\
&= \frac{P(Z_1 = i)P(Z_2 = k-i)}{P(Z_1 + Z_2 = k)} \\
&= \frac{C_n^i p^i q^{n-i} C_n^{k-i} p^{k-i} q^{n-k+i}}{C_{2n}^k p^k q^{2n-k}} \\
&= \frac{C_n^i C_n^{k-i}}{C_{2n}^k}
\end{aligned}$$