3

PROBABILITÉS

Exercice 3.1.

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur ; n personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X dans les cas suivants :

a) dans le cas $p = 2$ et $n \geqslant 2$;

b) dans le cas $n = 2$ et $p \geqslant 2$.

2. On revient au cas général.

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$ et $1 \leqslant j \leqslant n$, on note $Y_{i,j}$ la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le $j^{\text{ème}}$ passager descend au $i^{\text{ème}}$ étage et la valeur 0 sinon.

Pour $1 \leqslant i \leqslant p$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'ascenseur s'arrête au $i^{\text{ème}}$ étage et la valeur 0 sinon.

a) Déterminer les lois des variables $Y_{i,j}$ et X_i .

b) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

c) Calculer la probabilité $P(X = 1)$.

d) On note S_a^b le nombre de surjections d'un ensemble de cardinal a sur un ensemble de cardinal b. Donner la loi de X en fonction des nombres S_a^b.

e) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=1}^{\min(n,p)} \mathrm{C}_{p-1}^{k-1} S_n^k = p^n - (p-1)^n$.

Solution :

1. a) Dans le cas où $p=2$ et $n\geqslant 2$, on a $X(\Omega)=\{1,2\}$. L'événement $(X=1)$ correspond au fait que les n personnes descendent au même étage, et il n'y a que deux étages. Donc :

$$P(X=1)=2\big(\frac{1}{2}\big)^n=\frac{1}{2^{n-1}},\quad P(X=2)=1-P(X=1)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Un calcul immédiat donne :

$$E(X)=2-\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1},\qquad V(X)=\big(\frac{1}{2}\big)^{n-1}-\big(\frac{1}{2}\big)^{2n-2}$$

b) Dans le cas où $p\geqslant 2$ et $n=2$, on a $X(\Omega)=\{1,2\}$. L'événement $(X=1)$ correspond au fait que les 2 personnes descendent au même étage, et il y a p étages. Donc

$$P(X=1)=p\big(\frac{1}{p}\big)^2=\frac{1}{p},\quad P(X=2)=1-P(X=1)=\frac{p-1}{p}$$

Un calcul immédiat donne :

$$E(X)=\frac{2p-1}{p},\qquad V(X)=\frac{p-1}{p^2}$$

2. a) La variable aléatoire $Y_{i,j}$ suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(\frac{1}{p}\big)$, et à i fixé, les variables $Y_{i,j}$ $(j\in[\![1,n]\!])$ sont indépendantes. Ainsi :

$$P(X_i=0)=P\big(\bigcap_{j=1}^{n}(Y_{i,j}=0)\big)=\big(\frac{p-1}{p}\big)^n$$

Aussi, X_i suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\big(1-\big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big)$.

b) On sait que $X=\sum\limits_{i=1}^{p}X_i$. Donc

$$E(X)=\sum_{i=1}^{p}E(X_i)=p\big(1-\big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big)$$

et

$$V(X)=\sum_{i=1}^{p}V(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant p}\mathrm{Cov}(X_i,X_k)$$

La variable X_iX_k suit une loi de Bernoulli. Calculons son paramètre :

$$P(X_iX_k=0)=P(X_i=0)+P(X_k=0)-P(X_i=0\cap X_k=0)$$

avec

$$P(X_i=0\cap X_k=0)=P\big(\bigcap_{j=1}^{n}(Y_{i,j}=0)\cap(Y_{i,k}=0)\big)=\big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

Donc :

$$P(X_iX_k=0)=2\big(\frac{p-1}{p}\big)^n-\big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

Ainsi :

$$E(X_iX_k)=P(X_iX_k=1)=1-2\big(\frac{p-1}{p}\big)^n-\big(\frac{p-2}{p}\big)^n$$

et

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_k) = 1 - 2\big(\frac{p-1}{p}\big)^n - \big(\frac{p-2}{p}\big)^n - \big[1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big]^2$$

On termine le calcul et il vient :

$$V(X) = \frac{p^{n-1}(p-1)^n - (p-1)^{2n} + p^{n-1}(p-1)(p-2)^n}{p^{2n-2}}$$

c) Un raisonnement identique à celui de la première question donne :

$$P(X=1) = p\big(\frac{1}{p}\big)^n = \big(\frac{1}{p}\big)^{n-1}.$$

d) On sait que $X(\Omega) = [\![1, \min(n,p)]\!]$. Pour obtenir l'événement $(X = k)$, on doit choisir k étages parmi les p possibles, puis l'une des S_n^k surjections des n personnes sur ces k étages. Ainsi :

$$P(X=k) = \frac{\binom{p}{k} S_n^k}{p^n}$$

e) Comme

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\min(n,p)} \frac{k\binom{p}{k} S_n^k}{p^n} = p\big(1 - \big(\frac{p-1}{p}\big)^n\big)$$

et comme $k\dbinom{p}{k} = p\dbinom{p-1}{k-1}$, il vient finalement :

$$\sum_{k=1}^{\min(n,p)} \binom{p-1}{k-1} S_n^k = p^n - (p-1)^n$$

Exercice 3.2.

Soient N et X deux variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω, telles que $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$, et que pour $k \in N(\Omega)$, la loi conditionnelle de X sachant $(N = k)$ est la loi uniforme sur $\{0, 1, ..., k\}$.

On note, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(N = k)$.

1. a) Déterminer la loi du couple (X, N) en fonction de la loi de N.

b) Donner, sous la forme d'une somme faisant intervenir les p_k, la probabilité $P(X = i)$, pour $i \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $(N - X)(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et que $N - X$ suit la même loi que X.

2. On suppose dans cette question qu'il existe $n \geqslant 2$ vérifiant $\forall k \geqslant n+1, p_k = 0$ et $\forall k \leqslant n, p_k > 0$.

a) Justifier l'existence des espérances et variances de N et de X et de la covariance de N et X.

b) Trouver une relation entre $E(N)$ et $E(X)$, puis entre $V(N)$ et $\mathrm{Cov}(N, X)$.

c) Calculer $\mathrm{Cov}(N, N - 2X)$. Les variables N et $N - 2X$ sont-elles indépendantes ?

3. On suppose dans cette question que $p_0 = p_1 = 0$ et $\forall k \geqslant 2, p_k = \dfrac{1}{k(k-1)}$.

a) Déterminer explicitement la loi du couple (X,N) et la loi de X.

b) Les variables X et N admettent-elles une espérance ?

c) Montrer que les espérances $E\big(\frac{1}{X+1}\big)$ et $E\big(\frac{1}{N+1}\big)$ existent et les calculer.

Solution :

1. a) Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on a :
$$P(X=i\cap N=k)=P(X=i/N=k)P(N=k)=\frac{p_k}{k+1}.$$
Sinon, $P(X=i\cap N=k)=0$.

b) Immédiatement, pour tout $i\in\mathbb{N}$:
$$P(X=i)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=i\cap N=k)=\sum_{k=i}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}$$

c) Comme $P(X-N<0)=0$, on peut dire que $(N-X)(\Omega)\subset\mathbb{N}$. Enfin, pour tout $i\in\mathbb{N}$:
$$P(N-X=i)=\sum_{k=i}^{\infty}P(N=k\cap X=k-i)=\sum_{k=i}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}=P(X=i)$$
Ainsi, X et $N-X$ suivent la même loi.

2. a) Les variables aléatoires N et X prennent un nombre fini de valeurs, ce qui assure l'existence de leurs moments.

b) De plus
$$E(N-X)=E(X)\implies E(N)=2E(X)$$
$$V(N-X)=V(X)\implies V(N)=2\,\mathrm{Cov}(N,X)$$

c) On a $\mathrm{Cov}(N,N-2X)=V(N)-2\,\mathrm{Cov}(N,X)=0$.
et
$$P(N=1)=p_1>0,\quad P(N-2X=2)\geqslant P(X=0\cap N=2)=\frac{p_2}{3}>0$$
Comme $(N=1)\cap(N-2X=2)$ est impossible, il vient :
$$0=P(N=1\cap N-2X=2)\neq P(N=1)P(N-2X=2).$$
Les variables aléatoires N et $N-2X$ ne sont pas indépendantes.

3. a) Pour $i\in[\![0,k]\!]$ et $k\geqslant 2$, on a :
$P(X=i\cap N=k)=\dfrac{1}{(k-1)k(k+1)}=\dfrac{1/2}{k-1}-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1/2}{k+1}$, ou mieux :
$$P(X=i\cap N=k)=\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(k-1)k}-\frac{1}{k(k+1)}\Big)$$
Sinon, $P(X=i\cap N=k)=0$.
On a, par télescopage :
$$P(X=0)=P(X=1)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{4}$$

et pour tout $i \geqslant 2$:

$$P(X=i)=\sum_{k=i}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k(k+1)}=\frac{1}{2(i-1)i}$$

b) La série harmonique étant divergente, les variables aléatoires N et X n'ont pas d'espérance.

c) Comme $\dfrac{1}{(n-1)n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^3}$, les variables aléatoires $\dfrac{1}{X+1}$ et $\dfrac{1}{N+1}$ admettent une espérance, et :

$$E\big(\frac{1}{X+1}\big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{2(i-1)i(i+1)}=\frac{1}{2}$$

$$E\big(\frac{1}{N+1}\big)=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(i-1)i(i+1)}=\frac{1}{4}.$$

Exercice 3.3.

On considère une urne contenant des boules jaunes, noires et bleues en proportions p, q et r respectivement. On effectue dans cette urne des tirages successifs d'une boule avec remise jusqu'à obtention pour la deuxième fois d'une boule bleue. On note X le nombre de tirages effectués et Y le nombre de boules jaunes obtenues lors de cette série de tirages.

1. Montrer que la probabilité de n'obtenir qu'au plus une boule bleue au cours d'une infinité de tirages est nulle. Qu'en déduit-on ?
Préciser la loi de X.

2. Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel a vérifiant $|a|<1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n}{n}a^k=\frac{1}{(1-a)^{n+1}}.$$

(On pourra être amené à calculer $\lim\limits_{N\to\infty}(1-a)\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k$.)

3. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y), en déduire la loi de Y.

4. Ecrire un programme Pascal permettant de simuler cette expérience et donnant X et Y.
(On pourra utiliser la fonction `random` qui renvoie une valeur réelle au hasard entre 0 et 1.)

Solution :

1. Notons A_0 l'événement « ne pas obtenir de boule bleue », pour tout $k \geqslant 1$, A_k l'événement « obtenir une première boule bleue au k-ième tirage », et A l'événement « obtenir au plus une boule bleue ».

On peut écrire $A=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}A_k$, cette réunion étant disjointe. On a donc :

$$P(A)=\sum_{k=0}^{\infty}P(A_k)$$

Pour tout $k\geqslant 1$, soit B_k l'événement «ne pas obtenir de boule bleue avant le k-ième tirage». La suite (B_k) est décroissante et $A_0=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k$. Ainsi :

$$P(A_0)=P\big(\bigcap_{k=1}^{\infty}B_k\big)=\lim_{k\to+\infty}P(B_k)=\lim_{k\to+\infty}\big(\frac{p+q}{p+q+r}\big)^k=0.$$

Le raisonnement pour tout A_k (avec $k\geqslant 1$) est identique. Ainsi, pour tout $k\geqslant 0, P(A_k)=0$ et $P(A)=0$.

On en déduit que X est une variable aléatoire, avec $X(\Omega)=[\![2,+\infty[\![$, et pour tout $k\geqslant 2$:

$$P(X=k)=(k-1)r^2(p+q)^{k-2}$$

2. Effectuons une démonstration par récurrence sur n.

- pour $n=0$, on a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a^k=\dfrac{1}{1-a}$.
- supposons le résultat vérifié pour un certain rang n. Alors :

$$S=(1-a)\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k=\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k-\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^{k+1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}\left(\binom{k+n+1}{n+1}-\binom{k+n}{n+1}\right)a^k+\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}\binom{k+n}{n}a^k+\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

$$S=\sum_{k=0}^{N}\binom{k+n}{n}a^k+\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{k+n}{n}a^k=\dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$ par l'hypothèse de récurrence et

$$\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}\sim\frac{(N+1)^k}{k!}a^{N+1}\implies\lim_{N\to+\infty}\binom{k+N+1}{N+1}a^{N+1}=0$$

Donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-a)\sum\limits_{k=0}^{N}\binom{k+n+1}{n+1}a^k=\dfrac{1}{(1-a)^{n+1}}$ donne

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n+1}{n+1}a^k=\frac{1}{(1-a)^{n+2}}$$

Ce qui est bien le résultat attendu au rang $n+1$.

3. • si $\ell\geqslant k-1$, on a $P(X=k\cap Y=\ell)=0$.

- si $\ell\leqslant k-2$, on a $P(X=k\cap Y=\ell)=(k-1)r^2\binom{k-2}{\ell}p^\ell q^{k-2-\ell}$.

Le coefficient $(k-1)$ correspond à l'emplacement de la première boule bleue, r^2 est la probabilité d'obtenir 2 boules bleues à des rangs donnés,

$\binom{k-2}{\ell} p^\ell q^{k-2-\ell}$ est la probabilité que les places restantes soit occupées par des boules jaunes et noires en nombres adéquats.

Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, il vient, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(Y=\ell) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} P(X=k \cap Y=\ell) = \sum_{k=\ell+2}^{\infty} (k-1) r^2 \binom{k-2}{\ell} p^\ell q^{k-2-\ell} \\ &= r^2 p^\ell \sum_{k=\ell+2}^{\infty} (\ell+1) \binom{k-1}{\ell+1} q^{k-2-\ell} \\ &= r^2 p^\ell (\ell+1) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+\ell+1}{\ell+1} q^k = (1+\ell) \frac{r^2 p^\ell}{(1-q)^{\ell+2}} \end{aligned}$$

4. Une proposition de programme

```
Program bleu
Var x,y : integer ;
  p,q,a : real ;
Begin
readln(p,q) ;
randomize ;
x :=0 ; y := 0 ;
repeat
  a := random
  If a>= 1-q then y := y+1 ;
  x := x+1 ;
until a <= p ;
writeln(x,y) ;
readln
end.
```

Exercice 3.4.

1. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une loi géométrique de paramètre p, avec $0 < p < 1$.

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général u_n où :

$$u_n = \frac{P(X > n)}{P(X = n)}$$

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant une loi de Poisson de paramètre k, avec $k > 0$. Étudier la convergence et déterminer

la limite éventuelle de la suite de terme général u_n où :

$$u_n = \frac{P(Y > n)}{P(Y = n)}$$

3. a) On pose $w_n = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{j^2}$.

Déterminer un équivalent de w_n de la forme $\dfrac{C}{n^\alpha}$, où C et α sont deux constantes que l'on calculera.

b) Déterminer une variable aléatoire Z à valeurs dans N^* telle que la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(Z>n)}{P(Z=n)}$ diverge vers l'infini.

4. Soit x un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Discuter l'existence d'une variable aléatoire T telle que la suite de terme général $u_n = \dfrac{P(T>n)}{P(T=n)}$ admette comme limite x.

Solution :

1. On sait que : $P(X > n) = p\sum\limits_{k=n}^{\infty} q^k = \dfrac{pq^n}{1-q} = q^n$ (on peut aussi se contenter de dire que, dans le modèle du temps d'attente d'un premier succès, $(X > n)$ est réalisé si et seulement si on commence par n échecs).

Donc :

$$\frac{P(X>n)}{P(X=n)} = \frac{q}{p}$$

2. On sait que

$$\begin{aligned}P(Y>n) &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-k}\frac{k^p}{p!} = \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(1+\frac{k}{n+2}+\frac{k^2}{(n+2)(n+3)}+\cdots\big)\\ &\leqslant \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{k}{n+2})^j\big) = \frac{k^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-k}\big(\frac{1}{1-\frac{k}{n+2}}\big)\end{aligned}$$

pour n tel que $n > k-2$, d'où :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{k}{n+1}\times\frac{n+2}{n+2-k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. a) En utilisant une comparaison série—intégrale, on peut écrire par décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$:

$$\int_n^{+\infty}\frac{dt}{t^2} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$$

soit :

$$\frac{1}{n} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{n-1}$$

Ainsi $w_n \sim \dfrac{1}{n}$.

b) Soit Z une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que pour tout $n \geqslant 1$

$$P(Z=n) = \frac{c}{n^2}$$

la constante c étant déterminée par le fait que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2} = 1$ (on peut savoir que $c = \frac{6}{\pi^2}$).

On a alors : $u_n \sim \frac{1/n}{c/n^2} = \frac{n}{c} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Si $x < 0$, c'est impossible, puisque l'on travaille avec des probabilités.
Si $x \geqslant 0$, c'est possible comme le montrent les questions précédentes, puisque, lorsque p décrit $]0,1[$, alors q/p décrit $]0,+\infty[$.

Exercice 3.5.

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|x|) & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

b) Determiner $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[-1,1]$ et Z une variable aléatoire à densité, indépendante de Y, telle que $X = Y + Z$. On note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x+1) - F_Z(x-1) = 2f(x)$.

b) Déterminer F_Z et en déduire la loi de Z.

3. Soient U et V deux variables à densité indépendantes de Y telles que les variables $Y + U$ et $Y + V$ suivent la même loi de densité g. On note F_U et F_V les fonctions de répartition de U et V et on pose $\Phi = F_U - F_V$.

a) Montrer que Φ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2-périodique, et étudier ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Conclure.

Solution :

1. a) On vérifie de façon immédiate que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et que $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt = 1$ (aire d'un triangle ...).

b) L'espérance $E(X)$ est nulle, car la variable X est bornée et la fonction f est paire. Un calcul simple donne $E(X^2) = V(X) = \frac{2}{3}$.

2. a) On sait, par le cours, que :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(x-t) f_Z(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_Z(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\big(F_Z(x+1) - F_Z(x-1)\big)$$

(car $-1 \leqslant x - t \leqslant 1 \iff x - 1 \leqslant t \leqslant x + 1$).

b) La relation précédente permet de dire que pour tout x réel :

$$F_Z(x) = F_Z(x-2) + 2f_Z(x-1)$$

et $-2 \leqslant x - 1 \leqslant 2 \iff -1 \leqslant x \leqslant 3$.

- si $x \leqslant -1$, $f_Z(x-1) = 0$, donc $F_Z(x) = F_Z(x-2)$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_Z(x) = F_Z(x-2n)$. Donc

$$F_Z(x) = \lim_{n\to+\infty} F_Z(x-2n) = 0$$

- si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $F_Z(x-2) = 0$ et $f(x-1) = \frac{1}{4}(2 + (x-1)) = \frac{x+1}{4}$.
- si $x \geqslant 1$, $F_Z(1) \leqslant F_Z(x) \leqslant 1$. Donc $F_Z(x) = 1$.

On voit donc que Z suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

3. a) On a de même, pour tout x réel

$$\begin{cases} F_U(x+1) - F_U(x-1) = 2g(x) \\ F_V(x+1) - F_V(x-1) = 2g(x) \end{cases}$$

Donc, pour tout réel x

$$\Phi(x+1) - \Phi(x-1) = 0$$

ce qui signifie que Φ est 2 périodique. Il est évident que Φ est continue, puisque F_U, F_V le sont. Enfin

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (F_U(x) - F_V(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (F_U(x) - F_V(x) = 0 \end{cases}$$

b) La fonction Φ étant 2-périodique, on obtient, pour tout réel x, par récurrence, que $\Phi(x) = \Phi(x-2n)$. Donc

$$\Phi(x) = \lim_{n\to+\infty} \Phi(x-2n) = 0$$

La fonction Φ est identiquement nulle, donc $F_U = F_V$. Les variables aléatoire U et V suivent la même loi.

Exercice 3.6.

Soit T une variable aléatoire positive définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, de fonction de répartition F et de densité f continue.

1. Montrer que pour tout $u > 0$:

$$\frac{1}{u}\, P(t < T < t + u \;/\; T > t) = \frac{1}{1 - F(t)} \times \frac{1}{u} \int_t^{t+u} f(s)\, ds$$

En déduire que :

$$\lim_{u\to0} \frac{1}{u}\, P(t < T < t + u \;/\; T > t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$$

On note désormais $h_T(t)$ cette limite.

2. On suppose dans cette question que T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Calculer $h_T(t)$.

b) On suppose que la fonction h_T est constante (pour tout $t, h(t) = C$). Montrer que T suit une loi exponentielle.

3. On suppose dans cette question que T_1, T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes, avec pour $i = 1, 2$, T_i suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda_i)$.
On pose $T = \sup(T_1, T_2)$.

a) Déterminer la loi de T.

b) Déterminer h_T en fonction de h_{T_1} et h_{T_2}.

c) Étudier les variations de h_T dans le cas où $\lambda_1 = \lambda_2$.

Solution :

1. On peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{u}P(t < T < t+u/T > t) &= \frac{1}{u}\times\frac{P((t < T < t+u) \cap (T > t))}{P(T > t)} \\ &= \frac{1}{u}\times\frac{P(t < T < t+u)}{P(T > t)} \\ &= \frac{1}{1-F(t)}\times\frac{1}{u}\int_t^{t+u} f(x)\,dx\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{1}{u}\int_t^{t+u} f(s)\,ds - f(t) = \frac{1}{u}\int_t^{t+u}\big(f(s) - f(t)\big)\,ds$$

La fonction f est continue en t :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 \text{ tel que } |s-t| < \delta \implies |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Choisissons u tel que $|u| < \delta$. Alors $t < s < t+u \implies 0 < s-t < \delta$ et

$$\left|\frac{1}{u}\int_t^{t+u}\big(f(s) - f(t)\big)\,ds\right| < \varepsilon$$

2. a) Si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, il vient immédiatement :

$$h_T(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)} = \lambda.$$

b) Réciproquement, supposons que $h_T(t) = \dfrac{f(t)}{1-F(t)} = C > 0$.

Comme $\dfrac{d}{dt}\big(1 - F(t)\big) = -f(t)$, il vient pour un certain $A \in \mathbb{R}$:

$$-\ln\big(1 - F(t)\big) = Ct + A, \text{ soit } 1 - F(t) = \mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^{-Ct}$$

Pour $t = 0$, on obtient $e^{-A} = 1$, donc

$$f(t) = C.\mathrm{e}^{-Ct}$$

ce qui signifie que X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(C)$.

3. Posons $T = \max(T_1, T_2)$. Alors :

a) $P(T \leqslant t) = P((T_1 \leqslant t) \cap (T_2 \leqslant t)) = P(T_1 \leqslant t)P(T_2 \leqslant t) = F_1(t)F_2(t)$. Donc

$$F(t) = P(T \leqslant t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda_1 t})(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_2 t})$$

b) Un calcul élémentaire donne :

$$h_T(t) = \frac{\lambda_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{e^{-\lambda_1 t} + \mathrm{e}^{-\lambda_2 t} - \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}$$

c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$,

$$h_T(t) = 2\lambda \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}{2 - \mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

Cette fonction est dérivable et :

$$h_T'(t) = 2\lambda \frac{\lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}}{(2 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^2}$$

La fonction h_T est donc croissante avec le temps t.

Exercice 3.7.

Soit X une variable aléatoire réelle à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ de fonction de répartition F. On dit que X est *symétrique* si pour tout intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \in -I) = P(X \in I)$$

où $-I = \{-x \ / \ x \in I\}$.

1. Montrer qu'une variable aléatoire X est symétrique si et seulement si pour tout x réel, $F(x) = 1 - F(-x)$.

Dans toute la suite X désigne une variable aléatoire symétrique.

2. Soit ε une variable aléatoire réelle, indépendante de X définie par :

$$P(\varepsilon = 1) = p, \quad P(\varepsilon = -1) = q = 1 - p, \text{ avec } 0 < p < 1$$

a) Montrer que X et $Y = \varepsilon X$ suivent la même loi.

b) On suppose que X admet un moment d'ordre 2. Calculer $E(XY)$, puis $\sigma(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Quand a–t–on $\sigma(X, Y) = 0$?

3. Pour tout ensemble A, on définit la variable aléatoire 1_A par :

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

On définit une variable aléatoire Z par :

$$Z = 1_{\{\omega \ / \ X(\omega) > 0\}} - 1_{\{\omega \ / \ X(\omega) < 0\}}$$

a) Déterminer la loi de Z.

b) Déterminer les lois des variables aléatoires X^2 et εX^2, puis calculer $\sigma(X, Z|X|)$.

Solution :

1. Si X est une variable aléatoire symétrique, prenons $I =]x, +\infty[$, ou $[x, +\infty[$. On a alors $-I =]-\infty, -x[$ ou $]-\infty, -x]$ et :

$$F(I) = P(X \in I) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X < x)$$
$$F(-I) = P(X \in -I) = P(X \leqslant -x)$$

Donc :

$$F(I) = F(-I) \Longleftrightarrow P(X \leqslant x) = 1 - P(X \leqslant -x), \text{ ou } F(x) = 1 - F(-x)$$

Réciproquement, supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}, F(x) = 1 - F(-x)$.

• si $I =]x, +\infty[$, alors $P(X \geqslant x) = P(X \leqslant -x)$ ou $F(I) = F(-I)$.

• si $I = [a, b]$, alors $F(I) = P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$ et $F(-I) = P(X \in [-b, -a]) = F(-a) - F(-b)$.
Mais $F(b) - F(a) = 1 - F(-b) - 1 + F(-a) = F(-a) - F(-b)$, d'où le résultat.

2. a) Pour tout a réel :

$$\begin{aligned} P(\varepsilon X \leqslant a) &= P((X \leqslant a) \cap (\varepsilon = 1)) + P((X \geqslant -a) \cap (\varepsilon = -1)) \\ &= pF(a) + qF(a) = F(a) = P(X \leqslant a) \end{aligned}$$

Donc X et εX ont même loi.

b) Calculons la loi de X^2. Evidemment, si $a \leqslant 0$, $P(X^2 \leqslant a) = 0$ et si $a > 0$:

$$P(X^2 \leqslant a) = P(-\sqrt{a} \leqslant X \leqslant \sqrt{a}) = F(\sqrt{a}) - F(-\sqrt{a}) = -1 + 2F(\sqrt{a})$$

Calculons la loi de εX^2.

$$P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = P((X^2 \leqslant a) \cap (\varepsilon = 1)) + P((X^2 \geqslant -a) \cap (\varepsilon = -1))$$

Donc

• si $a < 0$, $P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = 2q(1 - F(\sqrt{-a}))$

• si $a > 0$, $P(\varepsilon X^2 \leqslant a) = p(2F(\sqrt{a}) - 1) + q$

L'espérance de εX^2 est

$$\begin{aligned} E(\varepsilon X^2) &= 2q \int_{-\infty}^{0} \frac{t}{2\sqrt{-t}} f(\sqrt{-t})\, dt + 2p \int_{0}^{+\infty} \frac{t}{2\sqrt{t}} f(\sqrt{t})\, dt \\ &= -2q \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du + 2p \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du \\ &= 2(p - q) \int_{0}^{+\infty} u^2 f(u)\, du = (p - q) \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 f(u)\, du \\ &= (p - q) E(X^2) \end{aligned}$$

Ainsi, comme f est paire, $E(\varepsilon X) = 0$ et $\sigma(X,Y) = (p-q)E(X^2) = 0$ si et seulement si $p = q = 1/2$.

3. a) Comme $P(X = 0) = 0$, il vient
$$P(Z = 1) = P(X > 0) = P(-X < 0) = P(Z = -1)$$
Donc :
$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{2}$$

b) On a
$$Z|X| = |X|.1_{(X>0)} - |X|.1_{(X<0)} = X.1_{(X>0)} + X.1_{(X<0)} = X$$
Donc
$$E(Z|X|) = E(X) = 0 \text{ et } \sigma(X, Z|X|) = 0$$

Exercice 3.8.

On cherche à estimer le nombre d'étudiants en France connaissant la signification du sigle URSSAF. Pour cela, on interroge des étudiants. A chacun, on propose trois définitions différentes A, B et C, la réponse correcte étant la réponse A.
Soit θ la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la réponse correcte.
Tout étudiant connaissant la réponse correcte la donne, sinon il choisit au hasard une des trois réponses proposées.

1. a) Calculer les probabilités P_A, P_B et P_C qu'un étudiant interrogé donne respectivement les réponses A, B ou C. Exprimer θ en fonction de P_A.

b) Quelle est la probabilité qu'une personne ayant choisi la réponse A connaisse réellement la signification du sigle URSSAF ?

2. a) On veut faire une estimation du paramètre θ. Pour cela, on constitue dans la population n groupes de 30 personnes qui seront interrogées par un enquêteur.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i la variable égale au nombre de réponses A obtenues dans le groupe i.
On suppose les X_i mutuellement indépendantes et on pose $Z_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{30n}$.
Déterminer la loi de Z_n.
Déterminer, à partir de Z_n un estimateur sans biais T_n de θ. Cet estimateur est-il convergent ?

b) On pose $T_n = \dfrac{3Z_n}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0, P(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{3}{160n\varepsilon^2}$.

On dit que T_n converge en probabilité vers θ.

3. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une réalisation de l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Dans cette question, on cherche à estimer $P_A = p$, puisqu'alors, on pourra en déduire une estimation de θ.

Pour tout p dans $[0,1]$ on définit la vraisemblance au point p par la fonction L telle que : $L(x_1,\dots,x_n,p) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k)$.
On suppose $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ fixé dans $[\![1,30]\!]^n$.
Etudier les variations de la fonction partielle $f : p \to \ln(L(x_1,\dots,x_n,p))$.
Montrer que cette fonction passe par un maximum pour $p = \frac{1}{30n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.
On dit alors que l'estimateur $Z_n = \frac{X_1+\dots+X_n}{30n}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p.

Solution :

1. a) Notons E l'événement «l'étudiant connaît la réponse exacte», et R_A, R_B, R_C les événements «l'étudiant répond A» (resp. B, C).
Ainsi

$$p_A = P(R_A) = P(R_A/E)P(E) + P(R_A/\overline{E})P(\overline{E}) = \theta + \frac{1}{3}(1-\theta) = \frac{1+2\theta}{3}$$

Donc $\theta = \frac{3p_A - 1}{2}$.
Et :

$$p_B = P(R_B) = P(R_B/E)P(E) + P(R_B/\overline{E})P(\overline{E}) = \frac{1}{3}(1-\theta) = p_C$$

b) On a :

$$P(E/R_A) = \frac{P(R_A/E)P(E)}{P(R_A)} = \frac{3\theta}{1+2\theta}$$

2. a) Les (X_i) forment un échantillon indépendant et identiquement distribué. Ainsi Z_n étant une fonction des (X_i), est un estimateur. On a $E(Z_n) = E(X_i)$. Or X_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(30, p_A)$. Donc

$$E(Z_n) = p_A = \frac{1+2\theta}{3}$$

Aussi Z_n n'est pas un estimateur sans biais de θ, mais $T_n = \frac{3Z_n - 1}{2}$, vérifie :

$$E(T_n) = \theta, V(T_n) = \frac{9}{4}V(Z_n) = 30\frac{p_A(1-p_A)}{400n} \leqslant \frac{3}{160n}, \text{ et } \lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$$

donc t_n est un estimateur sans biais convergent de θ.
(on a utilisé la relation bien connue : $p \in [0,1] \implies p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$)

b) Soit $\varepsilon > 0$. L'inégalité de Cebicev donne :

$$P(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(T_n)}{\varepsilon^2} \leqslant \frac{3}{160n\varepsilon^2}$$

3. On a

$$L(x_1,\dots,x_n,p) = \prod_{k=1}^{n} \binom{30}{x_k} p^{x_k}(1-p)^{30-x_k}$$

et

$$f : p \mapsto \ln\Big(\prod_{k=1}^{n}\binom{30}{x_k}\Big) + \sum_{k=1}^{n} x_k \ln p + \sum_{k=1}^{n}(30 - x_k)\ln(1-p)$$

Ainsi :

$$f'(p) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{n}(30 - x_k) = \frac{1}{p(1-p)}\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k - 30np\Big)$$

Et f passe par un maximum en $p = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{30n}$.

Exercice 3.9.

Une urne contient N jetons numérotés $1, 2, \dots k$ $(3 \leq k \leq N)$, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note n_i le nombre de jetons portant le numéro i et $p_i = \dfrac{n_i}{N}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on effectue dans cette urne n tirages successifs d'un jeton avec remise.

1. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de jetons tirés portant le numéro i.
Déterminer la loi de N_i, son espérance et sa variance.

2. a) Pour $(i, j) \in [\![1, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance et sa variance.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(N_i, N_j)$ et vérifier que le coefficient de corrélation de (N_i, N_j) est bien entre -1 et 1. Dans quel cas vaut-il -1 ? Que pensez-vous de ce résultat ?

3. a) On pose Z_n la variable prenant pour valeurs le nombre de numéros qui ne sont pas sortis. Calculer, sans passer par sa loi, l'espérance $E(Z_n)$ de Z_n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n)$.

b) Comparer $P(Z_n \geq 1)$ et $E(Z_n)$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

Solution :

1. Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, la variable aléatoire N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$. Ainsi $E(N_i) = np_i$ et $V(N_i) = np_i(1 - p_i)$.

2. a) On a $(N_i + N_j)(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(N_i + N_j = k) &= \sum_{x=0}^{k} P(N_i = x \cap N_j = k - x) \\
&= \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p_i^x \binom{n-x}{k-x} p_j^{k-x} (1 - p_i - p_j)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}(1 - p_i - p_j)^{n-k} \sum_{x=0}^{k} \binom{n}{x} p_i^x p_j^{k-x}
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{k}(1-p_i-p_j)^{n-k}(p_i+p_j)^k$$

Aussi $N_i + N_j$ suit–elle la loi $\mathcal{B}(n, p_i + p_j)$. Donc $E(N_i + N_j) = n(p_i + p_j)$ et $V(N_i + N_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$.

b) Par la formule de la variance d'une somme, il vient :

$$\mathrm{Cov}(N_i, N_j) = -np_ip_j, \quad \rho(N_i, N_j) = -\frac{p_ip_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}}$$

Demander si $\rho(N_i, N_j) \in [-1, 1]$ est équivalent à demander si $\rho^2(N_i, N_j) \leqslant 1$ ou si $p_i^2p_j^2 \leqslant p_ip_j(1-p_i)(1-p_j)$. En développant, ceci est équivalent à $p_i + p_j \leqslant 1$, ce qui est vrai.

Enfin, $\rho(N_i, N_j) = -1$ si et seulement si $p_ip_j = p_ip_j(1-p_i)(1-p_j)$ si et seulement si $p_i + p_j = 1$.

L'urne n'est donc composée que de deux jetons ($k = 2$), et $N_i + N_j = n$. Dans ce cas, N_i et N_j sont liés par une relation affine.

3. a) Soit X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i n'est pas sorti, et prenant la valeur 0 sinon. Bien évidemment $Z_n = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ et $E(Z_n) = \sum\limits_{i=1}^{k} E(X_i)$.

La variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $(1-p_i)^n$. Donc

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{k}(1-p_i)^n$$

et, comme $p_i > 0$ pour tout i

$$\lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{n\to+\infty}(1-p_i)^n = 0$$

b) On a

$$E(Z_n) = \sum_{i=1}^{n-1} iP(Z_n = i) \geqslant \sum_{i=1}^{n-1} P(Z_n = i) = P(Z_n \geqslant 1)$$

D'après la question précédente

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n \geqslant 1) \leqslant \lim_{n\to+\infty} E(Z_n) = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1.$$

Exercice 3.10.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Déterminer pour tout u réel, l'espérance de la variable aléatoire e^{uX}.

2. Pour tout ensemble A, on note 1_A la variable aléatoire définie par

$$1_A(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Soit u un réel positif et $x\in\,]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\mathrm{e}^{u(X-(1+x)\lambda)}\geqslant 1_{\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\geqslant(1+x)\lambda\}}$$

b) En déduire que :

$$P(X\geqslant(1+x)\lambda)\leqslant \mathrm{e}^{-[u(1+x)+1-\mathrm{e}^u]\lambda}$$

3. Étudier sur $\mathbb{R}^+$ la fonction :

$$\varphi_x : u\mapsto u(1+x)+1-\mathrm{e}^u$$

Montrer que φ_x est majorée sur $\mathbb{R}^+$ et que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^+}\varphi_x(u)=(1+x)\ln(1+x)-x=h(x)$$

En déduire que :

$$P(X\geqslant(1+x)\lambda)\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda h(x)}$$

4. a) Montrer que pour tout $u<0$:

$$P(X\leqslant(1-x)\lambda)\leqslant \mathrm{e}^{-[u(1-x)+1-\mathrm{e}^u]\lambda}$$

b) Montrer que :

$$\sup_{u\in\mathbb{R}^-} u(1-x)+1-\mathrm{e}^u=h(-x)$$

puis que :

$$P(X\leqslant(1-x)\lambda)\leqslant \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)}$$

5. En déduire que :

$$P(|X-E(X)|>\lambda x)\leqslant 2\max(\mathrm{e}^{-\lambda h(x)},\mathrm{e}^{-\lambda h(-x)})$$

Solution :

1. On peut écrire :

$$E(\mathrm{e}^{uX})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{uk}\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{uk}\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^u}=\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)}$$

2. a) Notons $A=\{\omega\in\Omega\mid X(\omega)\geqslant(1+x)\lambda\}$.

- si $\omega\notin A$, on a $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))}\geqslant 0=1_A(\omega)$.
- si $\omega\in A$, on a $X(\omega)-\lambda(1+x)\geqslant 0, u\geqslant 0$; donc $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))}\geqslant 1=1_A(\omega)$.

b) Par positivité de l'espérance

$$\begin{aligned}E(1_A)=P(A)=P(X\geqslant(1+x)\lambda)&\leqslant E(\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1+x))})\\ &=E\big(\mathrm{e}^{-u(1+x)\lambda}\mathrm{e}^{uX}\big)=\mathrm{e}^{-u(1+x)\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)}=\mathrm{e}^{(-u(1+x)+1-\mathrm{e}^u)\lambda}\end{aligned}$$

3. La fonction φ_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Sa dérivée φ_x' est égale à

$$\varphi_x'(u)=(1+x)-\mathrm{e}^u$$

La fonction φ_x est croissante sur $[0, \ln(1+x)]$, puis décroissante sur $[\ln(1+x), +\infty[$. Elle atteint son *maximum*, qui est positif (car $x \in]0,1[$) en $u_0 = \ln(1+x)$, ce *maximum* valant :

$$h(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$$

On a montré que $P(X \geqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\varphi_x(u)}$, pour tout $u > 0$. Donc :

$$P(X \geqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda \max_u(\varphi_x(u))} = \mathrm{e}^{-\lambda h(x)}$$

4. a) Notons $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant (1-x)\lambda\}$.

• Si $\omega \notin B$, on a $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))} \geqslant 0 = 1_B(\omega)$.

• Si $\omega \in B$, on a $X(\omega) - \lambda(1-x) \leqslant 0, u \leqslant 0$; donc $\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))} \geqslant 1 = 1_B(\omega)$.

b) Par positivité de l'espérance :

$$E(1_B) = P(B) = P(X \leqslant (1-x)\lambda) \leqslant E(\mathrm{e}^{u(X(\omega)-\lambda(1-x))}) = E\big(\mathrm{e}^{-u(1-x)\lambda}\mathrm{e}^{uX}\big)$$
$$\leqslant \mathrm{e}^{-u(1-x)\lambda}\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^u-1)} = \mathrm{e}^{-(u(1-x)+1-\mathrm{e}^u)\lambda}$$

Étudions la fonction $\varphi_x : u(1-x) + 1 - \mathrm{e}^u$; elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^-$. Sa dérivée φ_x' est égale à $\varphi_x'(u) = (1-x) - \mathrm{e}^u$.

La fonction φ_x est croissante sur $]-\infty, \ln(1-x)]$, puis décroissante sur $[\ln(1-x), 0]$. Elle atteint son *maximum*, qui est positif (car $x \in]0,1[$) en $u_1 = \ln(1-x)$, ce *maximum* valant

$$h(-x) = (1-x)\ln(1-x) + x$$

On a montré que $P(X \geqslant \lambda(1-x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda\varphi_x(u)}$, pour tout $u < 0$. Donc :

$$P(X \leqslant \lambda(1+x)) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda \max_u(\varphi_x(u))} = \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)}$$

5. Comme $E(X) = \lambda$, on a

$$|X - E(X)| \geqslant \lambda x \Longleftrightarrow (X \geqslant \lambda(1+x)) \cup (X \leqslant \lambda(1-x))$$

Donc

$$P(|X - E(X)| \geqslant \lambda x) \leqslant 2\max(\mathrm{e}^{-\lambda h(x)}, \mathrm{e}^{-\lambda h(-x)})$$

Exercice 3.11.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 0 \text{ si } x < 0 \text{ et } g_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \text{ si } x \geqslant 0.$$

1. a) Déterminer, pour tout n, la constante k_n de faon que la fonction $f_n = k_n g_n$ soit une densité d'une variable aléatoire X_n.

b) Reconnaître la loi de X_n. En déduire son espérance et sa variance.

Vérifier que le rapport $\dfrac{E(X_n)}{V(X_n)}$ est indépendant de n.

c) Déterminer le mode M_n de X_n, c'est-à-dire la valeur pour laquelle f_n atteint son maximum (si cette valeur existe).

Etudier la limite lorsque n tend vers l'infini du rapport $\dfrac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})}$.

2. a) Un observateur boursier analyse, pendant un laps de temps x fixé, les valeurs qui subissent une baisse importante. L'unité de temps utilisée dans cet exercice est la minute.

Il a remarqué que, dans un marché stabilisé, qui n'est pas soumis à de trop importantes perturbations, le temps d'attente entre deux baisses de plus de 5% sur des valeurs est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre 1/2. Ces différents temps d'attente sont indépendants entre eux.

Soit S_n le temps écoulé entre le début de l'observation et le moment où une $n^{\text{ème}}$ valeur subit une baisse de plus de 5%.

Quelle est la loi de S_n ?

b) Soit T le nombre de valeurs ayant baissé de plus de 5% pendant la durée x.

Comparer les événements $[T \geqslant n]$ et $[S_n \leqslant x]$.

En déduire la loi de T, son espérance et sa variance.

3. Dans le logiciel utilisé par cet observateur, une baisse de plus de 5% d'au moins 25 valeurs durant le laps de temps x déclenche des ordres de vente immédiats.

Quelle est la probabilité qu'un tel cas se présente durant la période d'observation $x = 120$?

(On donne $\Phi(7) = 0,9999$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.)

Solution :

1. a) La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf lorsque $n = 0$, en $x = 0$). La constante k_n doit être positive et vérifier

$$k_n \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x/2}\,dx = 1$$

Le changement de variable affine $u = x/2$ donne :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n.\mathrm{e}^{-x/2}\,dx = 2^{n+1}\int_0^{+\infty} u^n.\mathrm{e}^{-u}\,du = 2^{n+1}n!$$

Donc

$$k_n = \frac{1}{n!2^{n+1}}$$

b) Une densité f_n de la variable aléatoire X_n est donc définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\Gamma(n+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n \mathrm{e}^{-x/2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi X_n suit la loi $\Gamma\big(n+1, \frac{1}{2}\big)$, et :

$$E(X_n) = 2(n+1), V(X_n) = 4(n+1), \text{ d'où } \frac{E(X_n)}{V(X_n)} = \frac{1}{2}$$

c) Le *maximum* de la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ est égal au *maximum* de la fonction g_n sur $\mathbb{R}$. La dérivée g'_n s'annule en $M_n = 2n$ et :

$$f_n(M_n) = \frac{1}{2^{n+1}n!}2^n n^n \mathrm{e}^{-n}, f_n(M_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+2}(n+1)!}2^{n+1}(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-n-1},$$

d'où :

$$\frac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})} = \mathrm{e}\big(\frac{n}{n+1}\big)^n$$

Or :

$$\big(\frac{n}{n+1}\big)^n = \big(1+\frac{1}{n}\big)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = \mathrm{e}^{-1+o(1)}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(M_n)}{f_{n+1}(M_{n+1})} = 1$$

2. a) Soit Y_i le temps d'attente entre la i-ème et la $(i+1)$-ème baisse, Y_0 représentant le temps d'attente de la première baisse. La variable aléatoire Y_i suit une loi $\mathcal{E}(1/2)$. On a alors

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} Y_i \hookrightarrow \Gamma(n,2)$$

b) L'événement $(T \geqslant n)$ signifie qu'en x minutes, il y a eu au moins n valeurs en baisse.
L'événement $(S_n \leqslant x)$ signifie que la n-ème baisse s'est produite avant que le laps de temps x ne se soit écoulé.
Ainsi $(T \geqslant n) = (S_n \leqslant x)$, avec $S_0 = Y_0$.

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P(T \geqslant n) - P(T \geqslant n+1) = P(S_n \leqslant x) - P(S_{n+1} \leqslant x) \\ &= \int_0^x \frac{t^{n-1}}{2^n(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,dt - \int_0^x \frac{t^n}{2^{n+1}n!}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,dt \\ &= \big(\frac{x}{2}\big)^n \frac{1}{n!}\,\mathrm{e}^{-x/2} \end{aligned}$$

Ainsi T suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(x/2)$ et $E(T) = V(T) = \frac{x}{2}$.

3. La variable aléatoire S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Donc $\dfrac{S_n - E(S_n)}{\sigma_{S_n}}$ converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
On a $E(S_n) = 50, V(S_n) = 100$ et

$$P(T \geqslant 25) = P(S_{25} \leqslant 120) = P\big(\frac{S_{25}-50}{10} \leqslant 7\big) = \Phi(7) = 0.9999$$

L'ordre de vente se déclenchera quasiment sûrement.

Exercice 3.12.

On observe un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ d'une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

A. Estimation de λ.

On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que $\overline{X}$ est un estimateur sans biais de λ.
Calculer sa variance. Cet estimateur est–il convergent ?

B. Estimation de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$.

Soit ℓ un réel.

1. On pose $Y = \mathrm{e}^{-\ell\overline{X}}$.
Y est–il un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$? Est–il asymptotiquement sans biais ?

2. Soit Z un estimateur sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$, fonction de $n\overline{X}$, c'est–à–dire de la forme

$$Z = g(n\overline{X})$$

a) Calculer l'espérance $E(Z)$.

b) Montrer que $E(Z) = \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ si et seulement si

$$Z = \big(1 - \frac{\ell}{n}\big)^{n\overline{X}}$$

Solution :

A. Immédiatement :

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \lambda, V(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{\lambda^2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $\overline{X}$ est un estimateur sans biais et convergent de λ.

B. Soit $S = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. La variable aléatoire S suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(n\lambda)$.

1. On a :

$$E(\mathrm{e}^{-\ell\overline{X}}) = E(\mathrm{e}^{\frac{-\ell S}{n}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ell k}{n}} \mathrm{e}^{-n\lambda} \frac{(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n \mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}})^k}{k!}$$

$$= \mathrm{e}^{n\lambda(\mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}}-1)} \neq \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$$

Lorsque n tend vers l'infini, on a : $\mathrm{e}^{n\lambda(\mathrm{e}^{-\frac{\ell}{n}}-1)} = \mathrm{e}^{-\ell\lambda+o(1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ et Y est un estimateur asymptotiquement sans biais de $\mathrm{e}^{-\ell\lambda}$.

2. Notons $Z = g(n\overline{X}) = g(S)$. On a :

a) $E(Z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{-n\lambda}\dfrac{(\lambda n)^k}{k!}$.

b) Donc $E(Z) = \mathrm{e}^{-\ell\lambda}$ si et seulement si :

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k)\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda n)^k}{k!} = \mathrm{e}^{(n-\ell)\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!}$$

Cela entraîne que pour tout $k \geqslant 0$:

$$g(k) = \Big(\frac{n-\ell}{n}\Big)^k = \Big(1-\frac{\ell}{n}\Big)^k$$

La justification de ce dernier résultat est l'unicité du développement limité de $x \mapsto \mathrm{e}^x$. En effet, pour tout $m \geqslant 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(k)n^k\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} g(k)n^k\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{(\lambda)^k}{k!} + o(\lambda^m)$$

et :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{(n-\ell)^k\lambda^k}{k!} + o(\lambda^m)$$

Donc :

$$Z = \Big(1-\frac{\ell}{n}\Big)^S$$

Exercice 3.13.

Une urne contient n boules distinctes $B_1, \ldots, B_n$, avec $n \geqslant 2$. Soit r un entier tel que $1 \leqslant r < n$.
On effectue dans cette urne des tirages répétés d'une boule avec remise.
On note Y_r la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir au moins une fois les boules $B_1, \ldots, B_r$.

1. Déterminer la loi de Y_1, son espérance et sa variance.

2. Déterminer les valeurs prises par Y_r.
Calculer la probabilité $P(Y_r = r)$, puis la probabilité $P(Y_r = r+1)$.
Mettre en place le raisonnement permettant de déterminer la loi de Y_r.

3. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note W_i la variable aléatoire représentant le nombre de tirages nécessaires pour que pour la première fois, i boules distinctes parmi les boules $B_1, \ldots, B_r$ soient sorties (ainsi $W_r = Y_r$.)
Enfin, on pose $X_1 = W_1$ et pour $i \geqslant 2$, $X_i = W_i - W_{i-1}$.

a) Déterminer la loi de X_i ainsi que son espérance.

b) En déduire l'espérance $E(Y_r)$ de Y_r. Déterminer un équivalent de $E(Y_r)$.

Solution :

1. Y_1 représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule B_1. Donc $Y_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et Y_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{1}{n}\big)$. Ainsi :

$$E(Y_1) = n, \quad V(Y_1) = n^2 - n$$

2. a) Immédiatement $Y_r(\Omega) = \{r, r+1, \ldots\}$.

b) L'événement $(Y_r = r)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement r tirages. Cela signifie que l'on a tiré chacune de ces boules une seule fois au cours de ces r tirages.

Les tirages s'effectuant avec remise, les résultat successifs sont indépendants. Ainsi :

$$P(Y_r = r) = r!\frac{1}{n^r}$$

(il y a $r!$ ordres possibles et à chaque fois chacune des boules est tirée avec la probabilité $\frac{1}{n}$)

c) L'événement $(Y_r = r+1)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement $(r+1)$ tirages. Cela signifie que le $(r+1)$ ème tirage a donné *pour la première fois* une des boules $B_1, \dots, B_r$, les autres boules ayant été tirées au moins une fois lors des r premiers tirages.

C'est–à–dire que si le tirage $(r+1)$ est occupé par la boule B_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, lors des r premiers tirages, on a obtenu

•(A) : soit une seule fois chaque boule $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_r$ et une boule parmi les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$,

•(B) : soit chaque boule $B_1, \dots, B_{i-1}, B_{i+1}, \dots, B_r$, l'une d'entre elles ayant été tirée deux fois et les autres une fois.

On a r choix de la boule B_i. Cette boule étant fixée

$$P(A) = \frac{(r-1)!}{n^r} \times \frac{n-r}{n}$$

$$P(B) = \binom{r}{2}\frac{(r-2)!}{n^r} \times (r-1)$$

(on fixe les places de la boule tirée deux fois et on a $(r-1)$ choix pour cette boule.)

Finalement, A et B étant incompatibles :

$$P(Y_r = r+1) = \frac{r}{n}\big(P(A) + P(B)\big) = \frac{r!}{n^{r+1}} \times \frac{2n-r-1}{2}$$

d) L'événement $(Y_r = r+k)$ correspond à l'obtention des boules $B_1, \dots, B_r$ en exactement $(r+k)$ tirages. Cela signifie que le $(r+k)$ ème tirage a donné *pour la première fois* une des boules $B_1, \dots, B_r$, les autres boules ayant été tirée au moins une fois lors des $r+k-1$ premiers tirages.

C'est–à–dire que si le tirage $(r+k)$ est occupé par la boule B_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$, lors des $r+k-1$ premiers tirages, on a obtenu chacune des autres boules m_j fois, avec $m_j \geqslant 1$ et $m = \sum\limits_{j=1}^{r-1} m_j \leqslant r$, et on a tiré parmi les boules $B_{r+1}, \dots, B_n$, $(r-m)$ fois.

Ainsi : $P(Y_r = r+k)$ vaut :

$$\frac{r}{n}\sum_{\substack{\forall j, m_j\geqslant 1\\ \sum m_j\leqslant r}}\binom{m_1}{r+k-1}\frac{1}{n^{m_1}}\binom{m_2}{r+k-1-m_1}\frac{1}{n^{m_2}}\cdots\frac{1}{n^{n-m_{r-1}}}\Big(\frac{n-k}{n}\Big)^{r-m}$$

3. a) On a $X_1 = W_1$ qui représente le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule parmi $B_1, \dots, B_r$.
La variable aléatoire X_1 suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{r}{n}\big)$ et $E(X_1) = \frac{n}{r}$.
La variable aléatoire X_i représente le temps d'attente pour obtenir un i-ème succès (tirage d'une nouvelle boule sachant que $(i-1)$ boules distinctes de $B_1, \dots, B_r$ on déjà été obtenues.)
X_i suit la loi géométrique $\mathcal{G}\big(\frac{r-i+1}{n}\big)$ et $E(X_i) = \dfrac{n}{r-i+1}$.

b) On a $Y_r = \sum\limits_{i=1}^{r} X_i$ et

$$E(Y_r) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i) = n\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k} \sim n\ln r$$

Exercice 3.14.

1. a) Compléter les lignes de programme suivantes pour en faire un programme complet :

```
randomize ;
  N :=random(m)+1 ;X :=0 ;
  For i :=1 to N Do X :=X+random(2) ;
  Writeln(N,' ',X) ;
```

(on rappelle que lorsque a est un `integer`, `random(a)` renvoie une valeur `integer` au hasard comprise entre 0 et $a-1$, et que la procédure `randomize` permet d'initialiser la fonction `random`.)

b) On suppose que la première valeur affichée est 4. Quelles sont les valeurs possibles pour la seconde valeur affichée ?

2. On suppose que le programme précédent simule une expérience aléatoire. Quelle est alors la loi suivie par la variable aléatoire simulée par N, son espérance, sa variance ?

3. Préciser $X(\Omega)$ et calculer, pour tout couple (i,k), $P(X = i/N = k)$. En déduire la loi de X.

4. Déterminer l'espérance de X.

Solution :

1. a) Il suffit de compléter les déclarations du programme, soit

```
Program Exo ;
  Var m,i,N,X : integer ;
```

```
Begin
Readln(m) ;
...
End.
```

b) Si $N=4$, comme `Random(2)=0` ou `1`, X prend ses valeurs dans $[\![0,4]\!]$.

2. Par la définition de la fonction `Random`, N suit la loi uniforme sur $[\![1,m]\!]$. Donc

$$E(N)=\frac{m+1}{2},V(N)=\frac{m^2-1}{12}.$$

3. On sait que $X(\Omega)=[\![0,m]\!]$, et que pour tout $k\in[\![1,m]\!]$

$$X_{|N=k}\hookrightarrow\mathcal{B}\big(k,\frac{1}{2}\big)$$

soit :

$$P(X=i/N=k)=\begin{cases}\dbinom{k}{i}\dfrac{1}{2^k} & \text{si } i\in[\![0,k]\!]\\ \quad 0 & \text{si } i\in[\![k+1,m]\!]\end{cases}$$

Par la formule des probabilités totales, en utilisant le système complet d'événements $(N=k)_{1\leqslant k\leqslant m}$, il vient, pour tout $i\in[\![0,m]\!]$:

$$P(X=i)=\sum_{k=1}^{m}P(X=i/N=k)P(N=k)=\frac{1}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}$$

4. On a :

$$E(X)=\sum_{i=0}^{m}\frac{i}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}i\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}k\binom{k-1}{i-1}\frac{1}{2^k}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}k\times\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k-1}{i-1}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}k\times\frac{1}{2^k}\times 2^{k-1}=\frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{m}k$$

Soit :

$$E(X)=\frac{m+1}{4}$$

Exercice 3.15.

On considère une variable aléatoire X telle que :

$$X(\Omega)=\mathbb{N}\text{ et }\forall\,k\in\mathbb{N},P(X=k)=p.q^k$$

où p est un réel fixé de $]0,1[$ et $q=1-p$.

1. Montrer que X admet des moments de tous ordres et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

2. On pose $Y=\dfrac{1}{X+1}$.

a) Déterminer la loi de Y.

b) Montrer que pour $t\in[0,1[$ et $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{t^k}{k}+\ln(1-t)=\int_0^t\frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$.

c) En déduire que pour $t \in [0,1[$, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} = -\ln(1-t)$.

d) Montrer que Y admet une espérance et calculer $E(Y)$.

3. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout k de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Z conditionnée par la réalisation de l'événement $(X = k)$ est uniforme sur $[\![0;k]\!]$.

a) Déterminer la loi de Z (on laissera les résultats sous forme de sommes).

b) Montrer que Z admet une espérance.

Solution :

1. Au vu de la définition de la loi de X, il est évident que $X+1$ suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Donc :

$$E(X) = \frac{1}{p} - 1, \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

2. a) Comme $Y = \frac{1}{X+1}$, il vient $Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{k+1}/k \in \mathbb{N}\right\}$ et :

$$P\big(Y = \frac{1}{k+1}\big) = pq^k$$

b) On sait que pour tout $x \in [0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

En intégrant cette égalité sur l'intervalle $[0,t]$, $(t < 1)$, on obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^k}{k} + \ln(1-t) = \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx$$

c) Or

$$\Big|\int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-x}\,dx\Big| \leqslant \int_0^t \frac{x^{n+1}}{1-t}\,dx = \frac{t^{n+2}}{(n+2)(1-t)}$$

Il reste à faire tendre n vers l'infini : la dernière expression tend vers 0 car $0 \leqslant t < 1$.

d) Par la question précédente :

$$-\frac{p}{q} \times \ln(1-q) = \frac{p}{q}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{pq^k}{k+1} = E(Y)$$

3. On sait que $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus

a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- pour tout $z \in [\![0,k]\!]$, $P(Z = z/X = k) = \frac{1}{k+1}$,
- pour tout $z \notin [\![0,k]\!]$, $P(Z = z/X = k) = 0$.

b) Par la formule des probabilités totales, pour tout $z \in \mathbb{N}$:

$$P(Z=z)=\sum_{k=z}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}$$

b) Montrons que $E(Z)$ existe. Pour cela, il faut montrer la convergence de la série

$\sum_n n\Big(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}\Big)=\sum_n u_n$. Or, pour tout $N>n$:

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{pq^k}{k+1}\leqslant\sum_{k=z}^{N}pq^k=pq^n\frac{1-q^{N-n+1}}{1-q}$$

Donc :

$$0\leqslant u_n=n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{pq^k}{k+1}\leqslant n\,\frac{pq^n}{1-q}=nq^n$$

ce dernier majorant étant le terme général d'une série convergente, la conclusion en résulte.

Exercice 3.16.

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$.

La roue d'une loterie est représentée par un disque de rayon 1, dont le centre O est pris pour origine d'un repère orthonormé. Cette roue est lancée dans le sens trigonométrique, l'angle (exprimé en radians) dont elle tourne avant de s'arrêter est une variable aléatoire, notée U. On suppose que U suit la loi exponentielle de paramètre a.

La roue porte une marque M, qui, au départ, est située au point de coordonnées $(1,0)$ et qui, après l'arrêt de la roue, se trouve au point de coordonnées aléatoires $X=\cos U$, $Y=\sin U$.

1. Soient $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-au}\cos u\,du$, $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-au}\sin u\,du$.

a) Montrer que les intégrales I et J sont convergentes.

b) A l'aide d'intégrations par parties, que l'on justifiera, établir deux relations liant I et J. En déduire les valeurs de I et J.

c) Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

2. Un joueur gagne à cette loterie si, à l'arrêt de la roue, l'ordonnée de M vérifie la relation : $Y\geqslant\dfrac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité, notée $p(a)$, que le joueur gagne.

b) Déterminer $\lim\limits_{a\to 0}p(a)$.

Solution :

1. a) Montrons que les intégrales I et J sont absolument convergentes. On effet, on peut écrire :

$$|\cos u.\mathrm{e}^{-au}|\leqslant\mathrm{e}^{-au},\quad|\sin u.\mathrm{e}^{-au}|\leqslant\mathrm{e}^{-au}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-au}\,du$ existe.

b) En utilisant $A > 0$ et des intégrations par parties sur $[0, A]$, intervalle où les fonctions sinus, cosinus et exponentielle sont de classe C^∞, il vient :

$$I(A) = \int_0^A \cos u.\mathrm{e}^{-au}\,du = \sin A.\mathrm{e}^{-aA} + a(1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA}) - a^2 I(A)$$

$$J(A) = \int_0^A \sin u.\mathrm{e}^{-au}\,du = -a\sin A.\mathrm{e}^{-aA} + 1 - \cos A.\mathrm{e}^{-aA} - a^2 J(A)$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, les fonctions sin et cos étant bornées sur $\mathbb{R}$, il vient :

$$I = a - a^2 I, \qquad J = 1 - a^2 J$$

Donc

$$I = \frac{a}{1+a^2}, \qquad J = \frac{1}{1+a^2}$$

c) Par le théorème du transfert :

$$E(X) = E(\cos U) = \int_a^{+\infty} \cos u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aI = \frac{a^2}{1+a^2}$$

$$E(Y) = E(\sin U) = \int_a^{+\infty} \sin u.a\mathrm{e}^{-au}\,du = aJ = \frac{a}{1+a^2}$$

2. a) Le joueur gagne si et seulement si $\sin U \geqslant 1/2$ soit si et seulement si $U \in [\pi/6, 5\pi/6] \pmod{2\pi}$. Donc :

$$\begin{aligned}
p(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} P\Big(\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant U \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} a.\mathrm{e}^{-at}\,dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \big(\mathrm{e}^{(-\pi/6-2k\pi)a} - \mathrm{e}^{(-5\pi/6-2k\pi)a}\big) = \frac{\mathrm{e}^{-a\pi/6} - \mathrm{e}^{-a5\pi/6}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}} \\
&= \mathrm{e}^{-a\pi/6}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2a\pi/3}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}
\end{aligned}$$

b) Lorsque $a \to 0$, comme $\mathrm{e}^{-ax} = 1 - ax + o(x)$ au voisinage de 0, il vient :

$$\lim_{a\to 0} p(a) = \frac{1}{3}$$

Exercice 3.17.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y qui suivent toutes deux la loi uniforme sur l'intervalle $]0, a]$.

On s'intéresse à la variable aléatoire Z définie par :

$$Z = \frac{A}{B} \quad \text{où } A = \inf(X, Y) \text{ et } B = \sup(X, Y).$$

1. Montrer que $\ln Z = -|\ln X - \ln Y|$.

2. Déterminer les fonctions de répartition et une densité des variables aléatoires $U = \ln X$ et $V = -\ln Y$.

3. Déterminer une densité de la variable aléatoire $W = U + V$.

4. Déterminer la fonction de répartition et une densité de la variable aléatoire $T = \ln Z$.

5. En déduire la loi de Z.

Solution :

1. Comme $X > 0, Y > 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\ln Z &= \ln\min(X,Y) - \ln\max(X,Y) = \min(\ln X, \ln Y) - \max(\ln X, \ln Y)\\ &= -|\ln X - \ln Y|\end{aligned}$$

2. On a $U(\Omega) =]-\infty, \ln a]$ et :

$$P(U < u) = P(X < \mathrm{e}^u) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^u}{a} & \text{si } u \in]-\infty, \ln a] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^u}{a} & \text{si } u \in]-\infty, \ln a] \\ 0 & \text{si } u > \ln a \end{cases}$$

De même, $V(\Omega) = [-\ln a, +\infty[$ et

$$P(V < v) = 1 - F_Y(\mathrm{e}^{-v})) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{a} & \text{si } v \in [-\ln a, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$f_V(v) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-v}}{a} & \text{si } v \in [-\ln a, +\infty[\\ 0 & \text{si } v < -\ln a \end{cases}$$

3. Les variables aléatoires U et V étant indépendantes, par convolution :

$$f_W(w) = \int_{\mathbb{R}} f_U(w-t) f_V(t)\, dt$$

Or, au vu des définitions des densités, on doit demander, pour calculer cette intégrale : $w - t \leqslant \ln a$ et $t \geqslant -\ln a$.
Donc :

• si $w \geqslant 0$

$$f_W(w) = \int_{w-\ln a}^{+\infty} \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{w-t} \times \frac{1}{a}\,\mathrm{e}^{-t}\, dt = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{w} \int_{w-\ln a}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-w}$$

• si $w \leqslant 0$

$$f_W(w) = \int_{-\ln a}^{+\infty} \frac{1}{a^2}\,\mathrm{e}^{w-2t}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{w}$$

Finalement, pour tout $w \in \mathbb{R}$, $f_W(w) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|w|}$.

4. On a $T(\Omega) = \mathbb{R}^-$ et pour tout $t < 0$,
$P(T < t) = P(-|W| < t) = 1 - P(|W| < -t)$. Donc :

$$P(T < t) = 1 - \int_t^{-t} \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|w|}\,dw = \mathrm{e}^t$$

et

$$F_T(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

donc, on peut prendre :

$$f_T(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

5. Comme $Z = \mathrm{e}^T$, on a $Z(\Omega) = [0,1]$ et

$$P(Z < z) = P(T < \ln z) = \begin{cases} z & \text{si } 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } z < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi Z suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$.

Exercice 3.18.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi uniforme sur $]0,1[$ et la loi exponentielle de paramètre 1.

On pose $X_1 = 1-X$, $Y_1 = -\ln X$, $Y_2 = -\ln(1-X)$, $Z = X+Y$, $Z_1 = X_1+Y_1$, $Z_2 = X + Y_2$, $Z_3 = X + Y_1$ et $Z_4 = X_1 + Y_2$.

1. a) Déterminer les lois des variables X_1, Y_1 et Y_2.

b) Déterminer une densité f_Z de Z.

c) Expliquer pourquoi les variables Z_1 et Z_2 suivent la même loi. Que peut-on dire de Z_3 et Z_4 ?

2. On définit les fonctions φ_1 et φ_3 sur $]0,1[$ par : $\varphi_1(x) = 1 - x - \ln x$ et $\varphi_3(x) = x - \ln x$.

a) Montrer que φ_1 réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$ et que φ_3 réalise une bijection de $]0,1[$ sur $]1,+\infty[$.

b) Déterminer les fonctions de répartition F_{Z_1} et F_{Z_3} de Z_1 et Z_3 et donner leur expression en utilisant φ_1 et φ_3. Les variables Z_1 et Z_3 suivent-elles la même loi ?

c) Calculer et comparer $F_{Z_1}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)$ et $F_{Z_3}\left(\frac{1}{2} + \ln 2\right)$.

3. On considère une variable aléatoire T de densité f_T et de fonction de répartition F_T, indépendante de X telle que $X + T$ suive la même loi que Z.

a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}\ \ F_T(t) - F_T(t-1) = f_Z(t)$.

b) Déterminer F_T, puis une densité f_T.

c) Comparer les lois de T et Y.

Solution :

1. a) Il est immédiat que la variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur $]0,1[$. Pour tout $y > 0$:

$$P(Y_1 \leqslant y) = P(X \geqslant \mathrm{e}^{-y}) = 1 - \mathrm{e}^{-y}$$

Donc Y_1 suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Comme $Y_2 = -\ln X_1$, Y_2 suit aussi la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

b) On sait que $Z(\Omega) =]0, +\infty[$ et pour $t > 0$:

$$f_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx = \int_0^1 f_Y(t-x)\,dx$$

• Pour $0 < t \leqslant 1$, $f_Z(t) = \displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{x-t}\,dx = 1 - \mathrm{e}^{-t}$,

• pour $t > 1$, $f_Z(t) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x-t}\,dx = (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{-t}$.

c) On sait que X suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et $Z_1 = 1 - X - \ln X$. De même $U = 1 - X$ suit la loi uniforme sur $]0,1[$ et $Z_2 = 1 - U - \ln U$. Donc Z_1 et Z_2 suivent la même loi.

Comme $Z_3 = X - \ln X$, $Z_4 = U - \ln U$, les variables Z_3 et Z_4 suivent la même loi.

2. a) Une étude rapide des variations des fonctions φ_1 et φ_3 montre qu'elles sont décroissantes sur $]0,1[$, la première de $+\infty$ vers 0 et la seconde de $+\infty$ vers 1.

b) On a $Z_1(\Omega) = \varphi_1(]0,1[) =]0, +\infty[$. Pour tout $z > 0$:

$$F_{Z_1}(z) = P(\varphi_1(X) \leqslant z) = P(X \geqslant \varphi_1^{-1}(z)) = 1 - \varphi_1^{-1}(z)$$

Donc

$$F_{Z_1}(z) = \begin{cases} 1 - \varphi_1^{-1}(z) & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z \leqslant 0 \end{cases}$$

De même, $Z_3(\Omega) = \varphi_3(]0,1[) =]1, +\infty[$. Pour tout $z > 1$:

$$F_{Z_3}(z) = P(\varphi_3(X) \leqslant z) = P(X \geqslant \varphi_3^{-1}(z)) = 1 - \varphi_3^{-1}(z)$$

Donc

$$F_{Z_3}(z) = \begin{cases} 1 - \varphi_3^{-1}(z) & \text{si } z > 1 \\ 0 & \text{si } z \leqslant 1 \end{cases}$$

Ainsi Z_1 et Z_3 ne suivent pas la même loi.

c) Il vient :

$$\varphi_1\big(\tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2} + \ln 2 = \varphi_3\big(\tfrac{1}{2}\big) \implies F_{Z_1}\big(\tfrac{1}{2} + \ln 2\big) = \tfrac{1}{2} = F_{Z_3}\big(\tfrac{1}{2} + \ln 2\big)$$

3. a) On a :

$$f_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} f_X(t-x) f_T(x)\,dx = \int_{t-1}^{t} f_T(x)\,dx = F_T(t) - F_T(t-1)$$

b) Pour tout t réel, $F_T(t) = F_T(t-1) + f_Z(t)$. Donc :

• pour $t \leqslant 0$, $F_T(t) = F_T(t-1)$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_T(t) = F_T(t-n)$, et $F_T(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_T(t-n) = 0$.

• pour $t \in]0,1]$, $F_T(t) = F_T(t-1) + f_Z(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Supposons que pour $t \in]n-1, n], F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. Alors, pour $t \in]n, n+1]$:

$$F_T(t) = 1 - \mathrm{e}^{-(t-1)} + \mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}-1) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$$

c) Ainsi T suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ et suit la même loi que Y.

Exercice 3.19.

1. Soient X une variable aléatoire finie ou discrète qui possède une espérance et Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$. On suppose que $P(Y = i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

a) Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. Montrer que la loi conditionnelle de X, conditionnée par l'événement $(Y = i)$ admet une espérance qu'on notera $E(X/Y = i)$.

b) Prouver la formule suivante : $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} E(X/Y = i) P(Y = i)$

2. Soit n un entier non nul. Montrer que l'on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un technicien assure la maintenance de n machines-outils de même type qui sont alignées. Deux machines consécutives sont distantes d'une longueur ℓ. De temps en temps les machines outils s'arrêtent avec la même probabilité et indépendamment les unes des autres et nécessitent un réglage. Après le réglage d'une machine-outil le technicien reste devant celle-ci, jusqu'à ce qu'une autre machine-outil s'arrête (si c'est la même machine qui retombe en panne, il reste à sa place). La variable aléatoire X est la distance que parcourt le technicien entre deux réglages. On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la machine devant laquelle se trouve le technicien.

a) Calculer l'espérance de X.

b) Déterminer la variance de X.

Solution :

1. a) Notons $\{x_k, k \in K\}$ l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X. On a :

$$\sum_{k \in K} x_k P(X = x_k / Y = i) = \sum_{k \in K} x_k \frac{P(X = x_k \cap Y = i)}{P(Y = i)}$$

$$\leqslant \frac{1}{P(Y=i)} \sum_{k\in K} x_k P(X=x_k) = \frac{E(X)}{P(Y=i)}$$

Ainsi $E(X/Y=i)$ existe.

b) La famille $(Y=i)$ formant un système complet d'événements, il vient :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k\in K} x_k P(X=x_k) = \sum_{k\in K} x_k \sum_{i=1}^{p} P(X=x_k/Y=i)P(Y=i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \big(\sum_{k\in K} x_k P(X=x_k/Y=i)\big)P(Y=i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} E(X \mid Y=i)P(Y=i) \end{aligned}$$

2. Cette formule (très classique) se montre par récurrence.

3. a) Calculons $E(X \mid Y=i)$

$$\begin{aligned} E(X/Y=i) &= \sum_{k=1}^{n} \ell|k-i|P(X=\ell|k-i|/Y=i) = \frac{\ell}{n}\big(\sum_{k=1}^{i-1}(i-k)+\sum_{k=i}^{n}(k-i)\big) \\ &= \frac{\ell}{n}\big(\sum_{j=1}^{i-1} j + \sum_{j=0}^{n-i} j\big) = \frac{\ell}{n}\big(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\big) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats des questions 1.b et 2, il vient :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\times\frac{\ell}{n}\big(\frac{i(i-1)}{2} + \frac{(n-i)(n-i+1)}{2}\big) = \frac{\ell(n^2-1)}{3n}$$

b) Calculons $E(X^2)$ par la même méthode :

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X^2 \mid Y=i)P(Y=i)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big(\sum_{k=1}^{n}(k-i)^2\ell^2 P(X=l|k-i|/Y=i)\big) \\ &= \frac{\ell^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(k-i)^2 = \frac{\ell^2(n^2-1)}{6} \end{aligned}$$

et

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{\ell^2(n^4+n^2-2)}{18n^2}$$

Exercice 3.20.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires de Bernoulli définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et toutes de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$Z_k = \Big(\bigcap_{n\geqslant k}[X_n=0]\Big) \cup \Big(\bigcap_{n\geqslant k}[X_n=1]\Big)$$

est un événement.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement Z_k est négligeable et interpréter ce résultat.

2. On considère la fonction $L : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à toute éventualité appartenant à Z_1 la valeur 0 et à tout autre élément ω de Ω l'unique entier $n \geqslant 1$ tel que ω appartienne à $[X_n = X_{n-1} = \cdots = X_1] \cap [X_{n+1} \neq X_1]$.

Montrer que L est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Quelle est la loi de L ? Montrer que L admet un moment d'ordre 2. En déduire que L admet une espérance et une variance (*que l'on ne calculera pas*).

3. On définit de même la fonction $M : \Omega \to \mathbb{N}$ associant à $\omega \in \Omega$ l'unique entier $m \geqslant 1$ (s'il existe) tel que, si L a pris la valeur n, ω appartienne à $[X_{n+1} = X_{n+2} = \cdots = X_{n+m}] \cap [X_{n+m+1} \neq X_{n+m}]$, et prenant la valeur 0 si cet entier m n'existe pas.
On admet que M est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$ et que $P\big([M = 0]\big) = 0$.

Quelle est la loi de M ? Montrer que M admet un moment d'ordre 2 et trouver son espérance et sa variance.

4. Montrer que les lois de L et de M coïncident si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$.

5. Déterminer l'espérance de L et montrer que $E(L) \geqslant E(M) = 2$.

Solution :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 0] \in \mathcal{T}$ et $[X_n = 0] \in \mathcal{T}$ parce que X_n est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
$\mathcal{T}$ étant stable par union et intersection dénombrable, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, Z_k appartient à $\mathcal{T}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in [\![k, +\infty[\![$,
$$Z_k \subset \Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 0]\Big) \cup \Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 1]\Big)$$
et donc, par incompatibilité puis indépendance :
$$\begin{aligned} P(Z_k) &\leqslant P\Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 0]\Big) + P\Big(\bigcap_{k \leqslant n \leqslant m} [X_n = 1]\Big) \\ &\leqslant \prod_{n=k}^{m} P([X_n = 0]) + \prod_{n=k}^{m} P([X_n = 1]), \text{ c'est-à-dire :} \end{aligned}$$
$$P(Z_k) \leqslant (1-p)^{m-k+1} + p^{m-k+1}.$$
En passant cette inégalité à la limite quand m tend vers $+\infty$, ce qui se peut puisque $|p| < 1$ et $|1-p| < 1$, on obtient que $P(Z_k) \leqslant 0$ et donc que $P(Z_k) = 0$.

Interprétation : quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, il existe presque sûrement $n_0 \in [\![k, +\infty[\![$ tel que l'événement $[X_{n_0} = 0]$ soit réalisé et il existe presque sûrement $n_1 \in [\![k, +\infty[\![$ tel que l'événement $[X_{n_1} = 1]$ soit réalisé.

2. Comme la fonction L est à valeurs dans $\mathbb{N}$, il suffit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[L = n] \in \mathcal{T}$.
• $[L = 0] = Z_1$ et donc $[L = 0] \in \mathcal{T}$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$[L = n] = \big([X_{n+1} = 1] \cap \bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 0]\big) \cup \big([X_{n+1} = 0] \cap \bigcap\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1]\big)$
donc $[L = n] \in \mathcal{T}$.

La fonction L est donc une variable aléatoire (discrète) sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

D'après ce qui précède, $P([L = 0]) = P(Z_1) = 0$ et, par incompatibilité puis indépendance, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}P([L = n]) &= P([X_{n+1} = 1] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 0]) + P([X_{n+1} = 0] \cap \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant n} [X_k = 1]) \\ &= p(1-p)^n + (1-p)p^n.\end{aligned}$$

D'après le cours, comme $p \in]0,1[$, les séries $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n^2 p^n$ et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n^2 (1-p)^n$ convergent et donc la série à termes positifs $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n^2 P([L = n])$ converge (absolument).

En conséquence, L admet un moment d'ordre 2, donc un moment d'ordre 1 — c'est-à-dire une espérance — ainsi qu'une variance.

3. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^{*2}$,

$$\begin{aligned}[L = n] \cap [M = m] = &\Big(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 0] \cap \bigcap_{k=1}^{m} [X_{n+k} = 1] \cap [X_{n+m+1} = 0]\Big) \\ &\cup \Big(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 1] \cap \bigcap_{k=1}^{m} [X_{n+k} = 0] \cap [X_{n+m+1} = 1]\Big)\end{aligned}$$

et donc, par incompatibilité puis indépendance,

$$P([L = n] \cap [M = m]) = (1-p)^{n+1} p^m + p^{n+1}(1-p)^m.$$

Il s'ensuit que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}P([M = m]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([L = n] \cap [M = m]) \\ &= p^m \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^{n+1} + (1-p)^m \sum_{n=1}^{+\infty} p^{n+1} \\ &= (1-p)^2 p^{m-1} + p^2 (1-p)^{m-1}.\end{aligned}$$

Exactement comme pour L, M admet un moment d'ordre 2, donc une espérance et une variance, et $E(M) = 2$, $E(M^2) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{1-p} - 2$ et $V(M) = \dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{1-p} - 6$.

4. Les lois de L et de M coïncident si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$p(1-p)^n + (1-p)p^n = (1-p)^2 p^{n-1} + p^2 (1-p)^{n-1}$$

relation qui équivaut à $p(2p-1)(1-p)^{n-1} = (1-p)(2p-1)p^{n-1}$ et donc à $(1-p)^{n-2} = p^{n-2}$.
En particularisant pour $n = 3$, on obtient que $p = \dfrac{1}{2}$. Réciproque immédiate.

5. $E(L) = \sum_{n=1}^{+\infty} n(p(1-p)^n + (1-p)p^n) = p\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^n + (1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} np^n$
$= \dfrac{1-p}{p} + \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{1-p} - 2.$

La fonction dérivable sur $]0,1[$ $\varphi : p \mapsto \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{1-p}$ vérifie, pour tout $p \in]0,1[$, $\varphi(1-p) = \varphi(p)$ et $\varphi'(p) = \dfrac{1}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{p^2} < 0$, si et seulement si $p \in]0,1/2[$.
Elle admet donc sur $]0,1[$ un minimum global (strict) au point $1/2$, ce qui implique que

$$E(L) = \varphi(p) - 2 \geqslant \varphi(1/2) - 2 = 2 = E(M).$$

Exercice 3.21.

Une personne possède a jetons numérotés de 1 à a et joue à les lancer *ensemble* indéfiniment. On se propose de calculer le nombre *moyen* de jetons ayant amené au moins une fois « pile » au cours des k premiers lancers, k étant un entier naturel non nul.
Pour $i \in [\![1,a]\!]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on note U_i^k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i amène un « pile » au $k^{\text{ème}}$ lancer et la valeur 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires $(U_i^k)_{1\leqslant i\leqslant a, 1\leqslant k}$ sont indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note Y_k le nombre de jetons ayant amené « pile » pour la première fois lors du $k^{\text{ème}}$ lancer et X_k le nombre de jetons ayant amené au moins une fois « pile » au cours des k premiers lancers ; on note également A_k l'ensemble des éléments i de $[\![1,a]\!]$ tels que les variables aléatoires $U_i^1, U_i^2, \ldots, U_i^{k-1}$ ont toutes pris la valeur 0, avec la convention $A_1 = [\![1,a]\!]$.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j$ et $Y_k = \sum_{i\in A_k} U_i^k$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{card} A_k = a - X_{k-1}$, en notant X_0 la variable aléatoire nulle.
Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$:

$$E(Y_k) = \sum_{j=0}^{a}\Big(P\big([\operatorname{card} A_k = j]\big)\sum_{i=0}^{a} i\,P\big([Y_k = i]/[\operatorname{card} A_k = j]\big)\Big).$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E(X_k) = \dfrac{1}{2}\big(a + E(X_{k-1})\big)$.
Exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k)$ en fonction de k et de a.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1,a]\!]$, on note Z_i^k la variable aléatoire prenant la valeur 1 si le jeton numéro i a amené au moins une fois pile au cours des k premiers lancers, la valeur 0 sinon.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = \sum\limits_{i=1}^{a} Z_i^k$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $Z_1^k, Z_2^k, \dots, Z_a^k$ sont indépendantes.

Trouver, pour tout $i \in [\![1, a]\!]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de Z_i^k.

4. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi de la variable aléatoire X_k. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit la loi binomiale de paramètre $(a, 1 - 2^{-k})$. Retrouver, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'espérance de X_k et calculer sa variance.

Solution :

1. Il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = X_k + Y_{k+1}$ (en notant X_0 la variable aléatoire nulle).

Il s'ensuit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{j=1}^{k} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{k} (X_j - X_{j-1}) = X_k - X_0 = X_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La valeur prise par Y_k est le nombre de pièces ayant amené un 'pile' au k^{e} lancer *parmi celles qui n'en n'avaient encore jamais amené*, c'est-à-dire parmi celles dont le numéro appartient à A_k.

En conséquence, $Y_k = \sum\limits_{i \in A_k} U_i^k$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$: $\operatorname{Card} A_k$ est le nombre de pièces n'ayant jamais amené un 'pile' au cours des $k-1$ premiers lancers et X_{k-1} est le nombre de pièces ayant amené au moins un 'pile' au cours des $k-1$ premiers lancers. Le nombre des pièces étant a, $\operatorname{Card} A_k + X_{k-1} = a$.

Soit un entier $k \geqslant 2$. Il est clair que $P([Y_k \in [\![0, a]\!]) = 1$ et donc que Y_k admet une espérance et que :

$$\begin{aligned} E(Y_k) &= \sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i]) \\ &= \sum_{i=0}^{a} i\Big(\sum_{j=0}^{a} P([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j]) P([\operatorname{Card} A_k = j])\Big) \\ &= \sum_{j=0}^{a} \Big(P([\operatorname{Card} A_k = j]) \sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j])\Big) \end{aligned}$$

Note : si $k = 1$, les événements $[\operatorname{Card} A_k = j]$ sont négligeables sauf si $j = a$. Mais comme Y_1 suit la loi binomiale de paramètres $(a, 1/2)$, $E(Y_1) = \dfrac{a}{2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $k = 1$, comme $X_1 = Y_1$, $E(X_1) = E(Y_1) = \dfrac{a}{2} = \dfrac{1}{2}\big(a + E(X_0)\big)$.

Si $k \geqslant 2$, alors, pour tout $j \in [\![0, a]\!]$, la loi de Y_k conditionnée par l'événement $[\operatorname{Card} A_k = j]$ est binomiale de paramètres $(j, 1/2)$. Il s'ensuit que

$$\sum_{i=0}^{a} iP([Y_k = i] | [\operatorname{Card} A_k = j]) = \frac{j}{2}$$

et donc que :

$$E(Y_k) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{a} j(P([\text{Card}\, A_k = j]) = \frac{1}{2}E(\text{Card}\, A_k) = \frac{1}{2}E(a - X_{k-1})$$
$$= \frac{1}{2}(a - E(X_{k-1})).$$

En conséquence, $E(X_k) = E(Y_k) + E(X_{k-1}) = \frac{1}{2}(a + E(X_{k-1}))$.

La suite de terme général $E(X_k)$ étant arithmético-géométrique de point fixe a et de raison $1/2$, il vient que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E(X_k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)a$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme la valeur prise par X_k est en fait le nombre des variables Z_i^k prenant la valeur 1 (les autres s'annulant), $X_k = \sum_{i=1}^{a} Z_i^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![1, a]\!]$, $Z_i^k = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} U_i^j$.

Les variables aléatoires $(U_i^k)_{1 \leqslant i \leqslant a, k \geqslant 1}$ étant indépendantes, les variables aléatoires $Z_1^k, Z_2^k, \ldots, Z_a^k$ sont donc indépendantes.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![1, a]\!]$.
$[Z_i^k = 0] = \bigcap_{1 \leqslant j \leqslant k} [U_i^j = 0]$ et donc, les variables $(U_i^j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ étant indépendantes, $P([Z_i^k = 0]) = \prod_{j=1}^{k} P([U_i^j = 0]) = \frac{1}{2^k}\cdot$

La variable Z_i^k suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $1 - \frac{1}{2^k}\cdot$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire X_k, somme de a variables de Bernoulli indépendantes et de même loi, suit la loi binomiale de paramètres $(a, 1-2^{-k})$.
D'après le cours, $E(X_k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)a$ et $V(X_k) = \frac{1}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)a$

Exercice 3.22.

Une urne A contient des boules numérotées de 1 à m et une urne B contient des boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans chaque urne. On désigne par X (resp. Y) la variable aléatoire indiquant le numéro de la boule tirée dans l'urne A (resp. B). On pose

$$Z = \frac{X}{Y}.$$

1. Quelles sont les lois suivies par X et Y ?

2. Exprimer, à l'aide d'une somme, l'espérance $E(Z)$ de la variable aléatoire Z.

3. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Si p est un nombre réel, on note $\lfloor p \rfloor$ la partie entière de p.
Soit $l \in \{1, ..., n\}$, montrer que

$$P(Z \in \mathbb{N}/Y = l) = \frac{1}{m}\left\lfloor \frac{m}{l} \right\rfloor$$

Déterminer, à l'aide d'une somme, $P(Z \in \mathbb{N})$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\ln(N+1) < \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} < 1 + \ln(N).$$

En déduire un encadrement de $P(Z \in \mathbb{N})$.

5. a) L'entier m étant fixé, trouver un équivalent de $E(Z)$ lorsque n tend vers l'infini.

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On suppose dans cette question que $n = pm$; donner un équivalent de $P(Z \in \mathbb{N})$ lorsque m tend vers l'infini.

c) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On suppose dans cette question que $m = qn$; donner un équivalent de $P(Z \in \mathbb{N})$ lorsque n tend vers l'infini.

Solution :

1. Il est clair que X (resp. Y) suit la loi uniforme sur $[\![1, m]\!]$ (resp. $[\![1, n]\!]$).

2. On a : $E(Z) = \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\ell=1}^{n} \frac{k}{\ell} P(X = k \cap Y = \ell)$.

Comme les variables X et Y sont indépendantes, il vient :

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{k}{\ell} \frac{1}{m} \frac{1}{n} = \frac{1}{mn} \sum_{k=1}^{m} k \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} = \frac{m+1}{2n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell}$$

3. La partie entière de $\frac{m}{\ell}$ est exactement le nombre de multiples de ℓ qui sont inférieurs ou égaux à m, on a donc bien :

$$P(Z \in \mathbb{N}/Y = \ell) = \frac{1}{m} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor$$

Avec la formule des probabilités totales, on obtient donc :

$$P(Z \in \mathbb{N}) = \sum_{\ell=1}^{n} P(Z \in \mathbb{N}/Y = \ell) = \frac{1}{mn} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor$$

où $m \wedge n$ désigne le plus petit des deux entiers m et n.

4. Par comparaison série–intégrale :

$$\frac{1}{p+1} < \int_{p}^{p+1} \frac{dx}{x} = \ln(p+1) - \ln p < \frac{1}{p}$$

D'où :

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p+1} < \ln(N+1) < \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

et l'encadrement demandé en découle.

Il vient alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \frac{1}{\ell} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) = \frac{1}{mn} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \lfloor \frac{m}{\ell} \rfloor \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{m \wedge n} \frac{1}{\ell} + \frac{m \wedge n}{mn}$$

D'où :

$$\frac{\ln(m \wedge n)}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{\ln(m \wedge n) + 1}{n} + \frac{m \wedge n}{mn}$$

5. a) Avec l'inégalité de la question 4. on a $\ln n \leqslant \ln(n+1) \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leqslant 1 + \ln n$ d'où :

$$\frac{(m+1)\ln n}{2n} \leqslant E(Z) = \frac{m+1}{2n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} \leqslant \frac{(m+1)\ln n}{2n} + \frac{m+1}{2n}$$

On en déduit donc que

$$E(Z) \sim \frac{(m+1)\ln n}{2n}$$

b) On a : $\frac{\ln(m \wedge n)}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{\ln(m \wedge n) + 1}{n} + \frac{m \wedge n}{mn}$ et comme $n = pm$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que :

$$\frac{\ln m}{pm} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{1 + \ln m}{pm} + \frac{1}{pm}$$

Il en résulte que :

$$P(Z \in \mathbb{N}) \underset{(m \to \infty)}{\sim} \frac{\ln m}{pm}$$

c) Si $m = qn$, avec $q \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\frac{\ln n}{n} \leqslant P(Z \in \mathbb{N}) \leqslant \frac{1 + \ln n}{n} + \frac{1}{qn}$$

on voit donc que :

$$P(Z \in \mathbb{N}) \underset{(n \to \infty)}{\sim} \frac{\ln n}{n}$$

Exercice 3.23.

Un immeuble équipé d'un ascenseur comporte m étages, n personnes montent dans l'ascenseur au rez-de-chaussée et descendent aléatoirement à l'un des m étages.
On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre d'arrêts de l'ascenseur.

1. Calculer $E(X)$ sans passer par la loi de X. On pourra utiliser les variables aléatoires de Bernoulli, $X_{i,j}$ valant 1 si le $j^{\text{ème}}$ passager descend au $i^{\text{ème}}$ étage et X_i valant 1 si l'ascenseur s'arrête au $i^{\text{ème}}$ étage.

2. On note $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans une ensemble à k éléments.
Montrer que pour $n \geqslant k \geqslant 2, S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1})$.
En déduire que $S_{n+1,n} = \frac{n}{2}(n+1)!$.

3. Déterminer la loi de X.

4. On suppose que $n = m + 1$, calculer $P(X = m)$.

Solution :

1. Les descentes se faisant au hasard, $X_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(\dfrac{1}{m})$

On a $P(X_i = 0) = P\big(\bigcap_{j=1}^{n}(X_{i,j} = 0)\big) = \big(1 - \dfrac{1}{m}\big)^n$.

Donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\big(1 - 1(1 - \dfrac{1}{m})^n\big)$.

Par suite $E(X_i) = 1 - (1 - \dfrac{1}{m})^n$. Et comme $X = \sum\limits_{i=1}^{m} X_i$:

$$E(X) = m\big(1 - (1 - \frac{1}{m})^n\big)$$

2. Une surjection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments peut être obtenue de deux faons :

$\star$ Le $n^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble de départ a une image déjà atteinte : il y a k choix possibles, donc on obtient $kS_{n-1,k}$ surjections de ce type.

$\star$ Le $n^{\text{ème}}$ élément de l'ensemble de départ a une image non atteinte : il y a k choix possibles pour cette image et en prenant pour ensemble d'arrivée les $(k-1)$ éléments restants, la restriction au départ aux $(n-1)$ premiers éléments est une surjection d'un ensemble de $(n-1)$ éléments dans un ensemble à $(k-1)$ éléments.

Le processus donnant une surjection d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments, on en déduit qu'il y a $kS_{n-1,k-1}$ possibilités de ce type.

D'où la formule :

$$n \geqslant k \geqslant 2 \implies S_{n,k} = k(S_{n-1,k} + S_{n-1,k-1}).$$

On a $S_{n,n} = n!$, $S_{2,1} = 1$ et la formule de récurrence $S_{n+1,n} = n(S_{n,n} + S_{n,\, n-1})$. D'où :

$$S_{n+1,n} = \sum_{k=1}^{n} kn! = \frac{n}{2}(n+1)!$$

3. Un parcours de l'ascenseur est une application d'un ensemble à n éléments (les n passagers) vers un ensemble à m éléments (les m étages). Il y en a donc m^n distinctes qui sont équiprobables. S'il y a k arrêts à des étages prédéterminés, c'est qu'on a une surjection (en supposant que les passagers descendent tous) sur ces étages, donc $S_{n,k}$ situations possibles, comme il y a $\dbinom{m}{k}$ choix de k étages parmi m, il y a $\dbinom{m}{k}S_{n,k}$ possibités en tout, donc :

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}S_{n,k}}{m^n},\ 1 \leqslant k \leqslant \min(n, m).$$

$$P(X = m) = \frac{m(m+1)!}{2m^{m+1}}.$$

Exercice 3.24.

On considère :

$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ et $\mathcal{T} = \{(x, y) \in \mathcal{C} \ / \ 0 \leqslant y \leqslant x\}$.

1. Pour tout point $M = (x, y) \in \mathcal{T}$, déterminer les coordonnées du point situé sur les côtés du carré $\mathcal{C}$ dont la distance à M est minimum.

2. Déterminer l'ensemble $\mathcal{P}$ des points de $\mathcal{T}$ dont la distance à l'origine est inférieure à la distance à la frontière de $\mathcal{C}$. Tracer l'ensemble de ces points.

3. Calculer l'aire de $\mathcal{P}$.

4. On lance une flèche sur une cible carrée représentée par $\mathcal{C}$. On suppose que la probabilité d'atteindre une région donnée de la cible est proportionnelle à l'aire de cette région. Déterminer la probabilité que le point d'impact de la flèche soit plus proche du centre que du bord de la cible.

Solution :

1. Le point le plus proche de M sur le côté est du carré est le point de coordonnées $(1, y)$. Il se trouve à une distance de $(1 - x)$ de M.
De même le point le plus proche de M sur le côté ouest du carré est le point de coordonnées $(-1, y)$. Il se trouve à une distance de $(1 + x)$ de M (avec $x > 0$.
Le point le plus proche de M sur le côté nord du carré est le point de coordonnées $(x, 1)$ qui se trouve à une distance de $(1-y)$ de M (avec $y \leqslant x$).
Le point le plus proche de M sur le côté sud du carré est le point de coordonnées $(x, -1)$ qui se trouve à une distance de $(1 + y)$ de M.
La distance la plus courte est $(1-x)$, c'est donc le point de coordonnées $(1, y)$ qui est le plus proche de M.

2. Soit $M(x, y) \in \mathcal{T}$, sa distance au contour de $\mathcal{C}$ vaut $(1 - x)$ et sa distance à l'origine $\sqrt{x^2 + y^2}$.
Ainsi, $M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $x^2 + y^2 \leqslant (1 - x)^2$, c'est-à dire, suivant les hypothèses, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - 2x}$. l'ensemble $\mathcal{C}$ est délimité par une portion de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - 2x}$, un segment de la première bissectrice et le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de l'axe des abscisses. La courbe C_f et la première bissectrice se rencontrent au point de coordonnées (x_0, x_0) où $x_0^2 = 1 - 2x_0$.
On trouve $x_0 = \sqrt{2} - 1$.

3. La région $\mathcal{P}$ est la réunion du triangle plein de sommets, l'origine, le point de coordonnées (x_0, x_0) et le point de coordonnées $(x_0, 0)$, et de la région $\mathcal{R}$ située au dessous de C_f entre les abscisses x_0 et $\frac{1}{2}$.

Le triangle a pour aire : $\dfrac{x_0^2}{2} = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}$.
La région $\mathcal{R}$ a une aire égale à :

$$\int_{x_0}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-2x}dx = \Big[-\frac{1}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}\Big]_{x_0}^{\frac{1}{2}} = \frac{x_0^3}{3} = \frac{5\sqrt{2}-7}{3}.$$

Au total, l'aire de $\mathcal{P}$ vaut $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{5\sqrt{2}-7}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}-5}{6}$.

4. Avec les symétries que présente le problème, l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ les plus proches du centre de la cible que de son contour a une aire égale à 8 fois celle de $\mathcal{P}$. L'aire de $\mathcal{C}$ valant 4, la probabilité que le point d'impact soit plus proche du centre que du contour de $\mathcal{C}$ vaut deux fois l'aire de $\mathcal{P}$ c'est à dire : $\dfrac{4\sqrt{2}-5}{3} \simeq 0.219$.

Exercice 3.25.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dispose de $(r+1)$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_r$, contenant chacune r boules. Pour tout $j, j \in \{0, \dots, r\}$, l'urne U_j contient j boules rouges, les autres étant bleues.
Un joueur, les yeux bandés, choisit une urne au hasard et effectue dans cette urne n tirages d'une boule, avec remise de la boule tirée à la fin de chaque tirage (les boules sont supposées être indiscernables au toucher, les tirages sont donc mutuellement indépendants). Il gagne 1 euro par boule rouge obtenue.
On note G_r le gain total obtenu à l'issue des n tirages.

1. Déterminer, sous forme de somme, la loi de probabilité de la variable aléatoire G_r et sa fonction de répartition F_r.

2. Calculer l'espérance de G_r.

3. Soit $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,dx$, pour $k \in \{0, \dots,\ n\}$. Calculer I_0 et en utilisant une relation entre I_k et I_{k+1}, calculer les autres intégrales.

4. En déduire $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} P(G_r = k)$.

5. La suite $(G_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

Solution :

1. $G_r(\Omega) = \{0, \dots,\ n\}$. Soit $j \in \{0, \dots,\ n\}$, les événements, notés aussi U_j, « le tirage se fait dans l'urne U_j » forment un système complet d'événements, d'où :

$$P(G_r = k) = \sum_{j=0}^{r} P(G_r = k/U_j)P(U_j).$$

Or $P(U_r) = \dfrac{1}{r+1}$ et $P(G_r = k|U_j) = \dbinom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

D'où : $P(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, F_r(x) = \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{[x]}\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}.$$

2. $E(G_r) = \sum_{k=0}^{n} kP(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$.

D'où :

$$E(G_r) = \frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} n\frac{j}{r} = \frac{n}{2}.$$

3. $I_0 = \dfrac{1}{n+1}$ et $\forall\, k \in \{0,\dots,\ n-1\}, I_{k+1} = \dfrac{k+1}{n-k}I_k$. D'où

$$I_k = \frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)}.$$

4. $P(G_r = k) = \dfrac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r} f_k\big(\frac{j}{r}\big)$ où $f_k(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.

On écrit $P(G_r = k) = \dfrac{r}{r+1}\times\dfrac{1}{r}\sum_{j=0}^{r-1} f_k\big(\frac{j}{r}\big)$ (car $f_k(1) = 0$).

On reconnaît une somme de Riemann. D'où $\lim_{r\to+\infty} P(G_r = k) = \binom{n}{k}I_k$.

Par suite, $\forall\, k \in \{0,\dots,n\}$ $\lim_{r\to+\infty} P(G_r = k) = \dfrac{1}{n+1}$.

D'où $\lim_{r\to+\infty} F_r(x) = \begin{cases} \dfrac{[x]}{n+1} & \forall\, x \in [0,n] \\ 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La suite G_r converge en loi vers la loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$.

Exercice 3.26.

Dans cet exercice, f désigne une densité de probabilité. On suppose que f est nulle sur $]-\infty,0[$, continue sur $[0,+\infty[$ et que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} xf(x)\,dx$ est convergente.

1. Un client se présente à un automate pour y effectuer un retrait d'argent. On suppose que l'instant d'arrivée X de ce client à partir d'un instant initial 0 est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle $]0,t]$, (où t est un réel strictement positif fixé), que ce client peut utiliser le distributeur immédiatement, et qu'il se sert de cet automate pendant une durée aléatoire Y, indépendante de X et qui admet pour densité f.

On note p_t la probabilité que ce client soit encore en train d'utiliser l'appareil à l'instant t.

a) On note F la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et g une densité de la variable aléatoire $X+Y$. Donner une expression de $g(z)$ pour z compris entre 0 et t en fonction de $F(z)$ et de t.

b) En déduire que $P(X+Y \leq t) = F(t) - \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t z f(z)\,dz$.

c) Montrer que $tP(Y > t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

d) En déduire que $t{\times}p_t$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$ (limite que l'on interprétera à l'aide de la variable aléatoire Y).

2. Un hall contient un grand nombre d'automates. On se fixe un instant initial 0 et pour tout réel $t > 0$, on note :
$\star$ C_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes se présentant à l'un des automates entre les instants 0 et t ;
$\star$ D_t la variable aléatoire égale au nombre de personnes encore en train d'utiliser un automate à l'instant t.
On suppose que pour tout réel $t > 0$,
$\star$ C_t suit une loi de Poisson de paramètre λt (avec $\lambda > 0$ réel fixé) ;
$\star$ conditionnellement à $(C_t = n)$ la loi de D_t est binomiale de paramètres n et p_t, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$, p_t ayant la même valeur que dans la question précédente.

a) Déterminer la loi de la variable aléatoire D_t.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi quand n tend vers $+\infty$ et préciser la loi limite ainsi que son espérance.

Solution :

1. a) $g(z) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{t} f(z-u)\,du = 1_{z\geqslant 0}\int_0^{\min(t,z)} \frac{1}{t} f(z-u)\,du$ donc si $0 \leqslant z \leqslant t$,

$$g(z) = \int_0^z \frac{1}{t} f(z-u)\,du \underset{v=z-u}{=} \int_0^z \frac{1}{t} f(v)\,dv = \frac{F(z)}{t}$$

b) $P(X+Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t g(z)\,dz = \frac{1}{t}\int_0^t F(z)\,dz.$

donc en intégrant par parties, ce qui est licite car f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$P(X+Y \leqslant t) = \frac{1}{t}\Big\{\big[zF(z)\big]_0^t - \int_0^t zf(z)\,dz\Big\} = F(t) - \frac{1}{t}\int_0^t zf(z)\,dz$$

c) $0 \leqslant tP(Y > t) = t\displaystyle\int_t^{+\infty} f(z)\,dz \leqslant \int_t^{+\infty} zf(z)\,dz$ et ce majorant est fini et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ par convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} zf(z)\,dz$.

d) $tp_t = tP(X+Y>t)$ donc d'après b), $tp_t = tP(Y>t) + \int_0^t zf(z)\,dz$ donc tend vers $\int_0^{+\infty} zf(z)\,dz = E[Y]$ quand t tend vers $+\infty$.

2. a) D_t suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda t p_t$ car, pour tout entier naturel k :

$$\begin{aligned}
P(D_t = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(D_t = k | C_t = n) P(C_t = n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} p_t^k (1-p_t)^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p_t^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p_t)^{n-k}}{(n-k)!} (\lambda t)^n \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda t} \frac{p_t^k}{k!} (\lambda t)^k \mathrm{e}^{\lambda t(1-p_t)} = \mathrm{e}^{-\lambda t p_t} \frac{(\lambda t p_t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(D_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda n p_n} \frac{(\lambda n p_n)^k}{k!}$ tend vers $\mathrm{e}^{-\lambda E[Y]} \frac{(\lambda E[Y])^k}{k!}$ quand n tend vers $+\infty$ d'après 1. d).

Donc (D_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\lambda E[Y]$ qui a pour espérance $\lambda E[Y]$.

Exercice 3.27.

Dans cet exercice, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. On suppose que ces variables aléatoires sont toutes à valeurs dans $[0,1]$ et de même loi uniforme sur cet intervalle.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \Omega$, on pose

$$Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

1. Montrer que Y_n est une variable aléatoire, déterminer sa loi, son espérance et sa variance.

2. a) Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, déterminer $\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n - 1| \geqslant \varepsilon)$.

3. a) Montrer que pour tout ω de Ω, la suite $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note $Y(\omega) = \lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$B_{n,\varepsilon} = \big(|Y_n - 1| \leqslant \varepsilon\big) = \{\omega \in \Omega \,/\, |Y_n(\omega) - 1| \leqslant \varepsilon\}$$

et

$$B_\varepsilon = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_{n,\varepsilon}$$

Calculer $P(B_\varepsilon)$ puis $P\big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{\frac{1}{k}}\big)$.

c) En déduire qu'il existe $\Omega' \in \mathcal{B}$ de probabilité égale à 1 tel que :

$$\forall \omega \in \Omega', Y(\omega) = 1.$$

Solution :

1. Pour tout réel t, $(Y_n \leqslant t) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant t) \in \mathcal{B}$, puisque pour chaque k, $(X_k \leqslant t)$ appartient à $\mathcal{B}$. Donc Y_n est une variable aléatoire réelle.
De plus :

$$P(Y_n \leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Donc Y_n admet une densité f_n définie par : $f_n(t) = \begin{cases} nt^{n-1} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\star$ $E(Y_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, dt = \int_0^1 nt^n\, dt = \frac{n}{n+1}$,

$\star$ De même $E(Y_n^2) = \dfrac{n}{n+2}$ d'où $V(Y_n) = \dfrac{n}{(n+1)^2(n+2)}$

2. Pour tout t réel, $P(Y_n \leqslant t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$, on en déduit que (Y_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 1.

D'autre part, $\forall \varepsilon > 0, P(|Y_n - 1| > \varepsilon) = P(Y_n < 1 - \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc (Y_n) converge également en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

3. a) Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(Y_n(\omega))$ est croissante, majorée par 1, donc convergente.

b) La suite $(B_{n,\varepsilon})$ est croissante et $P(B_{n,\varepsilon}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, d'après la question précédente, donc $P(B_\varepsilon) = 1$.

De même $P(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{1/k}) = \lim_{p\to\infty} P(\bigcap_{1\leqslant k\leqslant p} B_{1/k}) = 1$.

c) Posons $\Omega' = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B_{1/k}$, alors d'après b) , on a $P(\Omega') = 1$.

De plus si $\omega \in \Omega'$ et $\varepsilon > 0$, considérons un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{k} < \varepsilon$.
On a $\omega \in B_{1/k}$ et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \in B_{n_0,1/k}$. On a alors $|Y_{n_0}(\omega) - 1| \leqslant \dfrac{1}{k} < \varepsilon$, donc $\forall n \geqslant n_0, |Y_n(\omega) - 1| < \varepsilon$, ce qui prouve que $Y_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, *i.e.* $Y(\omega) = 1$.

Exercice 3.28.

1. Tracer le graphe de la fonction définie pour $x > 0$ par $h(x) = x \ln(x)$ et montrer qu'elle peut se prolonger par continuité en $x = 0$.

2. Démontrer la relation
$$\forall(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \ \ h(x) \geqslant h(y) + (1+\ln(y))(x-y)$$
et en donner une interprétation géométrique.

3. Une variable aléatoire X admettant une densité continue f satisfait la condition $(*)$ si f vérifie les deux propriétés :

$E(X^2) = 1,$

$H(f_X) = -\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (h \circ f)(t)\, dt$ existe.

Montrer que si $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$, Z satisfait la condition $(*)$ et calculer $H(f_Z)$ que l'on notera H_0.

4. Montrer que si X satisfait la condition $(*)$, $H(f_X) \leqslant H_0$.

5. Soient a, b deux réels vérifiant $a < b$ et Y_0 suivant une loi uniforme sur $[a,b]$. Trouver une variable Y de la forme $Y = \lambda Y_0$ (avec $\lambda > 0$) vérifiant la condition $(*)$ et calculer $H(f_Y)$. Peut-on trouver a et b tel que $H(f_Y) > H_0$?

Solution :

1. La fonction h est bien connue ; son graphe admet une tangente verticale en 0^+, un *minimum* global en $x = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et est convexe. On a $h'(x) = 1 + \ln x$.

2. C'est une manière d'écrire la convexité de h.

3. Soit f_0 la densité (continue) d'une variable suivant une loi normale centrée réduite. On a :
$$-h \circ f_0(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-t^2/2}\big(\ln(2\pi) + t^2\big)$$
d'où l'on tire immédiatement :
$$H_0 = \frac{1}{2}(\ln(2\pi)E(1) + E(X^2)) = \frac{1}{2}(\ln(2\pi) + 1).$$

4. La fonction $g = -h$ vérifie $g(x) \leqslant g(y) + g'(y)(x-y)$ pour tous $x, y > 0$; en posant $x = f(t)$, $y = f_0(t)$, il vient :
$$g(f(t)) \leqslant g(f_0(t)) + (1 - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi))(f(t) - f_0(t))$$
Cette relation intégrée devient :
$$H(f) \leqslant H_0 + (1 - \frac{1}{2}\ln(2\pi))(E(1) - E(1)) - \frac{1}{2}(E(X^2) - E(Z^2)) = H_0$$
donc l'entropie est maximale pour la loi normale centrée réduite parmi les variables ayant un moment d'ordre 2 vérifiant $E(X^2) = 1$ et telles que $f_X \ln f_X$ est intégrable.

5. $E(Y_0^2) = \dfrac{b^2 + ab + a^2}{3}$ donc $Y = \dfrac{\sqrt{3}Y_0}{\sqrt{b^2 + ab + a^2}}$ est la variable cherchée.

Une densité de λY_0 est $\dfrac{1}{\lambda(b-a)}$ sur $]a,b[$, donc $H(f_Y) = \dfrac{\ln(\lambda(b-a))}{\lambda} = \dfrac{b}{2\sqrt{3}}\ln 3$ si l'on suppose $a = 0$ (ce qui n'est pas restrictif) et cette quantité peut excéder H_0.

Exercice 3.29.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = P(X = n)$.

On appelle *fonction génératrice* de X la fonction de la variable réelle t définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$$

1. a) Montrer que $G_X(t)$ est défini pour tout $t \in [0,1]$.

b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On admet que si la série dérivée terme à terme r fois (c'est–à–dire la série $\sum n(n-1)\cdots(n-r+1)p_n t^{n-r}$) converge en un point $t \in [0,1]$, alors on a :

$$\sum_{n=r}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-r+1)p_n t^{n-r} = (G_X)^{(r)}(t)$$

où $G_X^{(r)}$ désigne la dérivée d'ordre r de G_X.

Montrer que X admet une espérance si et seulement si la série dérivée terme à terme une fois converge en $t = 1$.

2. a) Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Retrouver son espérance à l'aide de la question précédente.

b) En déduire pour $r \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$ la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$.

3. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Exprimer G_{X+Y} en fonction de G_X et G_Y.

4. On considère une succession de lancers indépendants d'une pièce pouvant amener Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1-p$.

On pose $T_0 = 0$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on appelle T_r la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour amener r fois Pile. On pose enfin $Z_r = T_r - T_{r-1}$.

a) Déterminer la loi de Z_r.

b) En déduire la fonction génératrice de T_r.

c) On admet que : $\left[(\forall t \in [0,1])\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = 0\right] \Longrightarrow [(\forall k \in \mathbb{N})\ a_k = 0]$

Déterminer la loi de T_r. Calculer son espérance de deux façons différentes.

Solution :

1. a) Pour $t \in [0,1], 0 \leqslant p_n t^n \leqslant p_n$, et p_n est le terme général d'une série convergente (de somme 1). Par comparaison, la série de terme général $p_n t^n$ converge pour tout t de $[0,1]$.

b) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général np_n converge, soit si et seulement si la série dérivée terme à terme $\sum np_n t^{n-1}$ converge pour $t=1$ et on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = G'_X(1)$$

2. a) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a, pour $0 \leqslant t < \dfrac{1}{q}$:

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=1}^{\infty}(qt)^{k-1} = \frac{pt}{1-qt}$$

Alors : $G'_X(t) = \dfrac{p}{(1-qt)^2}$ et $E(X) = G'_X(1) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}$.

b) En dérivant terme à terme r fois la série de somme $G_X(t)$, on trouve :

$$\sum_{k\geqslant r} \frac{d^r}{dt^r}[pq^{k-1}t^k] = pq^{r-1}\sum_{k\geqslant r} k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r}$$

cette série étant convergente pour $t \in [0,1]$, car $q \in]0,1[$ et

$$0 \leqslant k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r} \sim k^r(qt)^{k-r} = o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

par croissances comparées.
Alors, par récurrence :
$G_X^{(r)}(t) = \dfrac{r!pq^{r-1}}{(1-qt)^{r+1}} = pq^{r-1}\displaystyle\sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\dots(k-r+1)(qt)^{k-r}$, soit :

$$\frac{r!pq^{r-1}}{(1-qt)^{r+1}} = r!pq^{r-1}\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}(qt)^{k-r}$$

Soit, en posant $x = qt \in [0,1]$:

$$\sum_{k=r}^{\infty}\binom{k}{r}x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}$$

3. Pour $t \in [0,1]$, on a par indépendance de t^X et t^Y :

$$G_{X+Y}(t) = E(t^{X+Y}) = E(t^X t^Y) = E(t^X)E(t^Y)$$

Soit

$$G_{X+Y} = G_X G_Y$$

4. a) La variable aléatoire T_r représente le temps d'attente du $r^{\text{ème}}$ pile, tandis que la différence $Z_r = T_r - T_{r-1}$ représente le nombre de lancers effectués entre le $(r-1)^{\text{ème}}$ pile (exclu) et le $r^{\text{ème}}$ (inclus). Z_r suit donc la même loi que le temps d'attente du premier pile, soit :

$$Z_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

b) Comme $T_r = \sum_{k=1}^{r} Z_k$, somme de variables indépendantes, on a par récurrence à partir de la question 3, pour tout $t \in [0,1]$:

$$G_{T_r}(t) = \prod_{k=1}^{r} G_{Z_k}(t) = \prod_{k=1}^{r} G_Z(t) = [G_Z(t)]^r = \big(\frac{pt}{1-qt}\big)^r$$
$$= (pt)^r \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} (qt)^{k-r+1} = \sum_{k=r-1}^{\infty} \binom{k}{r-1} p^r q^{k-r+1} t^{k+1}.$$

Soit, en changeant d'indice :

$$G_{T_r}(t) = \sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} t^n$$

c) Comme $G_{T_r}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_r = n) t^n$, par l'unicité admise :

$$P(T_r = n) = \begin{cases} \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} & \text{pour } n \geqslant r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\star$ Comme $Z_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, on a $E(Z_r) = \dfrac{1}{p}$ et $E(T_r) = \sum_{k=1}^{r} E(Z_k) = \dfrac{r}{p}$.

$\star$ D'autre part :

$$E(T_r) = G'_{T_r}(1) = \Big[\big(\frac{pt}{1-qt}\big)^r\Big]'_{t=1} = \Big[\big(r\frac{pt}{1-qt}\big)^{r-1} \frac{p}{(1-qt)^2}\Big]_{t=1}$$
$$= r\big(\frac{p}{1-q}\big)^{r-1} \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{r}{p}.$$

Exercice 3.30.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à valeurs dans l'intervalle $[0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$q_n = \prod_{k=0}^{n} (1-u_k) = (1-u_0)(1-u_1)\cdots(1-u_n)$$

On dira que le produit $\prod(1-u_k)$ est convergent si la suite (q_n) admet une limite $\ell > 0$. On notera alors $\ell = \prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$.

a) Étudier la convergence et calculer éventuellement la limite des produits suivants :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{k+2}\big), q_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\big)$$

b) On revient maintenant au cas général. Montrer que si le produit $q_n = \prod_{k=0}^{n}(1-u_k)$ converge, alors $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.

c) En déduire que le produit (q_n) converge si et seulement si la série $\sum u_k$ converge.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $P(X \geqslant n) > 0$.
On appelle *taux de panne* associé, la suite réelle (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$x_n = P(X = n \mid X \geqslant n)$$

a) Exprimer $P(X \geqslant n)$ en fonction des x_k et en déduire $p_n = P(X = n)$.

b) Déterminer les lois des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant un taux de panne constant sur $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer qu'une suite $(x_k)_{k \geqslant 0}$ est un taux de panne si et seulement si $0 \leqslant x_k < 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum x_k$ diverge.

Solution :

1. a) $\star$ $p_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{k+2}\big) = \prod_{k=0}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (le produit est donc divergent).

$\star$ $q_n = \prod_{k=0}^{n} \big(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\big) = \prod_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \frac{n+3}{2(n+2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ (le produit est donc convergent).

b) On peut écrire ici : $1 - u_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

c) On a $\ln q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(1 - u_k)$.

$\star$ Si $q_n \longrightarrow L > 0$, alors la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge vers $\ln L$, comme u_n tend vers 0, on a $\ln(1 - u_n) \sim -u_n$ et par la règle d'équivalence (u_n est de signe fixe), la série de terme général u_n est convergente.

$\star$ Réciproquement, si la série de terme général u_n est convergente ; alors u_n tend vers 0, et par l'équivalent précédent, la série de terme général $\ln(1-u_n)$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, puis (q_n) converge vers $L = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - u_k) \text{ converge} \iff \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ converge}$$

2. a) Comme :

$$1 = P(X \geqslant n / X \geqslant n) = P(X \geqslant n+1 / X \geqslant n) + P(X = n / X \geqslant n)$$

il vient :

$$1 - x_n = \frac{P[(X \geqslant n+1) \cap (X \geqslant n)]}{P(X \geqslant n)} = \frac{P(X \geqslant n+1)}{P(X \geqslant n)}$$

d'où :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k) = \frac{P(X \geqslant n)}{P(X \geqslant 0)} = P(X \geqslant n)$$

puis :

$$p_n = P(X \geqslant n) - P(X \geqslant n+1) = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k)$$

b) $\star$ Si $x_n = x$, alors $p_0 = x_0 = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p_n = P(X = n) = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k) = x(1-x)^{n-1} \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$$

$\star$ Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(x)$, on a $P(X=0) = 0$, d'où $x_0 = 0$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X = n) = pq^{n-1},\ P(X \geqslant n) = q^{n-1},\ x_n = \frac{P(X = n)}{P(X \geqslant n)} = p$$

Ainsi le taux de panne est constant si et seulement si X suit une loi géométrique.

c) $\star$ Un taux de panne vérifie :

$x_n = P(X = n / X \geqslant n) \geqslant 0$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k) = P(X \geqslant n) > 0$ impose $x_k \neq 1$, donc $0 \leqslant x_k < 1$.

D'autre part, comme les événements $(X \geqslant n)$ forment une suite décroissante pour l'inclusion d'intersection vide, on a : $\prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k) = P(X \geqslant n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et le produit infini diverge, d'où $\sum x_k$ aussi.

$\star$ Réciproquement, étant donnée une telle suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on montre que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = x_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k) = x_n q_{n-1} = q_{n-1} - q_n$$

(en posant $q_{-1} = 1$) définit une probabilité sur $\mathbb{N}$.

En effet, on a bien $0 \leqslant p_n < 1$ pour tout n. De plus la divergence de $\sum x_k$ entraîne que le produit (q_n) n'est pas convergent, or la suite (q_n) est positive décroissante, donc (q_n) est de limite nulle et $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 - q_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.