Correction du DM10

PROBLEME

Partie I

1.(a) On pose $m = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \geqslant 0$

Par l'absurde on suppose $m \neq 0$ donc $m > 0$.

On se donne $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $m = |x_{i_0}|$.

Comme $AX = O_{n,1}$ on obtient à la ligne i_0 :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \times x_j = 0 \text{ et donc } a_{i_0,i_0} \times x_{i_0} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} \times x_j$$

Donc : $$|a_{i_0,i_0}| \times m = \left|\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}| \times |x_j|$$

$$\leqslant m \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Comme $m > 0$: $$|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Ceci contredit le fait que A est à diagonale strictement dominante. Donc $m = 0$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$. Donc $X = O_{n,1}$.

On a montré que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}), \left(AX = O_{n,1} \Longrightarrow X = O_{n,1}\right)$$

1.(b)
Le théorème on peut en déduire que A est inversible.

2.(a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$|a_{i,i}| = a_{i,i} > 0$$

et $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| = -\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{i,j}$ car $a_{i,j} \leq 0$ donc $|a_{i,j}| = -a_{i,j}$

$$= a_{i,i} - \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$$

$$< a_{i,i} \quad \text{car} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} > 0$$

donc : $\displaystyle |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Ceci prouve que A est à diagonale strictement dominante et donc A est inversible.

2.(b) La i_0-ième coordonnée de AX est positive :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}\, x_j \geq 0$$

Mais $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $x_j \geqslant x_{i_0}$

et si $j \neq i_0$: $a_{i_0,j} \leqslant 0$ donc $a_{i_0,j} \cdot x_j \leqslant a_{i_0,j} \cdot x_{i_0}$

On somme ces inégalités :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j} \cdot x_j \leqslant x_{i_0} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i_0}}^{n} a_{i_0,j}$$

On ajoute $a_{i_0,i_0} \cdot x_{i_0}$ aux deux membres :

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} \cdot x_j \leqslant x_{i_0} \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j}$$

Comme $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} > 0$ on a $x_{i_0} \geqslant 0$.

Or $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \geqslant x_{i_0}$

donc $\underline{\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant 0}$.

<u>2. (c)</u> On multiplie A par la j-ième colonne de A^{-1}.

On obtient la j-ième colonne de $A \times A^{-1}$.

Or $A \times A^{-1} = I_n$.

Donc on obtient <u>la j-ième colonne de I_n</u> : $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-ième ligne}$

2.(d) Donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ les coefficients de la matrice colonne $A_\alpha \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$ sont positifs.

D'après 2.(b) on en déduit que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$ la j-ème colonne de A^{-1} a tous ses coefficients positifs.

Donc tous les coefficients de A^{-1} sont positifs.

2.(e) $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -1 & 0 \\ -1 & 2+\alpha & -1 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$

A_α vérifie la propriété (P) car : $\begin{cases} 1+\alpha > 0 \text{ et } 2+\alpha > 0 \\ -1 \leq 0 \text{ et } 0 \leq 0 \\ \alpha > 0 \end{cases}$

On met la matrice A_α sous forme échelonnée réduite :

$A_\alpha \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2+\alpha & -1 \\ 1+\alpha & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$

$A_\alpha \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2+\alpha & -1 \\ 0 & \alpha^2+3\alpha+1 & -(1+\alpha) \\ 0 & -1 & 1+\alpha \end{pmatrix}$ $L_2 \leftarrow L_2 + (1+\alpha)L_1$

$A_\alpha \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2+\alpha & -1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1+\alpha \\ 0 & \alpha^2+3\alpha+1 & -(1+\alpha) \end{pmatrix}$ $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$A_\alpha \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & \alpha^2+3\alpha+1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1+\alpha \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + (2+\alpha)L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\alpha^2+3\alpha+1)L_2 \end{array}$$

⚠ $\alpha(\alpha+2)^2 \neq 0$ donc c'est bien un pivot (car $\alpha > 0$)

$$A_\alpha \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-\alpha(\alpha+3)} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \alpha(\alpha+1)(\alpha+3)L_1 - (\alpha^2+3\alpha+1)L_3 \\ L_2 \leftarrow \alpha(\alpha+3)L_2 - L_3 \end{array}$$

on a trois pivots car $\alpha > 0$

$A_\alpha \underset{L}{\sim} I_3$ en terminant par $L_1 \leftarrow \dfrac{-1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} L_1$

$L_2 \leftarrow \dfrac{-1}{\alpha(\alpha+3)} L_2$

$L_3 \leftarrow \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} L_3$

Pour calculer A_α^{-1} on effectue les mêmes opérations sur I_3.

$$I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + (1+\alpha)L_1$$

$$\underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2+\alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & \alpha^2+3\alpha+1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + (2+\alpha)L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + (\alpha^2+3\alpha+1)L_2 \end{matrix}$$

$$I_3 \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -(\alpha^2+3\alpha+1) & -(1+\alpha) & -1 \\ -1 & -(1+\alpha) & -1 \\ 1 & 1+\alpha & \alpha^2+3\alpha+1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \alpha(\alpha+1)(\alpha+3)L_1 - (\alpha^2+3\alpha+1)L_3 \\ L_2 \leftarrow \alpha(\alpha+3)L_2 - L_3 \end{matrix}$$

En conclusion :

$$\boxed{A_\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)} \times \begin{pmatrix} \alpha^2+3\alpha+1 & \alpha+1 & 1 \\ \alpha+1 & (\alpha+1)^2 & \alpha+1 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha^2+3\alpha+1 \end{pmatrix}}$$

On remarque que les coefficients sont bien positifs.

Partie II

1.(a) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$0 \leq |x_i^{(k)} - x_i| \leq m(X_k - X)$

Donc si $\lim\limits_{k\to+\infty} m(X_k - X) = 0$

alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = x_i$ par encadrement,

donc (X_k) converge vers X.

Réciproquement on suppose que (X_k) converge vers X.

On a donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_i^{(k)} = x_i$

donc $\forall i \in [\![1,n]\!], \lim\limits_{k\to+\infty} |x_i^{(k)} - x_i| = 0$

Mais on a : $0 \leqslant m(X_k - X) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|$

et par somme de limites : $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i| = 0$

donc par encadrement : $\lim\limits_{k\to+\infty} m(X_k - X) = 0$.

Ainsi : $\boxed{(X_k) \text{ converge vers } X \iff \lim\limits_{k\to+\infty} m(X_k - X) = 0}$

1.(b) On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} s(M_k - M) = 0$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a :

$0 \leqslant |m_{i,j}^{(k)} - m_{i,j}| \leqslant s(M_k - M)$

donc par encadrement : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \lim\limits_{k\to+\infty} |m_{i,j}^{(k)} - m_{i,j}| = 0$

Donc la suite (M_k) converge vers M.

Réciproquement on suppose que (M_k) converge vers M.

On a donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \lim\limits_{k\to+\infty} |m_{i,j}^{(k)} - m_{i,j}| = 0$

et donc par somme de limites : $\lim\limits_{k\to+\infty} s(M_k - M) = 0$

Donc : $\boxed{\text{la suite } (M_k) \text{ converge vers } M \iff \lim_{k\to+\infty} s(M_k - M) = 0}$ (8)

1.(c) Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la i-ème ligne de MX est $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \cdot x_j$. De plus :

$$\left|\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} \times x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}| \times |x_j| \leqslant m(X) \times \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$$

$$\leqslant m(X) \times s(M)$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$m(MX) \leqslant s(M) \times m(X)$$

1.(d) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$0 \leqslant m(M_k X - MX) = m((M_k - M) \times X) \leqslant s(M_k - M) \times m(X)$$

donc si $\lim_{k\to+\infty} s(M_k - M) = 0$ alors $\lim_{k\to+\infty} m(M_k X - MX) = 0$

Donc si (M_k) converge vers M alors pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(M_k X)$ converge vers MX.

1.(e) On suppose que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ on a

$$\lim_{k \to +\infty} m(M_k X - MX) = 0.$$

Pour $j \in [\![1, n]\!]$ on pose $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-ième ligne

alors $(M_k - M)X$ donne la j-ième colonne de $M_k - M$.

On a donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\lim_{k \to +\infty} m_{i,j}^{(k)} = m_{i,j}$

Ceci étant vrai pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on en déduit que (M_k) converge vers M.

1.(f) Pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$: $(MN)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} M_{i,k} \times N_{k,j}$

donc $|(MN)_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |M_{i,k}| \times |N_{k,j}|$

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |(MN)_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |M_{i,k}| \times |N_{k,j}| \right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} |M_{i,k}| \times \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} |N_{k,j}| \right)}_{\leqslant s(N)}$$

donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} |(MN)_{i,j}| \leqslant s(N) \times \sum_{k=1}^{n} |M_{i,k}|$

On somme ces inégalités pour i allant de 1 à n :

$$s(MN) \leqslant s(N) \times \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |M_{i,k}| \right) = s(N) \times s(M)$$

Ainsi : $\underline{s(MN) \leqslant s(M) \times s(N)}$

<u>1.(g)</u> Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$|y_i + z_i| \leqslant |y_i| + |z_i| \leq m(Y) + m(Z)$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\underline{m(Y+Z) \leqslant m(Y) + m(Z)}$$

On a donc $m(Y) = m(Z + Y - Z) \leq m(Z) + m(Y-Z)$

ie $m(Y) - m(Z) \leq m(Y-Z)$

De même : $m(Z) - m(Y) \leqslant m(Z-Y) = m(Y-Z)$

Donc : $\underline{|m(Y) - m(Z)| \leq m(Y-Z)}$

<u>2.(a)</u> On a :

$$M_k^{-1}X - M^{-1}X = M^{-1} \times M \times M_k^{-1} \times X - M^{-1} \times M_k \times M_k^{-1} \times X$$

$$= M^{-1} \times (M - M_k) \times M_k^{-1}X$$

Donc $m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leqslant s(M^{-1} \times (M - M_k)) \times m(M_k^{-1}X)$

or $s\left(M^{-1}\times(M-M_k)\right) \leqslant s(M^{-1})\times s(M-M_k)$

donc $m\left(M_k^{-1}X - M^{-1}X\right) \leqslant s(M^{-1})\times s(M-M_k)\times m(M_k^{-1}X)$

Mais on a aussi $m(M_k^{-1}X) - m(M^{-1}X) \leqslant m(M_k^{-1}X - M^{-1}X)$

donc $m(M_k^{-1}X) - m(M^{-1}X) \leqslant s(M^{-1})\times s(M-M_k)\times m(M_k^{-1}X)$

donc $m(M_k^{-1}X)\times\left[1 - s(M^{-1})\times s(M-M_k)\right] \leqslant m(M^{-1}X)$

2.(b) Par hypothèse : $\lim\limits_{k\to+\infty} s(M-M_k) = 0$

donc $s(M^{-1})\times s(M-M_k) = 1$

donc $\exists k_0\in\mathbb{N},\ \forall k\geqslant k_0,\ s(M^{-1})\times s(M-M_k) \leqslant \frac{1}{2}$

donc $1 - s(M^{-1})\times s(M-M_k) \geqslant \frac{1}{2}$

donc $m(M_k^{-1}X)\times\left[1 - s(M^{-1})\times s(M-M_k)\right]$

$\geqslant \frac{1}{2}\, m(M_k^{-1}X)$

Donc $\forall k \geqslant k_0,\ m\left(M_k^{-1}X\right) \leqslant 2 . m\left(M^{-1}X\right)$

2.(c) En réinjectant on obtient :

$$0 \leqslant m\left(M_k^{-1}X - M^{-1}X\right) \leqslant s\left(M^{-1}\right) \times s\left(M - M_k\right) \times 2 \times m\left(M^{-1}X\right)$$

or $\lim\limits_{k \to +\infty} s\left(M - M_k\right) = 0$

donc $\lim\limits_{k \to +\infty} s\left(M^{-1}\right) \times s\left(M - M_k\right) \times 2 \times m\left(M^{-1}X\right) = 0$

et donc par encadrement : $\lim\limits_{k \to +\infty} m\left(M_k^{-1}X - M^{-1}X\right) = 0$

Ceci prouve que la suite $\left(M_k^{-1}X\right)$ converge vers $M^{-1}X$.

2.(d) Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on en déduit que la suite $\left(M_k^{-1}\right)$ converge vers M^{-1}.

3. Comme les matrices (M_k) vérifie (P) on sait qu'elles sont toutes inversibles. Comme l'est aussi on sait que la suite $\left(M_k^{-1}\right)$ converge vers M^{-1}.

De plus comme les matrices (M_k) vérifient (P) on sait que les coefficients des matrices $\left(M_k^{-1}\right)$ sont

tous positifs.
Par stabilité des inégalités, les coefficients de M^{-1} sont donc tous positifs.

4.(a) $AX = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n \\ -x_{n-1} + 2x_n \end{pmatrix}$

${}^tXAX \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ donc c'est un réel

donc ${}^tXAX = (2x_1 - x_2)x_1 + (-x_1 + 2x_2 - x_3)x_2 + \dots$

$\dots + (-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n)x_{n-1} + (-x_{n-1} + 2x_n)x_n$

$${}^tXAX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})^2$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0_{n,1}$.

Alors ${}^tXAX = 0_{n,1}$ donc $\forall k \in [\![1,n]\!], x_k^2 = 0$
et $\forall k \in [\![1,n-1]\!], (x_k - x_{k+1})^2 = 0$ (somme de termes ≥ 0)

donc $x_1 = \dots = x_n = 0$

donc $X = 0_{n,1}$.

Donc A est inversible.

4.(b) A_α vérifie (P) car $\begin{cases} 2+\alpha > 0 \\ -1 \leq 0 \text{ et } 0 \leq 0 \\ 1+\alpha > 0 \text{ et } \alpha > 0 \end{cases}$

4.(c) on pose $M_k = A + \frac{1}{k+1} \cdot I_n$ pour $k \in \mathbb{N}$

Alors $s(M_k - A) = s\left(\frac{1}{k+1} \cdot I_n\right) = \frac{1}{k+1} s(I_n)$

$$= \frac{n}{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc (M_k) converge vers A et les matrices (M_k) vérifient (P).

4.(d) Comme A est inversible on peut utiliser 3. : les coefficients de A^{-1} sont tous positifs ou nuls