Correction du DM10

Préliminaire

On fixe $x_0 > 0$ qcq.

- si $h > 0$ on a $x_0 + h > x_0 > 0$

  donc $f(x_0+h) \geq f(x_0)$

d'après le théorème de la limite monotone : $f(x_0^+)$ existe

et par stabilité des inégalités : $f(x_0^+) \geq f(x_0)$

D'autre part $g(x_0+h) \leq g(x_0)$

De même $g(x_0^+)$ existe et par quotient de limites

$$g(x_0^+) = \frac{f(x_0^+)}{x_0}$$

donc $\dfrac{f(x_0^+)}{x_0} \leq \dfrac{f(x_0)}{x_0}$ ie $f(x_0^+) \leq f(x_0)$

On a donc $f(x_0^+) = f(x_0)$ ie $\lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$

- si $h < 0$ on a $0 < x_0 + h < x_0$ à condition

  que $-x_0 < h < 0$, ce qui permettra d'avoir $h \to 0^-$.

avec le même raisonnement que ci-dessus

on montre que $f(x_0^-) = f(x_0)$

i.e $\lim_{h \to 0^-} f(x_0+h) = f(x_0)$

On a donc :

$$\boxed{\forall x_0 > 0, \quad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x_0+h) = f(x_0)}$$

Partie I

1.(a) Si $a = b$ on a $u_0 = v_0 = a$

puis $u_1 = \sqrt{a^2} = a$ et $v_1 = \frac{a+a}{2} = a$

donc par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = v_n = a$

Et donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = a}$

1.(b) On a $u_1 = \sqrt{0} = 0$ et $v_1 = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}$

puis $u_2 = 0$ et $v_2 = \frac{b}{4}$

donc par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 0 \text{ et } v_n = \frac{b}{2^n}$$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = 0}$

2. (a) Par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$v_n - u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{u_{n-1} \times v_{n-1}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{u_{n-1}} - \sqrt{v_{n-1}}\right)^2}{2} \geqslant 0$$

Donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n}$

2. (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n \cdot v_n} - u_n = \sqrt{u_n} \cdot \left(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}\right) \geqslant 0$$

donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

donc $\boxed{(v_n) \text{ est décroissante}}$.

2.(c) On sait déjà que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geqslant u_n$

donc $0 \leqslant v_n - u_n$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

$$= \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n . v_n} - \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}$$

$$= u_n - \sqrt{u_n . v_n} = \sqrt{u_n} . \left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right) \leqslant 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

Et donc par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} . (v_1 - u_1)$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} . (v_1 - u_1)}$

2.(d) Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes :

$$\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers la même limite}}$$

2.(e) On a vu que $\boxed{M(a,a) = a}$

et $\boxed{M(0,b) = 0}$

3.(a) On a $u_0(a,b) = a = v_0(a,b)$

$v_0(a,b) = b = u_0(b,a)$

puis $u_1(a,b) = \sqrt{ab} = u_1(b,a)$

$v_1(a,b) = \dfrac{a+b}{2} = v_1(b,a)$

donc par récurrence immédiate :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(a,b) = u_n(b,a)$

et $v_n(a,b) = v_n(b,a)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(a,b) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n(b,a)$

ie $\boxed{M(a,b) = M(b,a)}$

3.(b) $\mu_0(\lambda a, \lambda b) = \lambda a = \lambda . \mu_0(a,b)$

$v_0(\lambda a, \lambda b) = \lambda b = \lambda . v_0(a,b)$

puis $\mu_1(\lambda a, \lambda b) = \sqrt{\lambda^2 ab} = |\lambda| . \sqrt{ab} = \lambda . \mu_1(a,b)$

$v_1(\lambda a, \lambda b) = \dfrac{\lambda a + \lambda b}{2} = \lambda . \dfrac{a+b}{2} = \lambda . v_1(a,b)$

donc par récurrence immédiate :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda . \mu_n(a,b)$

et $v_n(\lambda a, \lambda b) = \lambda . v_n(a,b)$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(\lambda a, \lambda b) = \lim\limits_{n \to +\infty} \lambda . \mu_n(a,b)$

$= \lambda \times \lim\limits_{n \to +\infty} \mu_n(a,b)$

car la limite est finie.

donc $\boxed{M(\lambda a, \lambda b) = \lambda \times M(a,b)}$

3.(c) On a $\mu_0\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{ab} = \mu_1(a,b)$

$v_0\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \frac{a+b}{2} = v_1(a,b)$

Par récurrence immédiate :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mu_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \mu_{n+1}(a,b)$ et $v_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = v_{n+1}(a,b)$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1}(a,b)$.

$$= \lim_{n \to +\infty} u_n(a,b)$$

d'après le th des suites extraites

Donc $\boxed{M\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right) = M(a,b)}$

3.(d) La suite $(u_n(a,b))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n(a,b))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. De plus elles sont adjacentes. On a donc :

$$u_1(a,b) \leq M(a,b) \leq v_1(a,b)$$

ie $\boxed{\sqrt{ab} \leq M(a,b) \leq \frac{a+b}{2}}$

Partie II

1. $$\varphi(0) = M(1,0) \underset{3.(a)}{=} M(0,1) \underset{2.(e)}{=} \boxed{0}$$

$$\varphi(1) = M(1,1) \underset{2.(e)}{=} \boxed{1}$$

2.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note P_n le prédicat :

$$\text{" } u_n(1,x) \leq u_n(1,y) \text{ et } v_n(1,x) \leq v_n(1,y) \text{ "}$$

Pour $n = 0$: $u_0(1,x) = 1 \leq 1 = u_0(1,y)$

$v_0(1,x) = x \leq y = v_0(1,y)$

donc le prédicat P_0 est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que le prédicat P_n est vrai.

On a donc $u_n(1,x) \leq u_n(1,y)$ et $v_n(1,x) \leq v_n(1,y)$

D'après I. 2.(a) les suites sont positives donc :

$$0 \leq u_n(1,x) \times v_n(1,x) \leq u_n(1,y) \times v_n(1,y)$$

donc $\sqrt{u_n(1,x) \times v_n(1,x)} \leq \sqrt{u_n(1,y) \times v_n(1,y)}$

ie $u_{n+1}(1,x) \leq v_{n+1}(1,y)$

d'autre part par somme d'inégalités :

$$\frac{u_n(1,x) + v_n(1,x)}{2} \leq \frac{u_n(1,y) + v_n(1,y)}{2}$$

ie $u_{n+1}(1,x) \leq v_{n+1}(1,x)$

donc le prédicat P_{n+1} est vrai.

D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(1,x) \leq u_n(1,y) \text{ et } v_n(1,x) \leq v_n(1,y)}$$

2.(b) Par stabilité des inégalités : $M(1,x) \leq M(1,y)$

On a donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x < y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$

La fonction $\boxed{\varphi \text{ est donc croissante sur } \mathbb{R}^+}$

3.(a) D'après I.3.(b) : $x . M\left(1, \frac{1}{x}\right) = M(x,1) = M(1,x)$

si $x > 0$.

Donc $\boxed{\forall x > 0,\ \varphi(x) = x \times \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}$

3.(b) On sait que φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et à et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition la fonction $x \longmapsto \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\varphi(x)}{x}$ est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le préliminaire : $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$

3.(c) D'après I.3.(c) si $x \geqslant 0$:

$$M(1,x) = M\left(\sqrt{x}, \frac{1+x}{2}\right) \underset{\text{I.3.(b)}}{=} \frac{1+x}{2} \times M\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}, 1\right)$$

$$\underset{\text{I.3.(a)}}{=} \frac{1+x}{2} \times M\left(1, \frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$$

donc $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ \varphi(x) = \frac{1+x}{2} \times \varphi\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}$

3.(d) Comme φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ on sait que $\varphi(0^+)$ existe d'après le théorème de la limite monotone.

De plus φ est minorée par 0 sur $\mathbb{R}^+$ donc $\varphi(0^+)$ est finie. L'inégalité précédente devient donc :

$$0 \leqslant \varphi(0^+) \leqslant \frac{1}{2}\varphi(0^+) \quad \text{donc } \varphi(0^+) = 0$$

On on sait que $\varphi(0)=0$ donc on a $\varphi(0^+)=\varphi(0)$. (11)

$\boxed{\varphi \text{ est donc continue à droite en } 0.}$

4.(a) D'après I.3.(d) on a :

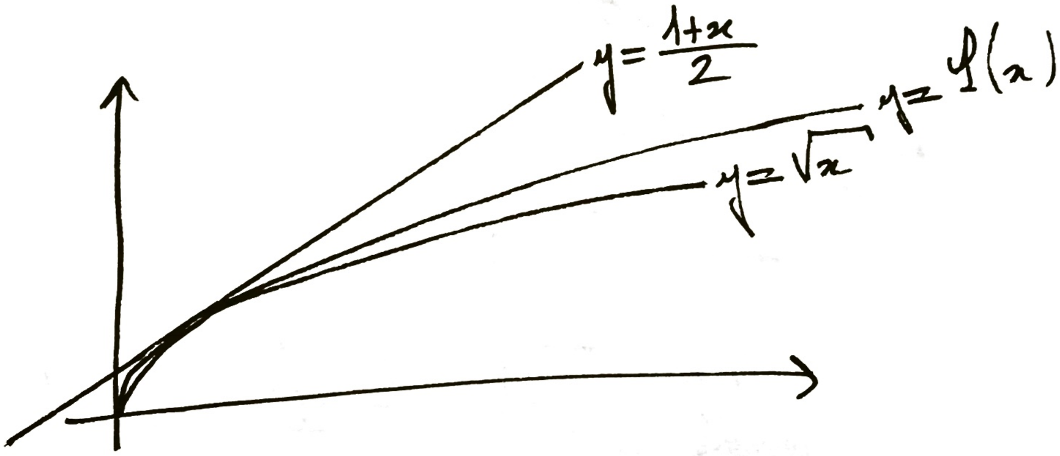
$$\forall x \geq 0, \quad \sqrt{x} \leq M(1,x) \leq \frac{1+x}{2}$$

donc $\boxed{\forall x \geq 0, \quad \sqrt{x} \leq \varphi(x) \leq \frac{1+x}{2}}$

4.(b) Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ on a par minoration :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty}$$

5.



6. On a $\forall x > 0, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}$

Donc par minoration : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = +\infty$

donc $\boxed{\varphi \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.}$

et $\forall x \geq 0$, $\quad \sqrt{x} - 1 \leq \varphi(x) - \varphi(1) \leq \dfrac{x-1}{2}$

donc $\forall x > 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \leq \dfrac{1}{2}$

donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

et $\forall 0 < x < 1$, $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

Donc $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \neq 1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en } 1}$ et $\varphi'(1) = \dfrac{1}{2}$