Correction du DM11

Partie I

1. h est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \times \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \boxed{1}$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \boxed{-1}$

2. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} -1 \leq h(x) \leq 1 &\iff -e^x - e^{-x} \leq e^x - e^{-x} \leq e^x + e^{-x} \\ &\iff -e^x \leq e^x \text{ et } -e^{-x} \leq e^{-x} \\ &\iff 0 \leq 2e^x \text{ et } 0 \leq 2e^{-x} \end{aligned}$$

Ces deux dernières inégalités sont vraies donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq h(x) \leq 1}$$

3. $e^x \underset{x \to 0}{=} 1 + x + o(x)$ donc $e^{-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$

donc $e^x + e^{-x} \underset{x \to 0}{=} 2 + o(x)$

$e^x - e^{-x} \underset{x \to 0}{=} 2x + o(x)$

donc $e^x + e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} 2$ et $e^x - e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} 2x$

donc $h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x}$

4. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$.

$$h(x) = y \iff \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y \iff e^x - e^{-x} = y \times (e^x + e^{-x})$$

$$\iff e^x \times (1-y) = e^{-x} \times (y+1)$$

$$\iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \quad \text{car } y \neq 1$$

$$\iff 2x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \quad \text{car } \frac{1+y}{1-y} > 0 \text{ car } y \in]-1,1[$$

$$\iff x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

On trouve une unique solution.

Donc $\boxed{h \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ vers }]-1,1[.}$

De plus
$$\boxed{\begin{array}{rcl} h^{-1} :]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right) \end{array}}$$

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{2h(x)}{1+h(x)^2} = \frac{2\,\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{1 + \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2} = \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2}$$

$$= \frac{2(e^{2x} - e^{-2x})}{2e^{2x} + 2e^{-2x} + \cancel{2} - \cancel{2}} = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} = \boxed{h(2x)}$$

Partie II

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $u(x) = \dfrac{2u(t)}{1+u(t)^2}$ où $t = \dfrac{x}{2}$.

Donc : $-1 \leqslant u(x) \leqslant 1 \iff -1-u(t)^2 \leqslant 2u(t) \leqslant 1+u(t)^2$

$\iff 0 \leqslant 1+2u(t)+u(t)^2$ et $0 \leqslant 1-2u(t)+u(t)^2$

$\iff 0 \leqslant (1+u(t))^2$ et $0 \leqslant (1-u(t))^2$

Ces deux inégalités sont toujours vraies donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant u(x) \leqslant 1}$$

2. Pour $x=0$: $u(0) = \dfrac{2u(0)}{1+u(0)^2}$

donc $u(0) \times (1+u(0)^2) = 2u(0)$

donc $u(0) = 0$ ou $1+u(0)^2 = 2$

donc $\boxed{u(0) = 0 \text{ ou } -1 \text{ ou } 1}$

3. Par l'absurde, on suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 1$.

Alors u est constante sur $\mathbb{R}$.

Mais u est non constante donc : $\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R},\ u(x_0) \neq 1}$

4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$

u est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = u(0)}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a $2x_{n+1} = x_n$

donc $u(x_n) = \dfrac{2u(x_{n+1})}{1+u(x_{n+1})^2}$ ie $\boxed{y_n = \dfrac{2y_{n+1}}{1+y_{n+1}^2}}$

Comme $1+y_{n+1}^2 > 0$ on a y_{n+1} du signe de y_n. $\boxed{\text{Donc } (y_n) \text{ de signe constant}}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$y_n - y_{n+1} = \frac{2y_{n+1}}{1+y_{n+1}^2} - y_{n+1} = \frac{2y_{n+1} - y_{n+1} - y_{n+1}^3}{1+y_{n+1}^2}$$

$$= \frac{y_{n+1}}{1+y_{n+1}^2} \times (1 - y_{n+1}^2)$$

Comme $-1 \leq y_{n+1} \leq 1$ d'après 1. on trouve que

$y_n - y_{n+1}$ est du signe de y_{n+1} qui est du signe de y_0.

Si $y_0 \geq 0$: (y_n) est décroissante.

Si $y_0 < 0$: (y_n) est croissante.

Donc $\boxed{(y_n) \text{ est monotone}}$

7. Si $y_0 = u(x_0) \geq 0$: (y_n) est décroissante.

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n \leq y_0$ donc $u(0) \leq u(x_0)$

donc $1 \leq u(x_0)$

c'est impossible car $u(x_0) \leq 1$ et $u(x_0) \neq 1$.

Si $y_0 = u(x_0) < 0$: (y_n) est de signe constant donc $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \leq 0$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n \leq 0$ donc $u(0) \leq 0$

donc $1 \leq 0$. Impossible

C'est impossible dans les deux cas.

8. La question 7. donne qu'il est impossible d'avoir $u(0)=1$

Donc $u(0)=-1$ ou 0.

On remarque alors que la fonction $v=-u$ vérifie elle aussi les conditions (i) et (ii), et est constante.

On a donc aussi $v(0)\neq 1$ donc $u(0)\neq -1$.

Finalement $\boxed{u(0)=0}$