

EXERCICE 1

1. $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

D'après les théorèmes généraux, f est C^1 sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

On sait que $\ln x = \ln(1 + x - 1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\underset{x \neq 1}{\sim}} \frac{x+1}{2}$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f(x) = 1 = f(1)$

Donc f est continue en 1.

Comme elle est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ (car C^1)

elle est donc continue sur \mathbb{R}_+^* .

D'autre part si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{\ln x}{2} + \frac{x+1}{x-1} \times \frac{1}{2x} = \frac{-2x \ln(x) + x^2 - 1}{2x(x-1)^2}$$

Pour calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f'(x)$ on utilise un DL(1).

On pose $x = 1 + h$ avec $h \rightarrow 0$

$$-2x \cdot \ln(x) + x^2 - 1 = -2(1+h) \cdot \ln(1+h) + h^2 + 2h \quad (2)$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} -2 \cdot (1+h) \cdot \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \right) + h^2 + 2h$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} -2h + h^2 - \frac{2h^3}{3} - 2h^2 + h^3 + h^2 + 2h + o(h^3)$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h^3}{3} + o(h^3)$$

$$\text{donc } -2x \cdot \ln(x) + x^2 - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$\text{donc } f'(x) \underset{x \rightarrow 1}{\underset{x \neq 1}{\sim}} \frac{x-1}{6x}$$

$$\text{donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} f'(x) = 0$$

Les trois propriétés encadrées permettent d'utiliser le théorème du prolongement du caractère C^1 :

$$f \text{ est } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } f'(1) = 0$$

2. Sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f'(x)$ est du signe de $-2x \cdot \ln(x) + x^2 - 1 = g(x)$

g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* d'après les th générale et:

$$\forall x > 0, g'(x) = -2 \ln x - 2 + 2x = -2(\ln x - x + 1)$$

Avec l'inégalité admise on a: $\forall x > 0, x \neq 1 \Rightarrow g'(x) > 0$

Donc g est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

(3)

On $g(1) = 0$

D'ici le tableau de signes :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	\emptyset	+

D'ici le tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	\emptyset	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

3. Si $x > 1$: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{\ln x}{2}$

Avec l'inégalité admise au 2. on a :

$$f(x) < \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2} < \frac{2x}{2} = x$$

\uparrow
car $1 < x$

Donc $\forall x > 1, f(x) < x$.

4.(a) D'après le tableau de variations de la question 2., l'intervalle $]1, +\infty[$ est stable par f .

D'après le théorème de la suite récurrente
il existe une unique suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que
 $x_0 = a > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

(4)

De plus: $\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 1$.

4.(b) D'après 3. la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Elle est majorée par 1.

D'après le théorème de la limite monotone, elle converge
vers $l \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq l < a$.

Comme f est continue sur \mathcal{D}_f , elle est continue en l .

Donc $f(l) = l$.

D'après 3. et l'inégalité $l \geq 1$ on en déduit que $l = 1$.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

4.(c) On sait que f est C^1 en 1 donc f' est continue en 1

et $f'(1) = 0$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1} (|f'(x)| - \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} < 0$

Donc au voisinage de 1 on a $|f'(x)| - \frac{1}{3} \leq 0$

Donc $\exists \delta > 0, \forall x \in [1-\delta, 1+\delta], |f'(x)| \leq \frac{1}{3}$

(5)

D'après l'inégalité des accroissements finis : comme f est dérivable sur l'intervalle $[1-\delta, 1+\delta]$ on a

$$\forall (t_1, t_2) \in [1-\delta, 1+\delta], |f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{1}{3} |t_1 - t_2|.$$

En particulier avec $t_2 = 1$:

$$\forall t \in [1-\delta, 1+\delta], |f(t) - 1| \leq \frac{1}{3} |t - 1|$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1$ donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in [1-\delta, 1+\delta]$

et donc $\forall n \geq n_0, |f(x_n) - 1| \leq \frac{1}{3} |x_n - 1|$

4.(d) Par récurrence immédiate:

$$\forall n \geq n_0, |x_n - 1| \leq \frac{1}{3^{n-n_0}} |x_{n_0} - 1|$$

4.(e) On a donc:

$$\forall n \geq n_0, 0 < 2^n |x_n - 1| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \underbrace{3^{n_0} |x_{n_0} - 1|}_{\text{constante}}$$

donc par encadrement: $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n |x_n - 1| = 0$

et donc $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$