Correction DM13

Partie I

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et est donc C^n sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction L_n est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $L_0(x) = e^x \times e^{-x} = \boxed{1}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $L_1(x) = e^x \times \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = \boxed{1-x}$

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad L_2(x) = \frac{e^x}{2} \times \left(2xe^{-x} - x^2e^{-x}\right)'$$
$$= \frac{e^x}{2} \times \left(2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x}\right)$$
$$= \boxed{\left(2 - 4x + x^2\right)\frac{1}{2}}$$

3. D'après la formule de Leibniz on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad L_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times (x^n)^{(k)} \times \left(e^{-x}\right)^{(n-k)}\right) \times \frac{e^x}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{n!}} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{x^{n-k} \times \cancel{n!}}{(n-k)!} \times (-1)^{n-k} \times \cancel{e^{-x}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{k!} \times x^k$$

grâce au chgt d'indice $k' = n-k$ et à la formule $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

On en déduit que L_n est une fonction polynomiale de degré n. ②

4.(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(n)}(x) = n! \times e^{-x} \times L_n(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h_n^{(n+1)}(x) = \left(h_n^{(n)}\right)'(x) = -n! \times e^{-x} \times L_n(x) + n! \times e^{-x} \times L_n'(x)$

$= n! \times e^{-x} \times \left(L_n'(x) - L_n(x)\right)$

4.(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_{n+1}(x) = x \times h_n(x)$

4.(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$L_{n+1}(x) = \frac{e^x}{(n+1)!} \times h_{n+1}^{(n+1)}(x)$

or $h_{n+1}^{(n+1)}(x) = \left(x \times h_n(x)\right)^{(n+1)}$

$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \times x^{(k)} \times h_n^{(n+1-k)}(x)$ d'après la formule de Leibnitz

$= x \times h_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \cdot h_n^{(n)}(x)$

donc $(n+1)! \times e^{-x} \times L_{n+1}(x) = x \times n! \times e^{-x} \times \left(L_n'(x) - L_n(x)\right) + (n+1)! \cdot e^{-x} \times L_n(x)$

donc $L_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1}\left(L_n'(x) - L_n(x)\right) + L_n(x)$

$= \frac{x}{n+1} \cdot L_n'(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) \cdot L_n(x)$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ on en conclut que :

$$\boxed{L_{n+1} = \frac{X}{n+1} \cdot L_n' + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right) \cdot L_n}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_{n+1}'(x) = (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} \cdot e^{-x} = (n+1) \cdot h_n(x) - h_{n+1}(x)$$

donc $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)}(x) = (n+1) \cdot h_n^{(n+1)}(x) - h_{n+1}^{(n+1)}(x)$

$$= (n+1)! \times e^{-x} \times \left(L_n'(x) - L_n(x)\right) - (n+1)! \times e^{-x} \times L_{n+1}(x) \text{ d'après 4.}$$

Mais $\left(h_{n+1}'\right)^{(n+1)}(x) = h_{n+1}^{(n+2)}(x) = \left(h_{n+1}^{(n+1)}\right)'(x)$

$$= \left((n+1)! \times e^{-x} \times L_{n+1}(x)\right)'$$

$$= (n+1)! \times e^{-x} \times L_{n+1}'(x) - (n+1)! \times e^{-x} \times L_{n+1}(x)$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L_n'(x) - L_n(x) - \cancel{L_{n+1}(x)} = L_{n+1}'(x) - \cancel{L_{n+1}(x)}$$

Donc $\boxed{L_{n+1}' = L_n' - L_n}$

6. Si on dérive la relation du 4.(c) on a :

$$L_{n+1}' = \frac{1}{n+1} \cdot L_n' + \frac{X}{n+1} \cdot L_n'' - \frac{1}{n+1} \cdot L_n + \left(1 - \frac{X}{n+1}\right) \cdot L_n'$$

Et avec 5. on a : $L_{n+1}' = L_n' - L_n$

Donc : $L_n' - L_n = \dfrac{X}{n+1} \cdot L_n'' + \left(1 + \dfrac{1-X}{n+1}\right) \cdot L_n' - \dfrac{1}{n+1} \cdot L_n$

Après simplification : $\boxed{X.L_n'' + (1-X).L_n' + n.L_n = 0}$

D'après 4.(c) on a :

$$X.L_n' = (n+1).L_{n+1} + (X-n-1).L_n \text{ et } X.L_{n-1}' = n.L_n + (X-n).L_{n-1}$$

Si on retranche ces égalités et si on utilise 5. on obtient :

$$-X.L_{n-1} = X.\left(L'_n - L'_{n-1}\right) = (n+1).L_{n+1} + (X-2n-1).L_n + (n-X).L_{n-1}$$

donc : $\boxed{(n+1).L_{n+1} + (X-2n-1).L_n + n.L_{n-1} = 0}$

Partie II

1. On a vu à la partie I que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{L_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^k}{k!} \times X^k}$

2.(a) Si $x \neq 0$: $0 \leqslant \left|\frac{f(x)}{x^{n+1}}\right| \leqslant |x|$

donc par encadrement : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = 0$

donc $\boxed{f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^{n+1})}$. C'est un $DL_{n+1}(0)$ de f.

Comme $n+1 \geqslant 1$ on a donc $f(x) \underset{x \to 0}{=} o(x)$.

Comme f a un $DL_1(0)$ on sait que f est dérivable en 0.

De plus $f'(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$: $f(x) = x^{n+2} . \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$. D'après les th. généraux

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \neq 0, \; f'(x) = (n+2).x^{n+1} . \sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) - (n+1).\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

Montrons que f' n'a pas de limite finie en 0.

Par l'absurde, on suppose que f a une limite finie l en 0.
Par encadrement on montre facilement que :

$$\lim_{x \to 0} (n+2).x^{n+1}.\sin\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = 0$$

Donc $\displaystyle\lim_{x \to 0} (n+1).\cos\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right) = -l$

Pour toute suite réelle $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0 on a donc

$$\lim_{p \to +\infty} (n+1).\cos\left(\frac{1}{x_p^{\,n+1}}\right) = -l$$

Si on pose $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = \left(2(p+1)\pi\right)^{-\frac{1}{n+1}}$ alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} x_p = 0$

et $\forall p \in \mathbb{N}$, $(n+1).\cos\left(\frac{1}{x_p^{\,n+1}}\right) = (n+1) \times \cos\left(2(p+1)\pi\right) = n+1$

donc $l = -(n+1)$

De plus si on pose $\forall p \in \mathbb{N}$, $x_p = \left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$ alors $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} x_p = 0$

et $\forall p \in \mathbb{N}$, $(n+1).\cos\left(\frac{1}{x_p^{\,n+1}}\right) = (n+1) \times \cos\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

donc $l = 0$.

On a donc $n+1 = 0$ ce qui est absurde.

Donc f n'a pas de limite finie en 0 et $\boxed{f \text{ n'a pas de } DL_0(0)}$.

2.(b) Si f est de classe C^n au voisinage de 0, alors $f^{(n-k)}$ est C^k au voisinage de 0. D'après la formule de Taylor-Young, $f^{(n-k)}$ a donc un $DL_k(0)$ obtenu en dérivant $n-k$ fois celui de f.

3.(a) $$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} x^k + o(x^N)$$

donc $$h_n(x) = x^n e^{-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} x^{n+k} + o(x^{n+N})$$

3.(b) h_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc au voisinage de 0 donc on peut appliquer 2.(b) :

$$h_n^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} x^k + o(x^N)$$

3.(c) D'autre part :

$$\frac{e^x}{n!} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n! \times k!} x^k + o(x^N)$$

Par produit de $DL_N(0)$ on a :

$$L_n(x) \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \times \frac{(n+k)!}{k!} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n! \times k!} \times x^k \right) + o(x^N)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{N} \left(\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} (n+k)! \times \frac{1}{n!\,(p-k)!} \right) x^p + o(x^N)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{N} c_p \cdot x^p + o(x^N)$$ où c_p donné dans l'énoncé.

3. (d) Mais d'après 1. on a :

$$L_n(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{(-1)^p}{p!} x^p + o(x^N) \text{ puisque } N \geq n.$$

Par unicité du $DL_N(0)$ de L_n on a donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n+k}{k} \times \binom{p}{k} = \begin{cases} \binom{n}{p} \frac{(-1)^p}{p!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$