Correction du DM 19

1. $u_0 = 1+1 = \boxed{2}$ $\qquad u_2 = (1+1)(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{4}) = \boxed{\frac{15}{4}}$

$u_1 = (1+1)(1+\frac{1}{2}) = \boxed{3}$

2.(a) Pour $k=0$: $1+\frac{1}{2^k} = 2$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 \times \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

Pour $k \in [\![1,n]\!]$, $1+\frac{1}{2^k} \geqslant 1$

donc $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$

et donc $u_n \geqslant 2$.

De plus $u_0 = 2 \geqslant 2$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$

2.(b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3.(a) $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est C^1 sur $]0,+\infty[$. Le TAF appliqué entre 0 et $x>0$ donne :

$\exists c \in]0,x[$; $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$

ie $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} \leqslant 1$ car $c>0$

Donc $\forall x > 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Pour $x=0$: vrai aussi car $0 \leqslant 0$

Si $-1 < x < 0$ le TAF donne :

$$\exists c \in]x, 0[, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c} > 1 \quad \text{car } 0 < 1+x < 1+c < 1$$

Et comme $x < 0$: $\ln(1+x) < x$.

On a donc $\underline{\forall x > -1, \ \ln(1+x) \leq x}$

__Rem:__ on pouvait se contenter d'étudier les variations de $x \longmapsto \ln(1+x) - x$

3.(b) On a donc pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{donc } 0 \leq 1 + \frac{1}{2^k} \leq e^{\frac{1}{2^k}}$$

car exp $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

Par produit : $u_n \leq \prod_{k=0}^{n} e^{1/2^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\right)$.

donc : $u_n \leq \exp\left(\dfrac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - 1/2}\right)$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \exp\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 - \frac{1}{2^n} \leq 2$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leq e^2}$

ne dépend pas de n

Donc $\underline{(u_n) \text{ est majorée.}}$

4. (u_n) est croissante majorée donc d'après le théorème de la limite monotone : elle converge. ③

De plus $u_2 \leqslant \ell \leqslant e^2$ donc $\boxed{\frac{15}{4} \leqslant \ell \leqslant e^2}$

5.(a) Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$

On a par continuité de ln : $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$

Mais $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$

Donc la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ converge et sa somme vaut $\ln(\ell)$.

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Son reste est : $\ln \ell - \ln(u_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

Et donc : $\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)}$

5.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$\forall k \geqslant n+1$, $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$ d'après 3.(a)

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la série géométrique $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge.

On peut donc écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Et comme $(u_n) \nearrow$: $0 < u_n \leq \ell$ donc $1 \leq \frac{\ell}{u_n}$

Finalement : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}}$

Par croissance de exp :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \frac{\ell}{u_n} \leq e^{1/2^n}$ donc $\frac{u_n}{\ell} \geq e^{-1/2^n}$

donc $u_n \geq \ell e^{-1/2^n}$

donc $\ell - u_n \leq \ell - \ell e^{-1/2^n} = \ell\left(1 - e^{-1/2^n}\right)$

et $\ell - u_n \geq 0$ car $(u_n) \nearrow$ de limite ℓ.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \ell . \left(1 - e^{-1/2^n}\right)}$

5.(c) On étudie les variations de $f : x \mapsto 1 - e^{-x} - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = e^{-x} - 1$ du signe de $-x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$ la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge.

Comme ℓ ne dépend pas de n, la série géométrique $\sum \frac{\ell}{2^n}$ converge aussi.

Par comparaison de séries à termes positifs,

la série $\sum (\ell - u_n)$ converge.

5. (d) On note $S \in \mathbb{R}^+$ la somme de cette série.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\ell - u_k) = S$

Or $\sum\limits_{k=1}^{n} (\ell - u_k) = n.\ell - \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

donc $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\ell - u_k) = \ell - \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$

Par quotients de limites :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} (\ell - u_k) = "\frac{S}{+\infty}" = 0$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \ell$.

D'après 4. on a $\ell \neq 0$.

Donc $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\sim} n.\ell}$

EXERCICE 2

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2} . a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} . a_{2n+1}$$

$$= a_{2n+2} - a_{2n+1} \leqslant 0 \quad \text{car } (a_n) \searrow$$

donc la suite (S_{2n}) est $\searrow$

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n+1} = (-1)^{2n+3} . a_{2n+3} + (-1)^{2n+2} . a_{2n+2}$$

$$= - a_{2n+3} + a_{2n+2} \geqslant 0 \quad \text{car } (a_n) \nearrow$$

donc la suite (S_{2n+1}) est $\nearrow$

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{\text{bornée}} . \underbrace{a_{2n+1}}_{\text{convergente vers } 0}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (S_{2n+1} - S_{2n}) = 0$

Donc les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

1. (b) D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers la même limite.

D'après le théorème des suites extraites recouvrantes (S_n) est donc une suite convergente.

Par déf : la série $\sum (-1)^n . a_n$ est convergente.

1.(c) On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n . a_n$

Comme (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes de limite S :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; 0 \leqslant S - S_{2n+1} \leqslant S_{2n+2} - S_{2n+1} = a_{2n+2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; \left| \sum_{k=2n+2}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{2n+2}$

Donc si n pair non nul : $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_n$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$

donc $-a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; \left| \sum_{k=2n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{2n+1}$

Donc si n impair : $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_n$.

Par disjonction de cas : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_n}$

2. si $\alpha \leqslant 0$, $\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = 1$ ou $+\infty$ donc la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)_n$

ne converge pas vers 0.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est alors grossièrement divergente.

Si $\alpha > 0$: la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ est positive, décroissante de limite nulle.

D'après 1. la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

<u>Cl</u> : $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 0}$

<u>Rem:</u> Si $\alpha > 1$ la convergence est absolue

De même si $\alpha \leqslant 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}\right)_n$ ne tend pas vers 0

donc la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge grossièrement.

Si $\alpha > 0$: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$

comme $\frac{1}{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 - x + o(x)$ on a :

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} \underset{n \to +\infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$\underset{n \to +\infty}{=} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{x_n} \underbrace{- \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)}_{y_n}$$

D'après ce qui précède la série $\sum x_n$ converge car $\alpha > 0$

$y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n^{2\alpha}}$

Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum y_n$ converge ssi $2\alpha > 1$ ie $\alpha > \frac{1}{2}$

Pour $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ diverge

et pour $\alpha > \frac{1}{2}$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ converge.

<ins>Ccl</ins> : $\boxed{\text{la série } \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \text{ converge} \iff \alpha > \frac{1}{2}}$

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$ on obtient que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

alors que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ diverge.

Pourtant $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Donc si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ il est possible que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ soient de nature différente.