Correction du DM6

1.(a) si $x \in I$ on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-4 \leq -4\cos x \leq 4$
et donc $5-4\cos x \in [1, 9]$.

La quantité $\sqrt{5-4\cos x}$ est donc bien définie et non nulle,
et donc $f(x)$ aussi.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bien définie sur } I}$

De plus :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \times \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \boxed{\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}$$

1.(b) Si $x \in I$:

$$f(x)-\sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} - \sin x = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \times \left(1-\sqrt{5-4\cos x}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}} \times \frac{1-(5-4\cos x)}{1+\sqrt{5-4\cos x}} = \frac{-4.\sin(x).(1-\cos(x))}{\sqrt{5-4\cos x} \times \left(1+\sqrt{5-4\cos x}\right)}$$

≤ 0 car $1-\cos x \geq 0$ et $\sin(x) \geq 0$
si $x \in [0, \pi]$

Donc $\boxed{\forall x \in I, f(x) - \sin(x) \leq 0}$

1.(c) On étudie $h : x \mapsto \sin x - x$ sur $]0,\pi]$.

h est dérivable sur $]0,\pi]$ et $\forall x \in]0,\pi],\ h'(x) = \cos x - 1 < 0$

Donc h est strictement décroissante sur $]0,\pi]$.

Et $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 0$.

x	0		π
h	$\Vert\ 0$	$\searrow$	

Donc $\forall x \in]0,\pi],\ h(x) < 0$ donc $\boxed{\forall x \in]0,\pi],\ \sin x < x}$

Donc $\forall x \in]0,\pi],\ f(x) \leq \sin x < x$ donc $f(x) \neq x$. Ainsi $\boxed{f(x) = x \iff x = 0}$

2. f est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{\cos x \cdot \sqrt{5-4\cos x} - \dfrac{4\sin x^2}{2\sqrt{5-4\cos x}}}{5-4\cos x}$$

$$= \frac{2\cos x \cdot (5-4\cos x) - 4\sin^2 x}{2(5-4\cos x)^{3/2}}$$

$$= \frac{5\cos x - 2\cos^2 x - 2}{(5-4\cos x)^{3/2}} \quad \text{car } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Or $\forall z \in \mathbb{C},\ -2z^2 + 5z - 2 = -2(z-2)\left(z - \frac{1}{2}\right)$

Donc $$\boxed{\forall x \in I,\ f'(x) = \frac{-2(\cos x - 2)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)}{(5-4\cos x)^{3/2}}}$$

Si $x \in [0,\pi]$, $\cos x - 2 < 0$

donc $f'(x)$ est du signe de $\cos x - \frac{1}{2}$ au sens strict.

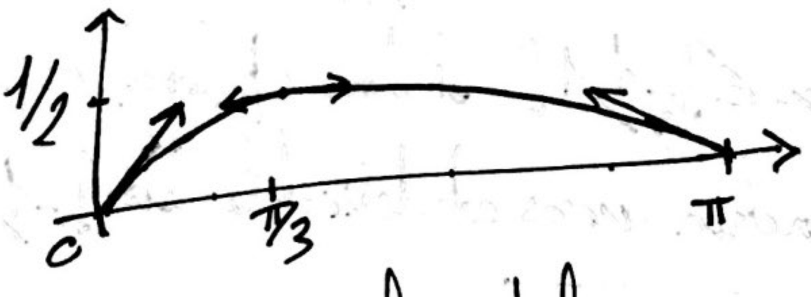
Mais on sait que

x	0		$\pi/3$		π
$\cos x - \frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	

D'où le tableau de variations de f :

x	0		$\pi/3$		π
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5-2}} = \frac{1}{2}$$



La tangente en $\frac{\pi}{3}$ est horizontale.

Tangente en 0 : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0) = x$

Tangente en π : $y = f'(\pi)\times(x-\pi) + f(\pi) = -\frac{1}{3}(x-\pi)$

3.(a) ϕ est dérivable sur $[-1,1]$ et :

$$\forall t \in [-1,1], \quad \phi'(t) = \frac{-5(5-4t)-(4-5t)\times(-4)}{(5-4t)^2}$$

$$= \frac{-9}{(5-4t)^2} < 0$$

donc ϕ est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

x	-1		1
ϕ	1	$\searrow$	-1

donc si $t \in]-1,1[$ alors $\phi(t) \in]-1,1[$.

3.(b) On remarque que $\forall x \in [0,\pi]$, $g(x) = \arccos(\phi(\cos x))$

Si $x \in]0,\pi[$ alors $\cos x \in]-1,1[$ et donc $\phi(\cos x) \in]-1,1[$.

Or on sait que la fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$.

Donc $\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,\pi[}$ comme composée de fonctions dérivables.

Et $\forall x \in]0,\pi[$, $g'(x) = -\dfrac{-\sin(x)\times\phi'(\cos x)}{\sqrt{1-\phi^2(\cos x)}}$

$$\sqrt{1-\phi(\cos x)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2} = \sqrt{\frac{(5-4\cos x)^2-(4-5\cos x)^2}{(5-4\cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+\cos x)(9-9\cos x)}}{|5-4\cos x|} = \frac{3\sqrt{1-\cos^2 x}}{5-4\cos x}$$

car $5-4\cos x \geqslant 0$

$$= \frac{3\sqrt{\sin^2 x}}{5-4\cos x} = \frac{3\sin x}{5-4\cos x}$$

car $\sin x \geqslant 0$ car $x \in [0,\pi]$

Donc :

$$\forall x \in]0,\pi[,\ g'(x) = \frac{-\overset{3}{\cancel{9}}\cancel{\sin x}}{(5-4\cos x)^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{5-4\cos x}}{\cancel{3\sin x}} = \boxed{\frac{-3}{5-4\cos x}} < 0$$

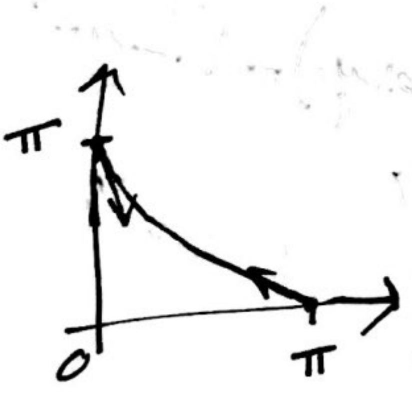
g est donc strictement décroissante sur $]0,\pi[$.

3.(c)

x	0		π
g	π	$\searrow$	0

Tangente en 0 :
$y = -3x + \pi$

Tangente en π :
$y = -\frac{x}{3}(x-\pi)$



4.(a) D'après le tableau de variations de f :

$$f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

x	0	x	$\pi/3$	z	π
f	0 $\nearrow$	$f(x)$ $\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$ $f(x)$	$\searrow$ 0

Et f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

Elle induit donc une bijection de $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ vers $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Comme $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on en déduit que :

$$\boxed{\exists!\, z \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right] ; \ f(x) = f(z)}$$

4.(b) On sait que $\forall y \in [-1,1]$, $\cos(\arccos y) = y$

donc $\sin^2(\arccos y) = 1 - y^2$

Comme $\arccos y \in [0,\pi]$ et $\sin \geq 0$ sur $[0,\pi]$

on a $\forall y \in [-1,1]$, $\sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}$

Donc $\boxed{\cos(g(x)) = \dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}}$

et $\sin(g(x)) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)^2} = \boxed{\dfrac{3\sin x}{5-4\cos x}}$

d'après le calcul du 3.(b).

4.(c) Donc :

$$f(g(x)) = \frac{\sin(g(x))}{\sqrt{5-4\cos g(x)}}$$

donc $\sqrt{5-4\cos(g(x))} = \sqrt{5-4\times\dfrac{4-5\cos x}{5-4\cos x}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{5-4\cos x}}$

$$= \frac{3}{\sqrt{5-4\cos x}}$$

d'où $f(g(x)) = \dfrac{3\sin x}{5-4\cos x} \times \dfrac{\sqrt{5-4\cos x}}{3} = \dfrac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

Donc $\boxed{f(g(x)) = f(x)}$

Comme g est strict $\searrow$ et $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ on a :

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq g(x) \leq g(0) \text{ ie } \frac{\pi}{3} \leq g(x) \leq \pi$$

Avec $f(g(x)) = f(x)$ ceci prouve que $\boxed{\xi = g(x)}$

5.(a) $\cos(x+z) = \cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z$

$$= \cos x \cdot \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} - \sin x \cdot \frac{3\sin x}{5-4\cos x}$$

$$= \frac{4\cos x - 5\cos^2 x - 3(1-\cos^2 x)}{5-4\cdot\cos x} = \boxed{\frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5-4\cos x}}$$

$$\cos(x-z) = \cos x \cdot \cos z + \sin x \cdot \sin z = \boxed{\frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5-4\cos x}}$$

5.(b) Ψ_1 est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \Psi_1'(t) = 1 + g'(t) = 1 + \frac{-3}{5-4\cos t} = \frac{2-4\cos t}{5-4\cos t}$$

$$= \frac{4}{5-4\cos t} \times \left(\frac{1}{2} - \cos t\right) \text{ du signe de } \frac{1}{2} - \cos t$$

Comme $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$: $\Psi_1'(t) < 0$ si $t \neq \frac{\pi}{3}$

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & & \pi/3 \\ \hline \Psi_1 & \pi & \searrow & \frac{2\pi}{3} \end{array}$$

donc Ψ_1 est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

De même Ψ_2 est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad \Psi_2'(t) = 1 - g'(t) = \frac{8-4\cos t}{5-4\cos t} > 0$$

donc Ψ_2 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

$$\begin{array}{c|ccc} t & 0 & & \pi/3 \\ \hline \Psi_2 & -\pi & \nearrow & 0 \end{array}$$

donc $x+z = \Psi_1(x) \in [\quad]$

donc $\frac{x+z}{2} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) \geq 0}$

et $x-z = \Psi_2(x) \in [-\pi, 0]$

donc $\frac{x-z}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ donc $\boxed{\cos\left(\frac{x-z}{2}\right) \geq 0}$

5.(c) de $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ on tire $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$

et donc $\cos^2\left(\frac{x+z}{2}\right) = \frac{1+\cos(x+z)}{2} = \frac{2-2\cos^2 x}{2(5-4\cos x)}$

$$= \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}$$

et comme $\begin{cases} \cos\left(\frac{x+z}{2}\right) \geq 0 \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$ on a $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$

donc $\boxed{\cos\left(\frac{x+z}{2}\right) = f(x)}$

De même on trouve $\boxed{\cos \frac{x-z}{2} = 2f(x)}$

6.(a) f est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ donc bijective de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ vers $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

6.(b) $\theta : \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

Soit $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. On cherche $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ tq $f(x) = y$.

On aura alors $x = \theta(y)$.

$f(x) = y$ donne $y = \cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ où $z = g(x)$

Comme $\frac{x+z}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a donc $\frac{x+z}{2} = \arccos y$

donc $x + z = 2\arccos y$ (1)

On a aussi $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right) = 2y$ et $\frac{x-z}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

donc $\cos\left(\frac{z-x}{2}\right) = 2y$ et $\frac{z-x}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\frac{z-x}{2} = \arccos(2y)$

donc $z - x = 2\arccos(2y)$ (2)

(1) – (2) donne $x = \boxed{\arccos y - \arccos(2y) = \theta(y)}$