Correction du DM 8

1.(a) On trouve $P\times(P^2-3I_3)=I_3$ donc P est inversible

et $P^{-1}=P^2-3I_3=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

1.(b) $D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ donc $\forall n\in\mathbb{N},\ D^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$

puisque D est diagonale.

1.(c) $D=P^{-1}.A.P \iff A=P.D.P^{-1}$

Par récurrence immédiate : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=P.D^n.P^{-1}$

donc $A^n=P\times\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2^n & -2^n & 0\\ 3^n & -3^n & -3^n\end{pmatrix}$

donc $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\begin{pmatrix}-1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n\\ 3^n-1 & 2-3^n & 1-3^n\\ 2^n-3^n & 3^n-2^n & 3^n\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+2^n\times\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}+3^n\times\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2.(a) $AC + B = C$

2.(b) $AX_n + B = \begin{pmatrix} 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \underline{X_{n+1}}$

2.(c) Par récurrence immédiate.

2.(d) $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} 1 - (3^n + 2^n - 1 + 2 - 2\times 3^n) \\ -(3^n - 1 + 2 - 2\times 3^n) \\ 2 - (2^n - 3^n + 2\times 3^n) \end{pmatrix}$

donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} u_n = 3^n - 2^n \\ v_n = 3^n - 1 \\ w_n = -3^n - 2^n + 2 \end{cases}}$