Correction du DS2

PARTIE I

1. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$
$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = \underbrace{(A \cap \overline{A})}_{=\emptyset} \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup \underbrace{(B \cap \overline{B})}_{=\emptyset}$

donc $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \boxed{(A \setminus B) \cup (B \setminus A)}$

2. On a $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ donc d'après le rappel :

$\mathbb{1}_{A \Delta B} \equiv \mathbb{1}_{A \setminus B} + \mathbb{1}_{B \setminus A}$

or $\mathbb{1}_{A \setminus B} \equiv \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{A \cap B}$ et $\mathbb{1}_{B \setminus A} \equiv \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

donc $\boxed{\mathbb{1}_{A \Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2 \cdot \mathbb{1}_{A \cap B}}$

3. (a) On a $\mathbb{1}_{A \Delta (B \Delta C)} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B \Delta C} - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B \Delta C}$
$\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \cdot \mathbb{1}_C - 2 \cdot \mathbb{1}_A \cdot (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C)$
$\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B - 2 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C + 4 \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B \mathbb{1}_C$

D'autre part :

$$\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} \equiv \mathbb{1}_{A\Delta B} + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_{A\Delta B}\cdot\mathbb{1}_C$$
$$\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\cdot(\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)\cdot\mathbb{1}_C$$
$$\equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

Donc $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} \equiv \mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ donc d'après le rappel :

$$\boxed{A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C}$$

3.(b) Supposons que $A\Delta B = A\Delta C$.

On a donc $\mathbb{1}_{A\Delta B} \equiv \mathbb{1}_{A\Delta C}$

et donc : $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C$

donc : $\mathbb{1}_B\cdot(1 - 2\mathbb{1}_A) \equiv \mathbb{1}_C\cdot(1 - 2\mathbb{1}_A)$

Or $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou 1 donc $1 - 2\cdot\mathbb{1}_A(x) = \pm 1$

donc $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_C(x)$ ie $\mathbb{1}_B \equiv \mathbb{1}_C$

Et donc $\boxed{B = C}$

3.(c) On a:

$$\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_{B\Delta C} = \mathbb{1}_A \cdot (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C)$$
$$= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

Et:

$$\mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)} = \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - 2\mathbb{1}_{A\cap B}\cdot\mathbb{1}_{A\cap C}$$
$$= \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\cdot\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$$

Comme $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$ (puisque $0\times 0 = 0$ et $1\times 1 = 1$)

on a: $\mathbb{1}_{A\cap(B\Delta C)} = \mathbb{1}_{(A\cap B)\Delta(A\cap C)}$

Et donc : $\boxed{A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)}$

Partie II

1.(a) $A\Delta A = (A\cup A)\setminus(A\cap A) = A\setminus A = \boxed{\emptyset}$

$\emptyset\Delta X = (\emptyset\cup X)\setminus(\emptyset\cap X) = X\setminus\emptyset = \boxed{X}$

1.(b) $\Phi_A(\Phi_A(X)) = \Phi_A(A\Delta X) = A\Delta(A\Delta X)$
$= (A\Delta A)\Delta X = \emptyset\Delta X = \boxed{X}$

2. On a $\forall X\in P(E)$, $\Phi_A(\Phi_A(X)) = X$

donc $\Phi_A \circ \Phi_A \equiv id_{P(E)}$

Ainsi $\boxed{\Phi_A \text{ est bijective de } P(E) \text{ vers } P(E) \text{ et } \Phi_A^{-1} \equiv \Phi_A}$

3. Donc $\forall B \in P(E), \exists! X \in P(E), \Phi_A(X) = A \Delta X = B$

et $\Phi_A(X) = B \iff X = \Phi_A^{-1}(B) \iff X = \Phi_A(B)$

Donc $\boxed{\text{l'équation } A \Delta X = B \text{ a une unique solution: } X = A \Delta B}$

Partie III

1.(a) On a $Card(\{0,1\}) = 2$ et $Card(E) = n$ donc on sait que $\boxed{Card(\{0,1\}^E) = 2^n}$

1.(b) Mq Ψ est injective sur $P(E)$.

Soit $(A_1, A_2) \in P(E)^2$ tel que $\Psi(A_1) = \Psi(A_2)$.

On a donc $1_{A_1} \equiv 1_{A_2}$ et donc $A_1 = A_2$. Donc f injective sur $P(E)$

Mq Ψ est surjective de $P(E)$ vers $\{0,1\}^E$.

Soit $f \in \{0,1\}^E$ ie $f: E \longrightarrow \{0,1\}$.

On cherche $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $\Psi(A) = f$ ie $\mathbb{1}_A = f$. (5)

On pose $A = \{x \in E,\ f(x) = 1\} = f^{-1}(\{1\})$

On remarque que $\overline{A} = f^{-1}(\{0\})$.

Alors $\forall x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) = 1 \\ 0 & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$

$= f(x)$

Donc $\mathbb{1}_A = f$ et $A \in \mathcal{P}(E)$.

Ainsi f est surjective de $\mathcal{P}(E)$ vers $\{0,1\}^E$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective de } \mathcal{P}(E) \text{ vers } \{0;1\}^E.}$

1.(c) On sait donc que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = \mathrm{Card}(\{0;1\}^E)$

donc $\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n}$

2.(a) Dans la somme $\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_k)$ les termes valent 1 ou 0. La valeur de la somme est égal au nombre termes égaux à 1. Or les termes égaux à 1 correspondent aux éléments de A.

On a donc $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_k) = \text{Card}(A)}$

2.(b) $\text{Card}(A\cup B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A\cup B}(x_k)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{1}_A(x_k) + \mathbb{1}_B(x_k) - \mathbb{1}_A(x_k) \times \mathbb{1}_B(x_k) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\mathbb{1}_A(x_k) + \mathbb{1}_B(x_k) - \mathbb{1}_{A\cap B}(x_k) \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_A(x_k) \right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_B(x_k) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A\cap B}(x_k) \right)$$

$$= \boxed{\text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A\cap B)}$$

2.(c) $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$

Par la même méthode que au-dessus on trouve :

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Card}((A\Delta B)\Delta C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - 2\,\text{Card}(A\cap B) \\ &\quad - 2\,\text{Card}(A\cap C) - 2\,\text{Card}(B\cap C) + 4\,\text{Card}(A\cap B\cap C)\end{aligned}}$$

Partie IV

1. On procède par récurrence sur n.

Initialisation : $n=2$.

Si A_1, A_2 sont deux parties de E on a vu que

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2} \equiv \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} - 2\mathbb{1}_{A_1}\mathbb{1}_{A_2}$$

Comme $\mathbb{1}_{A_1}\mathbb{1}_{A_2}$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{Z}$ on a :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2} \equiv \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} \pmod 2$$

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ pour tout $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ famille de n parties de E :

$$\mathbb{1}_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n} \equiv \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \mathbb{1}_{A_n} \pmod 2$$

Soient $(A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1})$ famille de $n+1$ parties de E.

D'après l'initialisation :

$$\mathbb{1}_{A_1 \Delta A_2 \dots \Delta A_n \Delta A_{n+1}} \equiv \mathbb{1}_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} \pmod 2$$

Puis d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{1}_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n \Delta A_{n+1}} \equiv \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \dots + \mathbb{1}_{A_n} + \mathbb{1}_{A_{n+1}} \pmod 2$$

D'après le principe de récurrence, le prédicat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

2. Soit $x \in E$. On a donc :

$$x \in A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n \iff \mathbb{1}_{A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n}(x) = 1$$

$$\iff \mathbb{1}_{A_1}(x) + \mathbb{1}_{A_2}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1 \pmod 2$$

$\iff \mathbb{1}_{A_1}(x) + \mathbb{1}_{A_2}(x) + \dots + \mathbb{1}_{A_n}(x)$ est un entier impair

$\iff$ x appartient à un nombre pair de parties de la famille $(A_1, A_2, \dots, A_n)$